পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ-প্রবর্তিত Elective Mathematics-এর পাঠ্যসূচী অনুসারে উচ্চ মাধ্যমিক ও সর্বার্থসাধক বিদ্যালয়সমূহের **দশম** শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য লিখিত।

ঐচ্ছিক
উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

[*ELECTIVE MATHEMATICS*]

বীজগণিত, সমতলিক জ্যামিতি, ঘন জ্যামিতি, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি)

[দশম শ্রেণীর পাঠ্য]

কলিকাতা গভর্ণমেণ্ট মডেল স্কুলের ভূতপূর্ব হেড্‌মাষ্টার; কলিকাতা নর্ম্যাল ট্রেনিং স্কুল, বারাকপুর গভর্ণমেণ্ট স্কুল, নবাব বাহাদুর ইনষ্টিটিউসন, কলিকাতা সংস্কৃত কলিজিয়েট্‌ স্কুল ও হিন্দু স্কুলের ভূতপূর্ব প্রধান গণিত শিক্ষক এবং

ঐচ্ছিক উচ্চ মাধ্যমিক গণিত (৯ম ও ১১শ শ্রেণী)

আবশ্যিক উচ্চ মাধ্যমিক গণিত (৯ম ও ১০ম শ্রেণী)

আবশ্যিক উচ্চ মাধ্যমিক গণিত [১ম ও ২য় খণ্ড]

এবং পর্ষৎ কর্তৃক অনুমোদিত

প্রবেশিকা জ্যামিতি (৭ম-৮ম, ৯ম-১০ম ৭ম-১০ম শ্রেণী), সহজ বীজগণিত (৭ম-৮ম, ৯ম-১০ম, ৭ম-১০ম শ্রেণী), গণিত প্রবেশিকা (ঐচ্ছিক), আদর্শ গণিত (৬ষ্ঠ শ্রেণী) প্রভৃতির গ্রন্থকার

শ্রীমনোমোহন রায়চৌধুরী, এম্‌. এ., বি. টি.

ও

শ্রীউপেন্দ্রনাথ রায়চৌধুরী

প্রণীত

বুক্‌স অ্যাণ্ড অ্যালায়েড প্রাইভেট লিমিটেড

৮।১ চিন্তামণি দাস লেন

কলিকাতা—৯

প্রকাশক :
শ্রীযতীন্দ্রনাথ সেন
ম্যানেজিং ডাইরেক্টর,
বুক্‌স অ্যাণ্ড অ্যালায়েড প্রাইভেট লিমিটেড
৮।১ চিন্তামণি দাস লেন
কলিকাতা-৯

প্রথম মুদ্রণ—১৯৬০

মূল্য চারি টাকা

মুদ্রাকর :
শ্রীগঙ্গারাম পাল
মহাবিদ্যা প্রেস
১৫৬নং তারক প্রামাণিক রোড
কলিকাতা-৬,

SYLLABUS OF ELECTIVE MATHEMATICS

ALGEBRA :

Elementary ideas of elimination ; A. P. and G. P. (finite series), H. P. (definition only) ; Variations ; Logarithms (Note—Use of slide rule may be encouraged) ;

Irrational quantities, Complex numbers and their geometrical representation. Simultaneous equations in two unknowns of which one is quadratic and the other linear.

EOMETRY :

Theoretical

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn om the point of contact are respectively equal to the angles in the lternate segments of the circle.

If two chords of a circle intersect either inside or outside the ircle, the rectangle contained by the parts of one is equal to the rectangle contained by the parts of the other. (Note—This proposition may be proved with the help of the properties of similar triangles).

Practical

Construction of tangents to a circle and of common tangents to two circles (both cases). Construction of regular figures of 3, 4 5 or 6 sides in or about a circle. 302

Construction of a mean proportional to two given straight 303

Construction of a square equal in area to a given polygon. 304

310

SOLID GEOMETRY :

Axioms (i). One and only one plane may be made to pass thr 310 any two intersecting straight lines. 311

Axioms (ii). Two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

To prove

1. If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

2. All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

3. If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane, then the other is also perpendicular to the plane.

Concept of angle between two planes and angle betw en a straight line and a plane. Concept of parallelism of planes. Concept of a line being parallel to a plane. Concept of skew lines.

CO-ORDINATE GEOMETRY :

Rectangular cartesian co-ordinates in a plane ; Lengths of segments ; Sections of a finite segment in a given ratio ; Area of a triangle ; Straight line.

MENSURATION :

Parallelopipeds, Right Circular cones, Prisms and Pyramids (Expressions, without proof, of the surfaces and volumes of these solids).

TRIGONOMETRY :

Trigonometrical ratios of any angle ; Trigonometrical ratios of [illegible] associated with a given angle ; Addition and subtraction [illegible] ; Transformation of products and sums ; Multiple and sub-[illegible] angles.

[illegible]—It is recommended that Solid Geometry and Mensuration [illegible] solids be taught through the drawing board, and the making [illegible] handling of solid models.

সূচীপত্র

বীজগণিত

সমতলিক জ্যামিতি

ঘন জ্যামিতি

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

পরিমিতি

ত্রিকোণমিতি

SOME TRIGONOMETRICAL FORMULÆ

I. বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$\pi = \frac{22}{7} = 3{\cdot}1416$ (আসন্ন)

$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142$ (আসন্ন) $\qquad \sqrt{3} = 1{\cdot}7321$ (আসন্ন)

2 সমকোণ $= 180° = \pi$ রেডিয়ান, 1 রেডিয়ান $= 57°17'44{\cdot}8''$ (প্রায়)

কোণের বৃত্তীয় মান = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$

II. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

$\sin 0° = 0$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90° = 1$.

$\cos 0° = 1$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 90° = 0$.

$\tan 0° = 0$, $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 45° = 1$, $\tan 60 = \sqrt{3}$, $\tan 90° = \infty$.

III. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$.

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$, $\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$.

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$.

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$.

$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$, $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$, $\tan(360° + \theta) = \tan\theta$.

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$, $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$, $\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$.

Y

sin (*positive*) | **all** (*positive*)

X′ O X

tan (*positive*) | **cos** (*positive*)

Y′

$\sin 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\sin 75° = \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

$\tan 15° = \cot 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$, $\tan 75° = \cot 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$
$= 2 + \sqrt{3}$.

$\sin 18° = \cos 72° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\sin 36° = \cos 54° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

$\sin 54° = \cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, $\sin 72° = \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$\sin 22\frac{1}{2}° = \cos 67\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sin 67\frac{1}{2}° = \cos 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$\sin 180° = 0$ $\quad\cos 180° = -1$ $\quad\tan 180° = 0$.

$\sin 270° = -1$ $\quad\cos 270° = 0$ $\quad\tan 270° = \infty$.

IV. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$.

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$.

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}$$

V. $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

VI. $\sin C+\sin D=2\sin\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)$

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)$

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)$

$\cos C-\cos D=2\sin\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(D-C)$

VII. $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$

$1-\cos 2A=2\sin^2 A$, $1+\cos 2A=2\cos^2 A$

$$\tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

$$\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A},\ \cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A},\ \cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$$

$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$, $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

$1+\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A$, $1-\cos A=2\sin^2\frac{1}{2}A$

VIII. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত।

If $A+B+C=\pi$, then

(i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

(ii) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

(iii) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

(iv) $\sin^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C=1-2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$.

(v) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$.

(vi) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

(vii) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

(viii) $\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C=\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$.

এই পুস্তকে ব্যবহৃত গ্রীসীয় অক্ষর :

Capital	Small		Capital	Small	
A	α	Alpha	Π	π	Pi
B	β	Beta	P	ρ	Rho
Γ	γ	Gamma	Σ	σ	Sigma
Δ	δ	Delta	Φ	ϕ	Phi
Θ	θ	Theta	Ψ	ψ	Psi (ছাই)
Ω	ω	Omega			

বীজগণিত

(দশম শ্রেণী)

অপনয়ন

106. $x-a=5$ এবং $x-3=8$ এই সমীকরণদ্বয়ে x অজ্ঞাত রাশি এবং a অনির্দিষ্টমান সংখ্যা। প্রথম সমীকরণটির বীজ $a+5$ এবং দ্বিতীয়টির বীজ 11. সুতরাং x এর মান $a+5$ হইলে প্রথম সমীকরণটি এবং x এর মান 11 হইলে দ্বিতীয় সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। কিন্তু x এর একই মান দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে, যদি $a+5=11$ হয় অর্থাৎ যদি $a=6$ হয়। পরীক্ষা করিয়া দেখ, যদি $a=6$ হয়, তবেই x এর একই মান 11 দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হয়।

আর একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাক।

$x-a=5$ এবং $x-b=8$ এই সমীকরণদ্বয়ে x অজ্ঞাত রাশি এবং a ও b দুইটি অনির্দিষ্টমান সংখ্যা। প্রথম সমীকরণটির বীজ $a+5$ এবং দ্বিতীয়টির বীজ $b+8$. সুতরাং x এর মান $a+5$ হইলে প্রথম সমীকরণটি এবং x এর মান $b+8$ হইলে দ্বিতীয় সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। কিন্তু x এর একই মান দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে, যদি $a+5=b+8$ বা $a-b=3$ হয়, অর্থাৎ a যদি b অপেক্ষা 3 অধিক হয়।

এইরূপে শেষোক্ত সমীকরণ দুইটি হইতে x অপসারণ করিয়া a ও bর ভিতর পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার প্রণালীকে ঐ সমীকরণদ্বয় হইতে x **অপনয়ন** (elimination) করা বলে এবং ঐ সম্বন্ধটিকে সমীকরণদ্বয়ের **অপনীতক** (eliminant) বলে। এস্থলে সমীকরণদ্বয়ের $a-b=3$ অপনীতক এবং ইহাকে সমীকরণদ্বয়ের **x-অপনীতক** (x-eliminant) বলে।

তাহা হইলে, অপনীতক $a-b=3$ হইল সর্ত (condition), যাহা সিদ্ধ হইলে $x-a=5$ এবং $x-b=8$ এই সমীকরণদ্বয়ের একই বীজ থাকিবে।

যদি $x-a=5$ এবং $x-b=8$ এর a এবং b উভয়েই নির্দিষ্টমান সংখ্যা (ধর যেন 2 এবং 1) হইত, তবে স্পষ্টতঃই অপনীতক নির্ণয় করা সম্ভবপর হইত না। সমীকরণদ্বয়ের অন্ততঃ একটিতে একটি অনির্দিষ্টমান সংখ্যা থাকিলে অপনীতক নির্ণয় করা চলিত (প্রথম দৃষ্টান্তটি দেখ), নতুবা নহে।

অপনয়নে সমীকরণের সংখ্যা। একটি একবর্ণ সরল সমীকরণ অজ্ঞাত রাশিটির একটিমাত্র মান দ্বারা সকল সময়েই সিদ্ধ হয়। তদ্রূপ, দুইটি দ্বিবর্ণ সরল

সহ-সমীকরণ অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের একজোড়া অনুরূপ মান দ্বারা সকল সময়েই সিদ্ধ হয়। এরূপস্থলে অনির্দিষ্টমান সংখ্যাগুলির ভিতর কোনরূপ সম্বন্ধ বর্তমান থাকিবার প্রয়োজন হয় না, কাজেই অপনীতকও থাকে না।

সাধারণতঃ অপনেয় রাশির সংখ্যা অপেক্ষা একটি অধিক সমীকরণ থাকিলে অপনীতক নির্ণয় করা চলে।

কিন্তু যদি সমীকরণগুলি অপনেয় রাশিসমূহের সমমাত্র সমীকরণ হয়, তবে সমীকরণের সংখ্যা, অপনেয় রাশির সংখ্যার সমান হইলেই অপনীতক নির্ণয় করা চলে। যেমন,

$ax+y=0$ এবং $x+by=0$ হইতে x ও y অপনয়ন করিতে গিয়া যদি আমরা উভয় সমীকরণকে y দ্বারা ভাগ করিয়া লই, তবে সমীকরণদ্বয় দাঁড়ায়,

$$a\cdot\frac{x}{y}+1=0 \text{ এবং } \frac{x}{y}+b=0.$$

এখন, $\frac{x}{y}$ কে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি ধরিয়া সমীকরণদ্বয়ের অপনীতক অনায়াসে নির্ণয় করা যায়।

অপনীতক নির্ণয় করিবার কোন ধরাবাঁধা নিয়ম নাই। স্থলবিশেষে কৌশল অবলম্বন করিয়াও অপনীতক নির্ণয় করা চলে।

উদা 1. Find the condition that $ax+b=0$ and $cx+d=0$ may be satisfied by the same value of x.

Or, Find the condition that $ax+b=0$ and $cx+d=0$ may have the same root.

Or, Eliminate x from $ax+b=0$ and $cx+d=0$.

প্রথম সমীকরণ হইতে, $x=-\frac{b}{a}$ এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $x=-\frac{d}{c}$;

সুতরাং x এর একই মান দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে,

$$\text{যদি } -\frac{b}{a}=-\frac{d}{c} \text{ বা } \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ হয়।}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ বা } bc-ad=0 \text{ নির্ণেয় অপনীতক।}$$

উদা. 2. Eliminate x from the equations $ax^2+bx+c=0$ and $cx-b=0$.

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $x=\frac{b}{c}$ · x এর এই মান দ্বারা প্রথম সমীকরণ সিদ্ধ হইলে,

$$a\left(\frac{b}{c}\right)^2+b\left(\frac{b}{c}\right)+c=0 \text{ হইবে।}$$

$\therefore\ a\left(\frac{b}{c}\right)^2+b\left(\frac{b}{c}\right)+c=0$ বা, $ab^2+b^2c+c^3=0$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা 3. Eliminate x from the equations

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0 \quad \cdots \ (1)$$
$$a_2x^2+b_2x+c_2=0 \quad \cdots \ (2)$$

(1) ও (2) এ বজ্রগুণন করিয়া,

$$\frac{x^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{x}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{(c_1a_2-c_2a_1)^2}=\frac{x^2}{(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)}$$

এখন, তুল্যমান ভগ্নাংশ দুইটির লবদ্বয় সমান বলিয়া হরদ্বয়ও সমান হইবে ;

$\therefore\ (c_1a_2-c_2a_1)^2=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 4. Eliminate x from the equations

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots \ (1)$$
$$x^3+cx^2-b=0 \quad \cdots \ (2)$$

(1) কে x দ্বারা এবং (2) কে a দ্বারা গুণ করিয়া,

$$ax^3+bx^2+cx=0$$
$$ax^3+acx^2-ab=0$$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $(b-ac)x^2+cx+ab=0 \quad \cdots \ (3)$

$\therefore$ (1) ও (3) হইতে, $\frac{x^2}{ab^2-c^2}=\frac{x}{bc-ac^2-a^2b}=\frac{1}{ac-b^2+abc}$

$$\therefore\ \frac{x^2}{(bc-ac^2-a^2b)^2}=\frac{x^2}{(ab^2-c^2)(ac-b^2+abc)}$$

$\therefore\ (bc-ac^2-a^2b)^2=(ab^2-c^2)(ac-b^2+abc)$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 5. Eliminate x from the equations

$$x^2+\frac{1}{x^2}=p^2 \text{ and } x+\frac{1}{x}=q.$$

প্রথম সমীকরণ হইতে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=p^2$

বা, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=p^2$

$\therefore$ x এর একই মান দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইতে হইলে, $x+\frac{1}{x}$ এর জন্য q বসাইয়া, $q^2-2=p^2$ হইবে।

$\therefore$ $q^2-2=p^2$ বা, $q^2-p^2=2$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 6. Find the x-eliminant of

$$x^3+\frac{3}{x}=\tfrac{1}{2}(a^3+b^3) \cdots (1) \text{ and } 3x+\frac{1}{x^3}=\tfrac{1}{2}(a^3-b^3) \cdots (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিয়া, $x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=a^3$

বা, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=a^3 \quad \therefore \quad x+\frac{1}{x}=a \cdots (3)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=b^3$

বা, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=b^3 \quad \therefore \quad x-\frac{1}{x}=b \cdots (4)$

$\therefore$ (3) ও (4) যোগ করিয়া, $2x=a+b$

এবং (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $\frac{2}{x}=a-b$

$\therefore \quad (a+b)(a-b)=2x\cdot\frac{2}{x}=4$

$\therefore$ $(a+b)(a-b)=4$ বা, $a^2-b^2=4$ নির্ণেয় x-অপনীতক।

উদা. 7. Eliminate x and y from the equations $a_1x-b_1y=0$ and $a_2x+b_2y=0$.

$a_1x-b_1y=0$ বা, $a_1\cdot\frac{x}{y}-b_1=0 \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{b_1}{a_1} \quad \cdots (1)$

এবং $a_2x+b_2y=0$ বা, $a_2\cdot\frac{x}{y}+b_2=0 \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=-\frac{b_2}{a_2} \cdots (2)$

$\therefore \quad \frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$ হইলে $\frac{x}{y}$ এর একই মান দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad \frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$ বা $a_2b_1 + a_1b_2 = 0$ নির্ণেয় অপনীতক।

মন্তব্য। এস্থলে $\frac{x}{y}$ কে একটি রাশি ধরায় মাত্র দুইটি সমীকরণ হইতে দুইটি অজ্ঞাত রাশি x এবং y অপনয়ন করা সম্ভবপর হইয়াছে, তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন হয় নাই।

উদা. 8. Eliminate x and y from the equations

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \;\cdots\; (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \;\cdots\; (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \;\cdots\; (3)$$

(1) ও (2) হইতে, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$$\therefore \quad x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ এবং } y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

x এবং y এর এই মানদ্বয় দ্বারা তৃতীয় সমীকরণটি সিদ্ধ হইলে,

$$a_3 . \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_3 . \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + c_3 = 0 \text{ হইবে।}$$

$\therefore$ উহা অর্থাৎ $a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 9. Eliminate x and y from the equations $mx + ny = a$, $nx - my = b$ and $x^2 + y^2 = 1$.

পূর্ববর্তী উদাহরণের ন্যায়, প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে বজ্রগুণন দ্বারা x এবং y এর মান নির্ণয় করিয়া ঐ মানদ্বয় তৃতীয় সমীকরণে বসাইলে নির্ণেয় অপনীতক পাওয়া যাইবে।

অথবা, কৌশলে : প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণকে বর্গ করিয়া,

$$m^2x^2 + n^2y^2 + 2mnxy = a^2$$
$$n^2x^2 + m^2y^2 - 2mnxy = b^2$$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $m^2(x^2 + y^2) + n^2(x^2 + y^2) = a^2 + b^2$

বা, $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ এবং ইহাই নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 10. Eliminate a and b from the equations
$$ax - by = p,\ bx + ay = q \text{ and } a^2 + b^2 = r^2.$$

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণকে বর্গ করিয়া,
$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy = p^2$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2abxy = q^2$$
∴ যোগ করিয়া, $x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) = p^2 + q^2$

বা, $x^2r^2 + y^2r^2 = p^2 + q^2$

∴ $r^2(x^2 + y^2) = p^2 + q^2$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 11. Eliminate x and y from the equations
$$x - y = l \cdots (1),\quad x^2 - y^2 = m^2 \cdots (2) \text{ and } x^3 - y^3 = n^3 \cdots (3).$$

(2)কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া, $x + y = \dfrac{m^2}{l} \quad \cdots \quad (4)$

(1) ও (4) যোগ করিয়া, $2x = \dfrac{l^2 + m^2}{l} \quad \therefore \quad x = \dfrac{l^2 + m^2}{2l}$

(1) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $-2y = \dfrac{l^2 - m^2}{l} \quad \therefore \quad y = \dfrac{m^2 - l^2}{2l}$

∴ x ও yর এই মানদ্বয় (3)এ বসাইয়া, $\left(\dfrac{l^2 + m^2}{2l}\right)^3 - \left(\dfrac{m^2 - l^2}{2l}\right)^3 = n^3$

বা, $(l^2 + m^2)^3 + (l^2 - m^2)^3 = 8l^3n^3$

বা, $2(l^6 + 3l^2m^4) = 8l^3n^3$

বা, $l^4 + 3m^4 = 4ln^3$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 12. Eliminate x, y and z from the equations
$$ax + by + cz = 0 \quad \cdots \quad (1)$$
$$bx + cy + az = 0 \quad \cdots \quad (2)$$
$$cx + ay + bz = 0 \quad \cdots \quad (3).$$

(1) ও (2)এ বজ্রগুণন করিয়া, $\dfrac{x}{ab - c^2} = \dfrac{y}{bc - a^2} = \dfrac{z}{ca - b^2} = k$ (ধর)

∴ $x = k(ab - c^2),\ y = k(bc - a^2),\ z = k(ca - b^2)$

x, y ও z এর এই মানগুলি (3)এ বসাইয়া,
$$k\{c(ab - c^2) + a(bc - a^2) + b(ca - b^2)\} = 0$$
$$\therefore \quad c(ab - c^2) + a(bc - a^2) + b(ac - b^2) = 0$$
বা, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ নির্ণেয় অপনীতক।

মন্তব্য। এস্থলে প্রদত্ত সমীকরণগুলি সমমাত্র বলিয়া তিনটি সমীকরণ হইতে তিনটি অজ্ঞাত রাশি অপনয়ন করা সম্ভবপর হইয়াছে।

উদা. 13. Eliminate x, y and z from the equations

$$x^2(y+z)=a^2,\quad y^2(z+x)=b^2$$
$$z^2(x+y)=c^2, \text{ and } xyz=abc.$$

$\because\quad x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=(y+z)(z+x)(x+y)$ (অনু. 16)

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে, $a^2+b^2+c^2+2abc=\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{b^2}{y^2}\cdot\frac{c^2}{z^2}$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}=1;$$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+2abc=1$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 14. Eliminate x, y and z from the equations

$$x+y+z=a\ \cdots\ (1),\quad xy+yz+zx=b^2\ \cdots\ (2)$$
$$x^3+y^3+z^3=c^3\cdots\ (3),\quad xyz=d^3\ \cdots\ (4).$$

$\because\quad x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}$ (অনু. 14)

$$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে, $c^3-3d^3=a(a^2-3b^2)$ নির্ণেয় অপনীতক।

উদা. 15. Eliminate x, y and z from the equations

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a,\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=b,\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=c.$$

$$abc=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{z}+\frac{y^2}{xz}+\frac{xz}{y^2}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

$$=1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+1$$

$$=2+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right)+\left(\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}\right)$$

$$=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2-2+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)^2-2.$$

$$=a^2+b^2+c^2-4$$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2=abc+4$ নির্ণেয় অপনীতক।

Exercise 51

1. Find the condition that $x+3=5$ and $ax-4=0$ may be satisfied by the same value of x.

2. Find the condition that $ax-b=0$ and $bx-c=0$ may have the same root.

Eliminate x from the equations :

3. $2x-a=0,$
$bx-3=0.$

4. $ax+b=0,$
$cx-d=0.$

5. $x^2+ax+b=0,$
$bx-a=0.$

6. $ax^2+bx+c=0,$
$bx^2+cx+a=0.$

7. $lx^2+mx+n=0,$
$px^2+qx+r=0.$

8. $x^2-ax=2b,$
$x^3-bx+a=0.$

9. $x+\frac{1}{x}=a,$
$x-\frac{1}{x}=b.$

10. $x+\frac{1}{x}=p+q,$
$x-\frac{1}{x}=p-q.$

11. $2x+\frac{3}{x}=4p+5q,$
$2x-\frac{3}{x}=4p-5q.$

12. $x^2+\frac{1}{x^2}=a,$
$x+\frac{1}{x}=b.$

13. $x^2+\frac{1}{x^2}=p^2,$
$x-\frac{1}{x}=q.$

14. $x^3+\frac{3}{x}=4(m^3+n^3),$
$3x+\frac{1}{x^3}=4(m^3-n^3).$

Eliminate x and y from the equations :

15. $2x+3y=0,$
$ax+by=0.$

16. $ax-by=0,$
$cx+dy=0.$

17. $ax+by+c=0,$
$bx+cy+a=0,$
$cx+ay+b=0.$

18. $ax+by=p,$
$bx-ay=q,$
$x^2+y^2=1.$

19. $x^2+xy+y^2=0, \quad ax-by=0.$

20. $x-y=a-b, \; x^2-y^2=a^2-b^2, \; xy=c^2.$

21. $x+y=a, \; x^2-y^2=b^2, \; x^3+y^3=c^3.$

22. $x-y=p, \; x^2-y^2=q^2, \; x^3-y^3=r^3.$

Eliminate x, y and z from the equations :

23. $ax+by+cz=0, \; bx+cy+az=0, \; cx+ay+bz=0.$

24. $x=a(y-z), \; y=b(z-x), \; z=c(x-y).$

25. $yz=a, \; zx=b, \; xy=c, \; x^2+y^2+z^2=d.$

[$x^2=\dfrac{zx.xy}{yz}=\dfrac{bc}{a}, y^2=\dfrac{yz.xy}{zx}=\dfrac{ac}{b}$, ইত্যাদি।]

26. $x^2(y+z)=a, \; y^2(z+x)=b, \; z^2(x+y)=c, \; x^2y^2z^2=abc.$
[উদা. 13 দেখ।]

27. $x^2(y-z)=a^2, \; y^2(z-x)=b^2, \; z^2(x-y)=c^2, \; xyz=abc.$
[অনু. 18 (1) দেখ।]

28 $x+y+z=1, \; xy+yz+zx=a, \; x^3+y^3+z^3=1, \; xyz=b.$

29. Eliminate a and b from the equations $ax-by=m, \; bx+ay=n$ and $x^2+y^2=1.$

30. Eliminate a, b, c from the equations
$ax+by-cz=0, \; ay+bz-cx=0, \; az+bx-cy=0.$

Progression (প্রগতি)

107. **শ্রেণী।** যদি কতকগুলি রাশি এরূপ হয় যে, উহাদের প্রত্যেকটিকে, উহার পূর্ববর্তী এক বা একাধিক রাশি হইতে কোনও নির্দিষ্ট নিয়মে পাওয়া যায়, তবে ঐ রাশিগুলিকে একটি **শ্রেণী** (Series) বলে এবং প্রত্যেক রাশিকে ঐ শ্রেণীটির **পদ** (Term) বলে। যথা,

(*i*) 1, 3, 5, 7, ··· (*ii*) 1, 2, 4, 8, ··· (*iii*) 1, 2, 3, 5, 8, ···

(*i*)এ প্রত্যেক পদের সহিত 2 যোগ করিয়া তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

(*ii*)এ প্রত্যেক পদকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

(*iii*)এ পর পর দুইটি পদকে যোগ করিয়া তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

108. সমান্তর শ্রেণী। যে শ্রেণীর যে কোন পদের সহিত একই ধ্রুবক রাশি (Constant quantity) যোগ করিলে তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়, তাহাকে **সমান্তর শ্রেণী** (Arithmetical series) বলে এবং ঐ ধ্রুবক রাশিটিকে শ্রেণীটির **সাধারণ অন্তর** (Common difference) বলে। সমান্তর শ্রেণীর পদগুলিকে সমান্তর প্রগতিতে (in Arithmetical Progression বা in A. P.) অবস্থিত বলা হয়। যথা,

$3, 5, 7, \cdots$ একটি সমান্তর শ্রেণী, শ্রেণীটির 2 সাধারণ অন্তর এবং শ্রেণীটির পদগুলি সমান্তর প্রগতিতে অবস্থিত।

$4, 1, -2, \cdots$ একটি সমান্তর শ্রেণী, শ্রেণীটির -3 সাধারণ অন্তর এবং শ্রেণীটির পদগুলি সমান্তর প্রগতিতে অবস্থিত।

109. সাধারণ অন্তর নির্ণয়। কোন সমান্তর শ্রেণীর যে কোন পদ হইতে তৎপূর্ববর্তী পদটি বিয়োগ করিলে সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদ হইতে প্রথম পদটি বিয়োগ করিয়া সাধারণ অন্তর নির্ণয় করা হয়। যথা,

$3, 5, 7, 9, \cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $= 5 - 3 = 2$.

$4, 1, -2, -5, \cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $= 1 - 4 = -3$.

$a, a+b, a+2b, \cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $= (a+b) - a = b$.

$a, a-b, a-2b, \cdots$ সমান্তর শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর $= (a-b) - a = -b$.

110. সাধারণ পদ ও শেষ পদ। 5, 7, 9, 11, 13, 15 একটি সমান্তর শ্রেণী। ইহার প্রথম পদ 5, দ্বিতীয় পদ 7, $\cdots$, ষষ্ঠ পদ বা শেষ পদ 15. এইরূপ কোন শ্রেণীর n-তম পদ (n-th term)কে **সাধারণ পদ** (General term) বলে।

যদি কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা n হয়, তবে উহার n-তম পদই **শেষ পদ** (Last term) হইবে। কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা কখনই ঋণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইতে পারে না, পদসংখ্যা সর্বত্রই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইবে।

111. প্রতীকের ব্যবহার। সাধারণতঃ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদকে a, শেষ পদকে l, সাধারণ অন্তরকে b, পদসংখ্যাকে n এবং পদগুলির যোগফলকে s দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুবিধার জন্য কোন শ্রেণীর প্রথম পদকে t_1, দ্বিতীয় পদকে t_2, তৃতীয় পদকে $t_3, \cdots$, n-তম পদকে t_n এবং প্রথম পদকে s_1, প্রথম দুই পদের যোগফলকে s_2, প্রথম তিন পদের যোগফলকে $s_3, \cdots$, প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফলকে s_n দ্বারা প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

112. সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়।

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.
তাহা হইলে, শ্রেণীটি হইবে $a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\cdots$ এবং উহার

প্রথম পদ $= a = a+(1-1)b$,
দ্বিতীয় পদ $= a+b = a+(2-1)b$,
তৃতীয় পদ $= a+2b = a+(3-1)b$,
চতুর্থ পদ $= a+3b = a+(4-1)b$, ইত্যাদি।

$\therefore$ যে কোন পদ $= a+$(ঐ পদের অবস্থানসূচক সংখ্যা $-1)b$.

$\therefore$ **n-তম পদ বা $t_n = a+(n-1)b$.** $\cdots$ (1)

মন্তব্য 1. যে সমান্তর শ্রেণীর পদসংখ্যা n, তাহার শেষ পদকে l দ্বারা সূচিত করিলে,

$$l = a+(n-1)b. \cdots (2)$$

মন্তব্য 2. lকে শেষ পদ ধরিয়া n সংখ্যক পদবিশিষ্ট সমান্তর শ্রেণীটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে দাঁড়ায়ঃ

$$l,\ l-b,\ l-2b,\ l-3b,\cdots,\ l-(n-1)b.$$

$\therefore$ **প্রথম পদ বা $t_1 = l-(n-1)b$.** $\cdots$ (3)

মন্তব্য 3. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর দেওয়া থাকিলে শ্রেণীটির যে কোন পদ নির্ণয় করা যায়।

113. সমান্তর শ্রেণীর কতিপয় ধর্ম।

(1) কোন সমান্তর শ্রেণীর (i) প্রত্যেক পদের সহিত একই রাশি যোগ করিলে অথবা (ii) প্রত্যেক পদ হইতে একই রাশি বিয়োগ করিলে, ফলগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

সমান্তর শ্রেণীটি যেন $a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\cdots$.

(i) উহার প্রত্যেক পদের সহিত একই রাশি m যোগ করিলে হয়ঃ

$$a+m,\ a+b+m,\ a+2b+m,\ a+3b+m,\cdots$$

বা, $(a+m),\ (a+m)+b,\ (a+m)+2b,\ (a+m)+3b,\cdots$ এবং ইহার প্রথম পদ $a+m$ এবং সাধারণ অন্তর b; $\therefore$ উহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

(ii) গৃহীত সমান্তর শ্রেণীটির প্রত্যেক পদ হইতে একই রাশি m বিয়োগ করিলে হয়ঃ

$$a-m,\ a+b-m,\ a+2b-m,\ a+3b-m,\cdots$$

বা, $(a-m), (a-m)+b, (a-m)+2b, (a-m)+3b, \cdots$ এবং ইহার প্রথম পদ $a-m$ এবং সাধারণ অন্তর b ; $\therefore$ উহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

(2) কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে একই সংখ্যা দ্বারা (*i*) গুণ করিলে অথবা (*ii*) ভাগ করিলে, ফলগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

সমান্তর শ্রেণীটি যেন $a, a+b, a+2b, a+3b, \cdots$.

(*i*) উহার প্রত্যেক পদকে একই রাশি m দ্বারা গুণ করিলে হয় :

$am, am+bm, am+2bm, am+3bm, \cdots$ এবং স্পষ্টতঃই উহার প্রথম পদ am এবং সাধারণ অন্তর bm ; $\therefore$ উহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

(*ii*) গৃহীত সমান্তর শ্রেণীটির প্রত্যেক পদকে একই রাশি m দ্বারা ভাগ করিলে হয় :

$\frac{a}{m}, \frac{a}{m}+\frac{b}{m}, \frac{a}{m}+2\cdot\frac{b}{m}, \frac{a}{m}+3\cdot\frac{b}{m}, \cdots$ এবং স্পষ্টতঃই উহার প্রথম পদ $\frac{a}{m}$ এবং সাধারণ অন্তর $\frac{b}{m}$; $\therefore$ উহা একটি সমান্তর শ্রেণী।

(3) যদি l, m, n একটি সমান্তর শ্রেণী হয়, তবে $l+n=2m$ হইবে।

মনে কর, শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে, $m=l+b$ এবং $n=l+2b$.

$$\therefore \quad l+n=l+l+2b=2(l+b)=2m.$$

114. সূত্রের প্রয়োগ। পূর্বনির্ণীত সূত্রগুলির প্রয়োগপ্রণালী উদাহরণ দ্বারা দেখান গেল।

উদা. 1. The first term of an A. P. is 6 and the common difference is 2. Find the 15th term. (C. U. 1922)

সূত্র (1) হইতে, 15-তম পদ $=6+(15-1)\times 2=6+28=34$.

উদা. 2. Find the 13th term of the series 12, 10, 8, 6, ⋯.

এস্থলে প্রথম পদ 12 এবং সাধারণ অন্তর $=10-12=-2$.

$\therefore$ সূত্র (1) হইতে, 13-তম পদ $=12+(13-1)\cdot(-2)=12-24=-12$.

উদা. 3. Which term of the series 3, 5; 7, 9,⋯ is 27 ?

মনে কর, n-তম পদটি 27. এস্থলে প্রথম পদ $=3$ এবং সাধারণ অন্তর $=5-3=2$.

$\therefore$ সূত্র (1) হইতে, n-তম পদ বা $27=3+(n-1).2$

বা, $27=3+2n-2$ বা, $2n=26$ $\therefore$ $n=13$

$\therefore$ 13-তম পদটি 27.

উদা. 4. Find the number of terms in the series $-4, -1, 2, 5, \cdots, 38$.

মনে কর, পদসংখ্যা n. তাহা হইলে, n-তম পদটি 38. সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $= -4$ এবং সাধারণ অন্তর $= -1-(-4)=3$.

$\therefore$ সূত্র (1) হইতে, 38 বা n-তম পদ $= -4+(n-1)\times 3$

বা, $38=-4+3n-3$ বা, $3n=45$ $\therefore$ $n=15$

$\therefore$ শ্রেণীটির পদসংখ্যা $=15$.

উদা. 5. Is 54 a term of the series $2, 5, 8, \cdots$?

54 যদি সমান্তর শ্রেণীটির কোন পদ হয়, তবে মনে কর যেন উহা শ্রেণীটির n-তম পদ। শ্রেণীটির প্রথম পদ $=2$ এবং সাধারণ অন্তর $=5-2=3$.

$\therefore$ সূত্র (1) হইতে, $2+(n-1)\times 3=54$

বা, $3(n-1)=52$ বা, $3n=55$ $\therefore$ $n=18\frac{1}{3}$

কিন্তু n অর্থাৎ পদসংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না; $\therefore$ সমান্তর শ্রেণীটির 54 কোন পদ নহে।

উদা. 6. The 18th term of an A.P. is 35 and the common difference is 4. Find the first term.

মনে কর, প্রথম পদ a. তাহা হইলে,

সূত্র (1) হইতে, 35 বা 18-তম পদ $=a+(18-1)\times 4$

বা, $35=a+68$ $\therefore$ $a=-33$

$\therefore$ a বা প্রথম পদ $=-33$.

উদা. 7. The first term of an A. P. is 2 and the 20th term is 59. Find the common difference. (C. U. 1924)

মনে কর, সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

সূত্র (1) হইতে, 59 বা 20-তম পদ $=2+(20-1)b$

বা, $59=2+19b$ বা, $19b=57$ $\therefore$ $b=3$.

$\therefore$ b বা সাধারণ অন্তর $=3$.

115. যে কোন দুই পদ হইতে সমান্তর শ্রেণী নির্ণয়। কোন সমান্তর শ্রেণীর যে কোন দুইটি পদ জানা থাকিলে, শ্রেণীটিকে সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

উদা. 8. The second term of a series in A. P. is 6 and the fourth term is 14. Find the series and the tenth term. (C. U. 1922)

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

$a+(2-1)b=t_2$ বা, $a+b=6 \cdots (1)$

এবং $a+(4-1)b=t_4$ বা, $a+3b=14 \cdots (2)$

$\therefore$ (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $2b=8 \quad \therefore b=4$

$\therefore$ (1) হইতে, $a+4=6 \quad \therefore a=2$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণীটি 2, 6, 10, 14,...

এবং দশম পদ $=a+(10-1)b=2+9\times 4=38$.

উদা. 9. The mth term of an A. P. is n and the nth term is m. Find the pth term. (C. U. 1947; S. B. 1951)

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

$a+(m-1)b=t_m$ বা, $a+(m-1)b=n \cdots (1)$

এবং $a+(n-1)b=t_n$ বা, $a+(n-1)b=m \cdots (2)$

$\therefore$ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $(m-n)b=n-m \quad \therefore b=-1$

$\therefore$ (1) হইতে, $a+(m-1)(-1)=n \quad \therefore a=m+n-1$

$\therefore$ p-তম পদ $=a+(p-1)b=m+n-1+(p-1)(-1)$

$=m+n-p$.

উদা. 10. Show that in an A. P., the sum of any two terms equidistant from the beginning and the end is equal to the sum of the first and the last terms.

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, শেষ পদ l, সাধারণ অন্তর b এবং পদসংখ্যা n.

$\therefore$ প্রথম দিক হইতে r-তম পদ $=a+(r-1)b$

এবং শেষ দিক হইতে r-তম পদ $=l-(r-1)b$

$\therefore$ ঐ দুই পদের সমষ্টি $=a+(r-1)b+l-(r-1)b=a+l$.

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

Exercise 52

1. The first term of an A. P. is 3 and the common difference is 2. Find the 10th term.

2. The first term of an A. P. is -10 and the common difference is -5. Find the 15th term.

3. Find the 13th term of the series $1, 4, 7, \cdots$.

4. Find the 16th term of the series $3, 0, -3, \cdots$.

5. Find the nth term of the series $\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \cdots$.

6. Find the $(n-3)$th term of the series $a, a+b, a+2b, \cdots$.

7. Which term of the series $-5, -2, 1, \cdots$ is 25 ?

8. Which terms of the series $9, 5, 1, \cdots$ are -27, $13-4r$ and $5-4n$?

9. Find the number of terms in the series $-6, -2, 2, \cdots, 30$.

10. Is 32 a term of the series $-2, 2, 6, \cdots$?

11. Is -50 a term of the series $7, 4, 1, \cdots$?

12. The 15th term of an A. P. is -35 and the common difference is -3. Find the first term.

13. The first term of an A. P. is 1 and the 10th term is 10. Find the common difference. (C. U. 1925)

14. Find the common difference of an A. P. whose 3rd term is -5 and the 6th term is 10.

15. Find the first term and the common difference of an A. P. whose 2nd term is -5 and the 7th term is 5.

16. The 4th term of an A. P. is 10 and the 9th term is 25. Find the 12th term.

17. Find the 4th term of an A. P. whose 2nd term is -6 and 11th term is 21.

18. The 3rd term of an A. P. is 3 and the 6th term is -3. Find the series.

19. The pth term of an A. P. is $2p-1$. Find the series.

20. The pth term of an A. P. is c and the qth term is d. Find the first term and the common difference. (C. U. 1934)

21. If the pth term of an A. P. is q and the qth term is p, show that rth term is $p+q-r$. [উদা. 9 দেখ।]

22. Find the $(m+n)$th term of a series in A. P. whose mth term is n and nth term is m.

23. If a, b, c, d be in A. P., show that $a+d=b+c$.

24. Show that in an A. P., the sum of any two terms equidistant from the beginning and the end is constant. [উদা. 10 দেখ।]

সমান্তর মধ্যক

116. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীতে তিনটি পদ থাকে, তবে মধ্যবর্তী পদটিকে প্রথম ও তৃতীয়ের **সমান্তর মধ্যক** (Arithmetic mean) বা সংক্ষেপে A. M.) বলে। যথা, 3, 5, 7 এই সমান্তর শ্রেণীর 5 কে 3 ও 7 এর সমান্তর মধ্যক বলে।

যদি কোন সমান্তর শ্রেণীতে তিনের অধিক পদ থাকে, তবে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের সমান্তর মধ্যক বলে। যথা, 1, 4, 7, 10, 13 এই সমান্তর শ্রেণীর 4, 7 ও 10 কে 1 ও 13 এর সমান্তর মধ্যক বলে।

117. সমান্তর মধ্যক নির্ণয়।

(*i*) মনে কর, a এবং bর সমান্তর মধ্যকটি নির্ণয় করিতে হইবে। সমান্তর মধ্যকটি যেন x. তাহা হইলে a, x, b একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\therefore$ $x-a=b-x$; কারণ, প্রত্যেক পক্ষ সাধারণ অন্তরের সমান।

বা, $2x=a+b$ $\quad\therefore$ $x=\frac{1}{2}(a+b)$

$\therefore$ a ও bর সমান্তর মধ্যক $=\frac{1}{2}(a+b)$.

মন্তব্য। দুইটি রাশির যোগফলের অর্ধেক লইলে, রাশিদ্বয়ের সমান্তর মধ্যক পাওয়া যায়।

(*ii*) মনে কর, a এবং bর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে। সমান্তর মধ্যকগুলি যেন $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n$. তাহা হইলে,

$a, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n, b$ একটি সমান্তর শ্রেণী, যাহার পদসংখ্যা $n+2$, প্রথম পদ a এবং শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ b. মনে কর, শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর d. তাহা হইলে,

$\therefore$ $a+(n+2-1)d=t_{n+2}$ বা, $a+(n+1)d=b$

বা, $(n+1)d=b-a \quad \therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}$

$\therefore \quad x_1=a+d=a+\frac{b-a}{n+1}, \ x_2=a+2d=a+\frac{2(b-a)}{n+1}, \ \cdots,$

$x_{n-1}=a+(n-1)d=a+\frac{(n-1)(b-a)}{n+1}, \ x_n=a+nd=a+\frac{n(b-a)}{n+1}.$

উদা. 1. Find the arithmetic mean between -5 and 17.

সমান্তর মধ্যকটি যেন x. তাহা হইলে, $-5, x, 17$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\therefore \quad x-(-5)=17-x$ বা, $x+5=17-x$

বা, $2x=12 \quad \therefore \quad x=6 \quad \therefore$ সমান্তর মধ্যকটি 6.

উদা. 2. Find the 4 arithmetic means between 4 and 324.

4 ও 324 এর মধ্যে 4টি সমান্তর মধ্যক সংস্থাপন করিলে 6টি পদবিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে, যাহার প্রথম পদ 4 এবং ষষ্ঠ পদ 324. মনে কর, সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

$4+5b=t_6$ বা, $4+5b=324$ বা, $5b=320 \quad \therefore \ b=64.$

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $=4+b=4+64=68$, দ্বিতীয় মধ্যক $=68+64=132$,

তৃতীয় মধ্যক $=132+64=196$ এবং চতুর্থ মধ্যক $=196+64=260$.

উদা. 3. There are n arithmetic means between 1 and 40, such that the third mean : eighth mean $=2:5$; find n.

1 এবং 40 এর মধ্যে n সংখ্যক সমান্তর মধ্যক সংস্থাপন করিলে $(n+2)$ সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে, যাহার প্রথম পদ 1 এবং $(n+2)$-তম পদ 40. মনে কর, সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

$1+(n+2-1)b=t_{n+2}=40$ বা, $(n+1)b=39 \quad \cdots \quad (1)$

আবার, তৃতীয় মধ্যক $=t_4=1+3b$ এবং অষ্টম মধ্যক $=t_9=1+8b$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\frac{1+3b}{1+8b}=\frac{2}{5}$ বা, $2+16b=5+15b \quad \therefore \ b=3$

$\therefore$ (1) হইতে, $(n+1)\times 3=39$ বা, $3n=36 \quad \therefore \ n=12.$

Exercise 53

Find the arithmetic mean between :

1. 3 and 7. **2.** -8 and 10. **3.** a and b.

4. $a+b$ and $a-b$. **5.** $(x+y)^2$ and $(x-y)^2$.

6. Insert 4 arithmetic means between 3 and 28.

7. Insert 7 arithmetic means between 1 and 41. (C. U. 1914)

8. Insert 10 arithmetic means between -4 and $12\frac{1}{2}$.

9. There are n arithmetic means between 5 and 29, and the last mean is 3 times the 2nd mean. Find the number of means.

10. There are n arithmetic means between 10 and 52, such that the 2nd mean : 10th mean $= 2:5$. Find n.

118. সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়।

মনে কর, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, শেষ পদ l, সাধারণ অন্তর b, পদসংখ্যা n এবং ঐ nসংখ্যক পদের যোগফল S_n. তাহা হইলে,

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (l-b) + l$$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া, $S_n = l + (l-b) + (l-2b) + \cdots + (a+b) + a$

যোগ করিয়া, $2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l)$

$= n$ সংখ্যক $(a+l) = n(a+l)$

$$\therefore\ \mathbf{S_n = \frac{n}{2}(a+l)} \quad \cdots \quad (1)$$

$\therefore$ কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদের যোগফলের অর্ধেককে পদসংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে সমান্তর শ্রেণীটির যোগফল পাওয়া যায়।

আবার, $\because\ l = n$-তম পদ $= a + (n-1)b$;

$\therefore$ (1) হইতে, $S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)b\}$

$$\text{বা,}\ \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}} \quad \cdots \quad (2)$$

মন্তব্য। কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদ জানা থাকিলে সূত্র (1) এবং অন্যান্য স্থলে সূত্র (2) অবলম্বন করিয়া শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করিবে।

উদা. 1. Sum to 16 terms : $3+5+7+\cdots$.

এস্থলে, প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b = 5-3 = 2$ এবং পদসংখ্যা $n = 16$;

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} = \frac{16}{2}\{2.3+(16-1)2\}$

$= 8 \times 36 = 288.$

অথবা, শেষ পদ $l = a+(n-1)b = 3+(16-1)2 = 33$;

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= \frac{n}{2}(a+l) = \frac{16}{2}(3+33) = 8 \times 36 = 288.$

উদা. 2. Find the sum of $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots$ to 20 terms. (C. U. 1881)

নির্ণেয় যোগফল $= (3+8+13+\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত)

$+(4+9+14+\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{10}{2}\{2.3+(10-1)5\} + \frac{10}{2}\{2.4+(10-1)5\}$

$= 5 \times 51 + 5 \times 53 = 520.$

উদা. 3. Sum to n terms : $(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots$.

প্রথম পদের পদসংখ্যা 1, দ্বিতীয় পদের 2, তৃতীয় পদের 3,$\cdots$, n-তম পদের n.

এখন, n সংখ্যক পদের বন্ধনীগুলি তুলিয়া দিলে প্রদত্ত রাশিমালাটি হইবে,

$1+2+3+4+5+6+\cdots$, যাহার প্রথম পদ 1, সাধারণ অন্তর 1 এবং পদসংখ্যা $1+2+3+\cdots+n$ বা $\frac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় যোগফল} = \frac{n(n+1)}{2.2}\left[2 \times 1 + \left\{\frac{n(n+1)}{2} - 1\right\} \times 1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{4+n^2+n-2}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$

উদা. 4. Find the sum of $2+5+8+\cdots+50$.

এস্থলে, প্রথম পদ $a=2$, সাধারণ অন্তর $b=5-2=3$. $\therefore$ পদসংখ্যা n হইলে,

$a+(n-1)b = n$-তম পদ বা শেষ পদ l.

বা, $2+(n-1)3 = 50$ বা, $3n = 51$ $\therefore$ $n = 17$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= \frac{n}{2}(a+l) = \frac{17}{2}(2+50) = 17 \times 26 = 442.$

অথবা, নির্ণেয় যোগফল $= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} = \frac{17}{2}\{2.2+(17-1).3\}$

$= \frac{17}{2} \times 52 = 17 \times 26 = 442.$

উদা. 5. Find, without assuming any formula, the sum of the first n terms of the series 1, 3, 5, $\cdots$. (C. U. 1911)

এস্থলে, প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তর $= 3 - 1 = 2$

$\therefore$ n-তম পদ $= 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$

$\therefore$ যোগফল $= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1)$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া, যোগফল $= (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 5 + 3 + 1$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2 \times$ যোগফল $= 2n + 2n + 2n + \cdots + 2n + 2n + 2n$

$= 2n \times n = 2n^2$ $\therefore$ যোগফল $= n^2$.

উদা. 6. Find, without assuming any formula, the sum of $1 + 4 + 7 + \cdots + 37$. (C. U. 1919)

মনে মনে হিসাব করিয়া দেখা গেল, পদসংখ্যা $= 13$.

এখন, যোগফল $= 1 + 4 + 7 + \cdots + 31 + 34 + 37$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া, যোগফল $= 37 + 34 + 31 + \cdots + 7 + 4 + 1$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2 \times$ যোগফল $= 38 + 38 + 38 + \cdots + 38 + 38 + 38$

$= 38 \times 13$

$\therefore$ যোগফল $= \frac{1}{2}(38 \times 13) = 19 \times 13 = 247$.

উদা. 7. Find the sum of all the multiples of 13 between 750 and 1000. (C.U. 1935)

13 এর ক্রমিক গুণিতকগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী এবং উহার সাধারণ অন্তর $b = 13$. এখন, 750 কে 13 দিয়া ভাগ করিলে ভাগশেষ থাকে 9 ; সুতরাং সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $a = 750 + (13 - 9) = 754$. আবার, 1000 কে 13 দিয়া ভাগ করিলে ভাগশেষ থাকে 12 ; সুতরাং সমান্তর শ্রেণীটির শেষ পদ $l = 1000 - 12 = 988$.

আবার, পদসংখ্যা n হইলে, $a + (n-1)b =$ শেষ পদ

বা, $754 + (n-1) \times 13 = 988$ বা, $13n = 247$ $\therefore$ $n = 19$

$\therefore$ যোগফল $= \frac{n}{2}(a + l) = \frac{19}{2}(754 + 988) = 19 \times 871 = 16549$.

উদা. 8. Find the sum of 25 consecutive odd numbers of which the last term is 83.

শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর 2 ; সুতরাং শ্রেণীটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে হইবে, 83, 81, 79, $\cdots$; যাহার প্রথম পদ 83, সাধারণ অন্তর -2 এবং পদসংখ্যা 25.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= \frac{25}{2}\{2.83 + (25-1)(-2)\} = \frac{25}{2} \times 118 = 1475.$

উদা. 9. The pth term of an A. P. is a and the qth term is b. Show that the sum to $(p+q)$ terms is $\frac{1}{2}(p+q)\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$.

(M. U. 1887)

মনে কর, প্রথম পদ $= c$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$. তাহা হইলে,

$c+(p-1)d = a \cdots (1)$ এবং $c+(q-1)d = b \cdots (2)$

$\therefore$ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $(p-q)d = a-b$ $\therefore$ $d = \frac{a-b}{p-q} \cdots (3)$

এবং (1) ও (2) যোগ করিয়া, $2c+(p+q-2)d = a+b \cdots (4)$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= \frac{1}{2}(p+q)\{2c+(p+q-1)d\}$

$= \frac{1}{2}(p+q)\{2c+(p+q-2)d+d\}$

$= \frac{1}{2}(p+q)\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}$. [(4) ও (3) হইতে]

Exercise 54

Find the sum of :

1. $1+3+5+\cdots$ to 10 terms.
2. $-5-2+1+\cdots$ to 18 terms.
3. $1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+0-\cdots$ to 25 terms.
4. $1+5+9+\cdots$ to n terms.
5. $4+8+4+8+7+13+\cdots$ to 27 terms.
6. $(1)+(2+3)+(4+5+6)+\cdots$ to n terms. [উদা. 2 দেখ।]
7. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots$ to $(n+1)$ terms.
8. $1+\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots$ to n terms.
9. $(a-b)^2+(a^2+b^2)+(a+b)^2+\cdots$ to n terms.
10. $(x+y)^2+(x^2+y^2)+(x-y)^2+\cdots$ to $(n+1)$ terms.
11. $2+5+8+\cdots+152.$ (C. U. 1948)
12. $-13-8-3+\cdots+182.$ (D. B. 1938)

Find, without assuming any formula, the sum of :

13. $1+3+5+\cdots$ to 30 terms. (C. U. 1916)
14. $4+7+10+\cdots$ to 112 terms. (D. B. 1944)
15. $1+4+7+\cdots+37.$ (C. U. 1919)

16. Find the sum of 20 consecutive odd numbers of which the last term is 85.

17. Find the sum of 25 consecutive even numbers of which the last term is 92.

18. Show that the sum of n terms of the series 4, 12, 20, 28,⋯ is the square of an even number. (C. U. 1927, '39)

19. Find the sum of all the multiples of 9 between 400 and 700.

20. Find the sum of all the multiples of 13 between 500 and 850.

21. The first term of an A. P. is 3 and the second term is 1. Find the 10th term and the sum of the first 10 terms. (C. U. 1913)

22. Find the sum of 15 terms of the series 13, 11, 9,⋯ beginning from the 8th term.

23. The pth term of an A. P. is a and the qth term is b. Show that the sum to $(p+q)$ terms is $\frac{1}{2}(p+q)\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$. (M. U. 1887)

119. সূত্রের প্রয়োগ।

$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$ এবং $S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$ এই সূত্রদ্বয়ের প্রত্যেকটিতে চারিটি অজ্ঞাত রাশি রহিয়াছে। সূত্রদ্বয়ের যে কোনটির তিনটি অজ্ঞাত রাশি জানা থাকিলে চতুর্থটি নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. The first term of an A. P. is 10 and the last term is -4. If the sum is 24, find the common difference.

এস্থলে প্রথম পদ $a=10$ শেষ পদ $l=-4$ এবং যোগফল $=24$;

$\therefore$ পদসংখ্যা n হইলে, সূত্র $\frac{n}{2}(a+l)=S_n$ হইতে,

$$\frac{n}{2}(10-4)=24 \quad \text{বা, } 3n=24 \quad \therefore n=8$$

$\therefore$ সাধারণ অন্তর b হইলে, সূত্র $a+(n-1)b=l(=t_n)$ হইতে,

$10+(8-1)b=-4$ বা, $7b=-14$ $\therefore$ b বা সাধারণ অন্তর $=-2$.

উদা. 2. How many terms of the series $-5, -3, -1, 1,\cdots$ must be taken to make the sum 40 ?

প্রথম পদ $a=-5$, সাধারণ অন্তর $b=-3-(-5)=2$ এবং যোগফল $S=40$;

সুতরাং নির্ণেয় পদসংখ্যা n হইলে, সূত্র $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=S_n$ হইতে,

$\frac{n}{2}\{2\times(-5)+(n-1)\times 2\}=40$ বা, $n(-5+n-1)=40$

বা, $n^2-6n-40=0$ বা, $(n-10)(n+4)=0$

$\therefore\ n=10$ বা -4.

কিন্তু পদসংখ্যা ঋণাত্মক সংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইতে পারে না। $\therefore$ n এর মান -4 হইতে পারে না। $\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $=10$.

উদা. 3. The sum of n terms of the series 12, 10, 8, ··· is 36. Find n and explain the double answer.

এস্থলে প্রথম পদ $a=12$, সাধারণ অন্তর $b=10-12=-2$ এবং যোগফল $S_n=36$; সুতরাং সূত্র $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}=S_n$ হইতে,

$\frac{n}{2}\{2.12+(n-1).(-2)\}=36$ বা, $n\{12-(n-1)\}=36$

বা, $-n^2+13n=36$ বা, $n^2-13n+36=0$

বা, $(n-4)(n-9)=0$ $\therefore$ $n=4$ বা 9.

$\therefore$ পদসংখ্যা 4 এবং 9 উভয়ই হইতে পারে ; কারণ, শ্রেণীটির 9টি পদ 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4 এবং উহাদের প্রথম 4টি পদের যোগফল 36 এবং 9টি পদেরও যোগফল 36, কারণ শেষের 5টি পদের যোগফল 0.

উদা. 4. The sum of n terms of an A. P. is 40, the common difference is 2 and the last term is 13. Find n. (C. U. 1946)

এস্থলে সাধারণ অন্তর $b=2$; সুতরাং প্রথম পদ a হইলে,

$a+(n-1)b=n$-তম পদ (বা শেষ পদ) বা, $a+(n-1)2=13$

$\therefore\ a=13-2n+2=15-2n$.

আবার, শেষ পদ $l=13$; সুতরাং যোগফল S_n হইলে,

সূত্র $\frac{n}{2}(a+l)=S_n$ হইতে, $\frac{n}{2}(15-2n+13)=40$

বা, $n(14-n)=40$ বা, $n^2-14n+40=0$

বা, $(n-4)(n-10)=0$ $\therefore$ $n=4$ বা 10

$\therefore$ পদসংখ্যা 4 এবং 10 উভয়ই হইতে পারে।

উদা. 5. The 8th term of a series in A. P. is 28. Find the sum to 15 terms.

মনে কর, প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

$a+(8-1)b=28$ বা, $a+7b=28$.

$\therefore$ 15টি পদের যোগফল $= \frac{15}{2}\{2a+(15-1)b\}$

$$= 15(a+7b) = 15 \times 23 = 345.$$

উদা. 6. The sum of m terms of an A. P. is n and that of n terms is m. Prove that the sum of $(m+n)$ terms is $-(m+n)$.

(C. U. 1950)

প্রদত্ত শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে,

$(m+n)$ সংখ্যক পদের যোগফল $= \frac{m+n}{2}\{2a+(m+n-1)b\}$ $\cdots$ (1)

এখন $2a+(m+n-1)b$ এর মান নির্ণয় করিয়া লও।

সর্তানুসারে, $n = \frac{m}{2}\{2a+(m-1)b\}$ বা, $2n = 2am + m(m-1)b$ $\cdots$ (2)

এবং $m = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$ বা, $2m = 2an + n(n-1)b$ $\cdots$ (3)

$\therefore$ (2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$2(n-m) = 2a(m-n) + \{(m^2-n^2)-(m-n)\}b$$

$$\therefore \quad -2 = 2a + (m+n-1)b$$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় যোগফল $= \frac{m+n}{2} \times (-2) = -(m+n)$.

মন্তব্য। প্রথমে a এবং b নির্ণয় করিয়া 118 অনুচ্ছেদের সূত্র (2) এর সাহায্যে প্রশ্নটি সমাধান করা চলে।

উদা. 7. The sum of p terms of an A. P. is equal to that of its q terms. Show that the sum of $(p+q)$ terms is 0.

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

p সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{1}{2}p\{2a+(p-1)b\}$

এবং q সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{1}{2}q\{2a+(q-1)b\}$

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{1}{2}p\{2a+(p-1)b\} = \frac{1}{2}q\{2a+(q-1)b\}$

বা, $p\{2a+(p-1)b\} = q\{2a+(q-1)b\}$

বা, $2a(p-q) + \{(p^2-q^2)-(p-q)\}b = 0$

$$\therefore \quad 2a + (p+q-1)b = 0$$

$\therefore$ $(p+q)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{1}{2}(p+q)\{2a+(p+q-1)b\}$

$$= \frac{1}{2}(p+q) \times 0 = 0.$$

Exercise 55

1. The common difference of an A. P. is -3 and the number of terms is 12. If the sum is -102, find the first term.

2. The first term of an A. P. is 1 and the number of terms is 20. If the sum is 400, find the last term.

3. The first term of an A. P. is 5 and the number of terms is 20. If the sum is 670, find the common difference.

4. The first term of an A. P. is 9 and the last term is 96. If the sum is 1575, find the common difference. (D. B. 1932)

5. How many terms must be taken of the series 2, 8, 14, ⋯ to make the sum 352 ? (C. U. 1949)

6. Find the number of terms of the series 17, 5, -7, ⋯ whose sum is -78. (D. B. 1931)

7. The first two terms of an A. P. are $1\frac{1}{2}$ and $2\frac{1}{3}$. How many terms of the series must be taken to give the sum 171 ?

8. How many terms of the series 15, 13, 11,⋯ must be taken to make the sum 55 ? Explain the double answer.

9. How many terms of the series 24, 20, 16, ⋯ must be taken to make the sum 72 ? Explain the double answer.

10. The sum of a certain number of terms of the A. P. 21, 19, 17, ⋯ is 120. Find the last term and the number of terms.

11. The sum to n terms of an A. P. is 51. If the common difference is 3 and the last term is 18, find n. Explain the double answer.

12. The 7th term of an A. P. is 19. Find the sum to 13 terms.

13. The 13th term of an A. P. is 27. Find the sum to 25 terms.

14. The sum of 5 terms of an A. P. is 40 and that of 8 terms is 100. Find the sum of 15 terms.

[প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় করিয়া কষ।]

15. The sum of p terms of an A. P. is q and that of q terms is p. Find the sum of $(p+q)$ terms.

16. The sum of p terms of an A. P. is equal to that of its q terms. Find the sum of $(p+q)$ terms.

120. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. The sum to n terms of an A. P. is $5n^2+7n$. Find the first term and the common difference. (C. U. 1941)

n এর স্থলে যথাক্রমে 1 এবং 2 লিখিয়া,

প্রথম পদ পর্যন্ত সমষ্টি বা প্রথম পদ $= 5.1^2+7.1 = 12$

এবং দ্বিতীয় পদ পর্যন্ত সমষ্টি $= 5.2^2+7.2 = 34$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ = দ্বিতীয় পদ পর্যন্ত সমষ্টি − প্রথম পদ

$= 34 - 12 = 22.$

$\therefore$ প্রথম পদ $= 12$ এবং সাধারণ অন্তর $= 22 - 12 = 10.$

উদা. 2. The sum of three numbers in A. P. is 15 and their product is 105. Find the numbers.

সংখ্যা তিনটি যেন $a-b, a, a+b$. তাহা হইলে,

প্রথম সর্তানুসারে, $a-b+a+a+b=15$ বা, $3a=15$ $\therefore$ $a=5$

এবং দ্বিতীয় সর্তানুসারে, $(a-b)a(a+b)=105$ বা, $a(a^2-b^2)=105$

বা, $5(5^2-b^2)=105$ বা, $5^2-b^2=21$ বা, $b^2=4$ $\therefore$ $b \pm 2$

$\therefore$ $a=5$ এবং $b=2$ ধরিয়া, সংখ্যাত্রয় $5-2, 5, 5+2$ অর্থাৎ 3, 5, 7.

$a=5$ এবং $b=-2$ ধরিয়া, সংখ্যাত্রয় $5+2, 5, 5-2$ অর্থাৎ 7, 5, 3.

মন্তব্য। পদসংখ্যা বিযুগ্ম হইলে মধ্য পদটিকে a ধরিবে এবং সাধারণ অন্তর b ধরিয়া উভয় পার্শ্বের পদগুলি লিখিবে। পদসংখ্যা যুগ্ম হইলে মাঝের পদ দুইটিকে যথাক্রমে $a-b$ ও $a+b$ ধরিবে এবং সাধারণ অন্তর $2b$ ধরিয়া উভয় পার্শ্বের পদগুলি লিখিবে।

উদা. 3. Divide 225 into three parts which are in A. P. and are such that the product of the first two parts is 5250.

অংশত্রয় যেন যথাক্রমে $a-b, a, a+b$. তাহা হইলে,

প্রথম সর্তানুসারে, $a-b+a+a+b=225$ বা, $3a=225$ $\therefore$ $a=75$

এবং দ্বিতীয় সর্তানুসারে, $(a-b)a=5250$ বা, $(75-b)75=5250$

বা, $75-b=70$ $\therefore$ $b=5$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশত্রয় $=70, 75, 80$.

উদা. 4. Four numbers are in A. P. The sum of the extremes is 10, and the product of the means is 24. Find the numbers. (C. U. 1943)

সংখ্যাগুলি যেন, $a-3b,\ a-b,\ a+b,\ a+3b$.

$\therefore$ প্রথম সর্ত হইতে, $a-3b+a+3b=10$ বা, $2a=10$ $\therefore$ $a=5$

এবং দ্বিতীয় সর্ত হইতে, $a^2-b^2=24$ বা, $25-b^2=24$ $\therefore$ $b=\pm 1$

$\therefore$ $a=5$ এবং $b=1$ ধরিয়া, সংখ্যাগুলি 2, 4, 6, 8

এবং $a=5$ এবং $b=-1$ ধরিয়া, সংখ্যাগুলি 8, 6, 4, 2.

উদা. 5. Show that the sum of the latter half of $2n$ terms of any series in A. P. is equal to one-third the sum of $3n$ terms of the same series. (C. U. 1876)

মনে কর, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

$$\therefore\quad S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} \text{ এবং } S_{2n}=n\{2a+(2n-1)b\}$$

$\therefore$ $2n$ সংখ্যক পদের শেষ n পদের সমষ্টি $=S_{2n}-S_n$

$$=n\{2a+(2n-1)b\}-\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$$

$$=\frac{n}{2}(4a+4bn-2b-2a-bn+b)$$

$$=\frac{n}{2}(2a+3bn-b)=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}$$

আবার, $\frac{1}{3}\times S_{3n}=\frac{1}{3}\times\frac{3n}{2}\{2a+(3n-1)b\}=\frac{n}{2}\{2a+(3n-1)b\}$

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

উদা. 6. If in an A. P. $t_3 : t_7 = 2 : 5$, find the value of $t_5 : t_9$.

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

∴ সর্ত হইতে, $\frac{a+2b}{a+6b} = \frac{2}{5}$ বা, $5a + 10b = 2a + 12b$

বা, $3a = 2b$ ∴ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{t_5}{t_9} = \frac{a+4b}{a+8b} = \frac{a/b+4}{a/b+8} = \frac{\frac{2}{3}+4}{\frac{2}{3}+8} = \frac{(\frac{2}{3}+4)\times 3}{(\frac{2}{3}+8)\times 3} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

∴ নির্ণেয় অনুপাত $= 7 : 13$

উদা. 7. The sums of n terms of two series in A. P. are in the ratio of $n+2 : 2n+1$. Find the ratio of their 4th terms.

মনে কর, শ্রেণীদ্বয়ের প্রথম পদ যথাক্রমে a ও a এবং সাধারণ অন্তর b ও β. উহাদের 4-তম পদদ্বয়ের অনুপাত অর্থাৎ $\frac{a+3b}{a+3\beta}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

সর্তানুসারে, $\frac{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}}{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)\beta\}} = \frac{n+2}{2n+1}$ বা, $\frac{2a+(n-1)b}{2a+(n-1)\beta} = \frac{n+2}{2n+1}$

∴ $n = 7$ ধরিয়া, $\frac{2a+6b}{2a+6\beta} = \frac{9}{15}$ ∴ $\frac{b+3b}{a+3\beta} = \frac{3}{5}$

∴ নির্ণেয় অনুপাত $= 3 : 5$.

উদা. 8. Show that the ratio of the sum of m arithmetic means to the sum of n arithmetic means inserted between any two numbers is $m : n$.

সংখ্যা দুইটি যেন a এবং b. উহাদের মধ্যে m সংখ্যক মধ্যক সংস্থাপন করিলে $(m+2)$ সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটি সমান্তর শ্রেণী উৎপন্ন হইবে, যাহার প্রথম পদ a এবং শেষ পদ b.

∴ উৎপন্ন সমান্তর শ্রেণীটির যোগফল $= \frac{m+2}{2}(a+b)$

∴ ঐ m সংখ্যক মধ্যকের যোগফল $= \frac{m+2}{2}(a+b) - (a+b)$

$$= \left(\frac{m+2}{2} - 1\right)(a+b) = \frac{m}{2}(a+b).$$

তদ্রূপ, n সংখ্যক মধ্যকের যোগফল $=\frac{n}{2}(a+b)$.

$\therefore$ m সংখ্যক মধ্যকের যোগফল : n-সংখ্যক মধ্যকের যোগফল

$$=\frac{m}{2}(a+b) : \frac{n}{2}(a+b)=m : n.$$

উদা. 9. If a, b, c are in A. P., prove that $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ are in A. P.

সাধারণ নিয়মে : $\because$ a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী, $\therefore$ $b-a=c-b$.

এখন, $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

যদি, $\frac{1}{ca}-\frac{1}{bc}=\frac{1}{ab}-\frac{1}{ca}$

বা, $\frac{b-a}{abc}=\frac{c-b}{abc}$ বা, $b-a=c-b$

কিন্তু সর্তানুসারে ইহারা পরস্পর সমান দেখান হইয়াছে।

$\therefore$ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

কৌশলে : $\because$ a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ $\frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}$ একটি সমান্তর শ্রেণী [অনু. 113 (2)]

$\therefore$ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 10. If a^2, b^2, c^2 are in A. P., prove that $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ are also in A. P. (C. U. 1910, '38 ; D. B. 1945 ; G. U. 1950)

সাধারণ নিয়মে : $\because$ a^2, b^2, c^2 একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ $b^2-a^2=c^2-b^2$.

এখন, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

যদি $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$

বা, $\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$ বা, $\frac{a-b}{b+c}=\frac{b-c}{a+b}$

বা, $a^2-b^2=b^2-c^2$ বা, $b^2-a^2=c^2-b^2$;

কিন্তু প্রদত্ত সর্তানুসারে ইহারা পরস্পর সমান দেখান হইয়াছে।

$\therefore$ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

কৌশলে : $\because$ a^2, b^2, c^2 একটি সমান্তর শ্রেণী ;

$\therefore$ $a^2+ab+bc+ca,\ b^2+bc+ca+ab,\ c^2+ca+ab+bc$ একটি সমান্তর শ্রেণী [অনু. 113 (1)] ;

$\therefore$ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া,

$(a+b)(c+a),\ (b+c)(a+b),\ (c+a)(b+c)$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

$\therefore$ প্রত্যেক পদকে $(a+b)(b+c)(c+a)$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী [অনু. 113 (2)]

উদা. 11. If $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ are in A. P. and $a+b+c\neq 0$, then

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ are in A. P.

কৌশলে : প্রদত্ত সমান্তর শ্রেণীটির প্রত্যেক পদের সহিত 1 যোগ করিয়া,

$\frac{a+b+c}{b+c}, \frac{a+b+c}{c+a}, \frac{a+b+c}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী [অনু. 113 (1)]

$\therefore$ প্রত্যেক পদকে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী [অনু. 113 (2)]।

উদা. 12. If $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ are in A. P., then $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ are in A. P.

কৌশলে : $\because$ $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ $b^2-2bc+c^2,\ c^2-2ca+a^2,\ a^2-2ab+b^2$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

∴ প্রত্যেক পদের সহিত $-a^2-b^2-c^2+bc+ca+ab$ যোগ করিয়া,

$-a^2-bc+ca+ab,\ \ -b^2+bc-ca+ab,\ \ -c^2+bc+ca-ab$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

∴ $(a-b)(c-a), (b-c)(a-b), (c-a)(b-c)$ একটি সমান্তর শ্রেণী,

∴ $\dfrac{1}{b-c}, \dfrac{1}{c-a}, \dfrac{1}{a-b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 13. If a, b and c be respectively the pth, qth and rth terms of an A. P., prove that $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

(C. U. 1932, '37 '46)

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ α এবং সাধারণ অন্তর β. তাহা হইলে,

$$a=\alpha+(p-1)\beta,\ b=\alpha+(q-1)\beta,\ c=\alpha+(r-1)\beta$$

$$\therefore\ a(q-r)=(q-r)\alpha+(p-1)(q-r)\beta,$$

$$b(r-p)=(r-p)\alpha+(q-1)(r-p)\beta,$$

$$c(p-q)=(p-q)\alpha+(r-1)(p-q)\beta.$$

∴ যোগ করিয়া, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=(q-r+r-p+p-q)\alpha$

$$+\{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)\}\beta-(q-r+r-p+p-q)\beta$$

$$=0.\alpha+0.\beta-0.\beta=0.$$

উদা. 14. If a, b, c be respectively the sums of p, q and r terms of an A. P., prove that $\dfrac{a}{p}(q-r)+\dfrac{b}{q}(r-p)+\dfrac{c}{r}(p-q)=0$.

(C. U. 1945 ; D. B. 1943, '45 ; G. U. 1949, '51)

মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ α এবং সাধারণ অন্তর β.

∴ সর্ত হইতে, $a=\frac{1}{2}p\{2\alpha+(p-1)\beta\}$ ∴ $\dfrac{a}{p}=\alpha+\frac{1}{2}(p-1)\beta$ ··· (1)

$b=\frac{1}{2}q\{2\alpha+(q-1)\beta\}$ ∴ $\dfrac{b}{q}=\alpha+\frac{1}{2}(q-1)\beta$ ··· (2)

$c=\frac{1}{2}r\{2\alpha+(r-1)\beta\}$ ∴ $\dfrac{c}{r}=\alpha+\frac{1}{2}(r-1)\beta$ ··· (3)

$$\therefore\quad \frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=(q-r+r-p+p-q)\alpha$$
$$+\tfrac{1}{2}\{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)\}\beta-\tfrac{1}{2}(q-r+r-p+p-q)\beta$$
$$=0.\alpha+0.\beta-0.\beta=0.$$

উদা. 15. The interior angles of a rectilineal figure are in A. P. If the smallest angle is 95° and the common difference 10°, find the number of sides.

সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ 95° এবং সাধারণ অন্তর 10°; সুতরাং কোণসংখ্যা বা বাহুসংখ্যা n হইলে, কোণসমষ্টি $=\frac{n}{2}\{2\times 95^\circ+(n-1)10^\circ\}$

আবার, জ্যামিতিক নিয়মে ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণসমষ্টি
$=(2n-4)$ সমকোণ $=(2n-4)\times 90^\circ$;

$$\therefore\quad \frac{n}{2}\{2\times 95^\circ+(n-1)\times 10^\circ\}=(2n-4)\times 90^\circ$$

বা, $95n+5n^2-5n=180n-360$ বা, $5n^2-90n+360=0$

বা, $n^2-18n+72=0$ বা, $(n-6)(n-12)=0$ $\therefore$ $n=6$ বা 12

$\therefore$ ক্ষেত্রটির বাহুসংখ্যা $=6$ বা 12.

Exercise 56

1. The sum of n terms of an A. P. is n^2. Find the first term and the common difference. (G. U. 1948)

2. The sum of n terms of a series in A. P. is $5n^2-3n$. Find the series and the rth term.

3. If the nth term of a series is $a+nb$, show that the series is in A. P.

4. If the sum to n terms of a series is an^2+bn, show that the series is in A. P.

5. Find the sum of n terms whose nth term is $2n-1$. (D. B. 1946)

6. If a, b, c are in A. P., show that $ab+bc=2b^2$.

[$\because$ $b-a=c-b$, $\therefore$ $a+c=2b$, $\therefore$ $(a+c)b=2b.b$, ইত্যাদি।]

7. The sum of three numbers in A. P. is 18 and their product is 120. Find the numbers.

8. Divide 24 into three parts which are in A. P. and are such that the product of the first two parts is 40.

9. The sum of three numbers in A. P. is 30 and the sum of the squares of the extremes is 208. Find the numbers.

10. Four numbers are in A. P. The sum of the extremes is 12, and the product of the means is 35. Find the numbers.

11. Divide 40 into five parts which are in A. P. and are such that the product of the means is 440.

12. Show that the middle term of a series in A. P., consisting of an odd number of terms is equal to half the sum of the first and last terms.

[পদসংখ্যা $= 2n+1$ হইলে, মধ্য পদ $= (n+1)$-তম পদ এবং শেষ পদ $= (2n+1)$-তম পদ। এখন, প্রথম পদকে a এবং সাধারণ অন্তরকে b ধরিয়া কর।]

13. Show that the sum of the two middle terms of an A. P., consisting of an *even* number of terms is equal to the sum of the first and last terms.

[পদসংখ্যা $= 2n$ হইলে, মধ্য পদদ্বয় $= n$-তম ও $(n+1)$-তম পদ।]

14. Show that the sum of a series in A. P., consisting of an *odd* number of terms is equal to the product of the middle term and the number of terms of the series.

15. Show that the sum of the latter half of $2n$ terms of any series in A. P. is equal to one-third the sum of $3n$ terms of the same series. (C. U. 1876)

16. If s_1, s_2, s_3 be the sums of n terms of three series in A. P. whose first terms are the same (say 1) and whose common differences are in A. P. (say 1, 2, 3), show that s_1, s_2, s_3 are in A. P. *i.e.* $s_1 + s_3 = 2s_2$.

17. If a, b, c are in A. P., show that

$$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b) = 4abc. \qquad \text{(D. B. 1935)}$$

[$\because$ $b-a=c-b$, $\therefore$ $2b=c+a$, $\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির বামপার্শ্বে $2b$র জন্য $c+a$ এবং $c+a$ এর জন্য $2b$ বসাইয়া কর।]

18. If in an A. P., $t_4 : t_8 = 3 : 8$, find the value of $t_6 : t_{10}$.

19. The sums of n terms of two series in A. P. are in the ratio of $2n-1 : 2n+1$. Find the ratio of their fifth terms.

20. Show that the ratio of the sum of m arithmetic means to the sum of n arithmetic means inserted between any two numbers is $m : n$.

21. If a, b, c are in A. P., then

(i) $b+c,\ c+a,\ a+b$ are in A. P.

(ii) $b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$ are in A. P.

(iii) $(b+c)^2-a^2,\ (c+a)^2-b^2,\ (a+b)^2-c^2$ are in A. P. $(a+b+c \neq 0)$.

(iv) $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ are in A. P.

22. If a^2, b^2, c^2 are in A. P., then

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b} \text{ are in A. P.}$$

23. If $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ are in A. P., and $a+b+c \neq 0$,

then $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ are in A. P. [উদা. 11]

24. If $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ are in A. P., and $a+b+c \neq 0$,

then $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ are in A. P. [প্রশ্ন 23 এর ন্যায় কর।]

25. If $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ are in A. P., then

$$\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b} \text{ are in A. P.}$$

26. If the roots of the equation $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ be equal, then a, b, c are in A. P.

[শর্ত হইতে, $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

বা, $a^2+4b^2+c^2-4bc+2ca-4ab=0$

বা, $(a-2b+c)^2=0$ বা, $\pm(a-2b+c)=0$, ইত্যাদি ।]

27. If the pth term of an A. P. is $1/q$ and the qth term is $1/p$, then the sum of pq terms is $\frac{1}{2}(pq+1)$.

[প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে, $a=b=1/pq$ নির্ণয় করিয়া কষ ।]

28. If a, b and c be respectively the pth, qth and rth terms of an A. P., prove that $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

(C. U. 1932, '37, '46)

29. If a, b and c be respectively the sum of p, q and r terms of an A. P., prove that $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.

(C. U. 1945 ; D. B. 1943, '45 ; G. U. 1949, '51)

30. If a, b and c be respectively the sums of p, q and r terms of an A. P., prove that $aqr(q-r)+brp(r-p)+cpq(p-q)=0$. (C. U. 1945)

[প্রশ্ন 29 কষিয়া pqr দ্বারা গুণ কর ।]

31. Show that $qr(q-r)s_{pm}+rp(r-p)s_{qm}+pq(p-q)s_{rm}=0$.

32. A man undertakes to pay off a debt of Rs. 65 by monthly instalments. He pays Rs. 2 in the first month and continually increases the instalments in every subsequent month by Re. 1. In what time will the debt be cleared up? (C. U. 1930, '50)

33. A man has to travel 162 miles. He goes 30 miles the first day, 27 the second, 24 the third, and so on. How many days does he take for the journey? (D. B. 1924)

34. 100 stones are placed on a straight road, 5 yds. apart. A runner has to start from a basket 5 yds. from the first stone, pick up the stones and bring them back to the basket one by one. How many yards has he to run altogether? (Pat. U. 1919)

35. The interior angles of a polygon are in A. P. If the smallest angle is 84° and the common difference 12°, find the number of sides of the polygon.

স্বাভাবিক সংখ্যাঘটিত যোগফল

121. 1, 2, 3, 4, 5, ··· প্রভৃতি ক্রমিক সংখ্যাগুলিকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** (Natural numbers) বলে। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা (First n natural numbers) বলিলে 1 হইতে n পর্যন্ত ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলিকে বুঝায়।

1. *Sum of the first n natural numbers.*

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n$

$= \frac{n}{2}(1 + n)$ [∵ প্রথম পদ = 1, শেষ পদ = n এবং পদসংখ্যা n.]

$= \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

2. *Sum of the first n odd natural numbers.*

$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= \frac{n}{2}\{2.1 + (n-1).2\}$

$= \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$.

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_n = n^2}.$$

3. *Sum of the first n even natural numbers.*

$S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= 2(1 + 2 + 3 + \cdots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_n = n(n+1)}.$$

4. *Sum of the squares of the first n natural numbers.*

ধর, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

এখন, $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ একটি অভেদ এবং উহাতে n এর স্থলে পর পর 1, 2, 3, ···, n লিখিয়া,

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1$$

যোগ করিয়া, $n^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) - 3(1+2+3+\cdots+n) + n$

$$= 3S_n - \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore \quad 3S_n = n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2} = n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)(n-1+\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

মন্তব্য। (*i*) যোগ করিবার সময় কাটা গিয়া বামপার্শ্বের যোগফল -0^3+n^3 অর্থাৎ n^3 হইয়াছে। (*ii*) n সংখ্যক 1 যোগ করিয়া যোগফল n হইয়াছে।

5. *Sum of the cubes of the first n natural numbers.*

ধর, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

এখন, $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ একটি অভেদ এবং উহাতে n এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া,

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$

$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^3 - 6.n^2 + 4.n - 1$$

যোগ করিয়া, $n^4 = 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) - 6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) + 4(1+2+3+\cdots+n) - n$

$$= 4S_n - 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$\therefore \quad 4S_n = n^4 + n + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$= n(n+1)(n^2-n+1) + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$= n(n+1)(n^2 - n + 1 + 2n + 1 - 2)$$

$$= n(n+1)n(n+1) = n^2(n+1)^2$$

$$\therefore \quad S_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

মন্তব্য। লক্ষ্য কর : $(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$, কারণ প্রত্যেক পার্শ্ব $=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

$\therefore$ n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফলের বর্গ $=$ n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের যোগফল। তদ্রূপ, $(1+2)^2 = 1^3+2^3$, $(1+2+3)^2 = 1^3+2^3+3^3$, ইত্যাদি।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। কোন শ্রেণীর যোগফলকে সম্ভবস্থলে গুণনীয়কে প্রকাশ করিয়া দেখানই প্রচলিত রীতি। সুতরাং সরল করিবার সময় যোগফলের সমুদয় পদের সাধারণ গুণনীয়ককে বন্ধনীর বাহিরে স্থাপন করিয়া সরল করিবে। কম সংখ্যক পদের গুণনীয়ক লইয়া সরল করিতে গেলে যোগফলকে গুণনীয়কে প্রকাশ করা দুরূহ হইবে। পরবর্তী উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়া বুঝিবে।

উদা. 1. Sum to n terms the series whose nth term is $(n-1)(n+3)$.

n-তম পদ $=(n-1)(n+3)=n^2+2n-3$

$\therefore$ n এর স্থলে পর পর 1, 2, 3, ⋯, n লিখিয়া,

$$t_1 = 1^2+2.1-3$$
$$t_2 = 2^2+2.2-3$$
$$t_3 = 3^2+2.3-3$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$t_n = n^2+2.n-3$$

যোগ করিয়া,

নির্ণেয় সমষ্টি $=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+2(1+2+3+\cdots+n)-3n$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}-3n$$
$$=\tfrac{1}{6}n(2n^2+3n+1+6n+6-18)$$
$$=\tfrac{1}{6}n(2n^2+9n-11)=\tfrac{1}{6}n(n-1)(2n+11).$$

উদা. 2. Sum to n terms $1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$.

এস্থলে, $t_n=(1+3+5+\cdots+n\text{-তম পদ})$

$$=\tfrac{1}{2}n\{2.1+(n-1)2\}=n^2$$

$\therefore$ n এর স্থলে পর পর 1, 2, 3, ⋯, n লিখিয়া,

$t_1=1^2$, $t_2=2^2$, $t_3=3^2$, ⋯, $t_n=n^2$

$\therefore$ যোগ করিয়া, সমষ্টি $=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

উদা. 3. Sum to n terms and to 10 terms :

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots.$$ (C. U. 1950)

এস্থলে, $t_n=(1, 3, 5, 7, \cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ$)^2$

$$=\{1+(n-1)\times 2\}^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1.$$

এখন, n এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots n$ লিখিয়া,

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$t_n=4.n^2-4.n+1$$

$\therefore$ যোগ করিয়া, n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$$=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+3+\cdots+n)+n$$
$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n$$
$$=n\{\tfrac{2}{3}(n+1)(2n+1)-2(n+1)+1\}$$
$$=\tfrac{1}{3}n(4n^2+6n+2-6n-6+3)=\tfrac{1}{3}n(4n^2-1)$$

$\therefore$ 10-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $=\frac{1}{3}.10(4.10^2-1)=\frac{1}{3}.10.399=1330.$

উদা. 4. Sum to n terms : $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots.$

প্রদত্ত রাশিমালাটির $t_n=(1, 2, 3, \cdots$ শ্রেণীটির $t_n)\times(2, 3, 4, \cdots$ শ্রেণীটির $t_n)$ $\times(3, 4, 5, \cdots$ শ্রেণীটির $t_n)=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n.$

n এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া,

$$t_1=1^3+3.1^2+2.1$$
$$t_2=2^3+3.2^2+2.2$$
$$t_3=3^3+3.3^2+2.3$$

$$t_n=n^3+3.n^2+2.n$$

$\therefore$ সমষ্টি $=(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+2(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)\{\tfrac{1}{4}n(n+1)+\tfrac{1}{2}(2n+1)+1\}$$
$$=n(n+1)\times\tfrac{1}{4}(n^2+n+4n+2+4)$$
$$=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

উদা. 5. Sum to n terms $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$.

প্রদত্ত রাশিমালাটির $t_n = \dfrac{1}{(1, 3, 5, \cdots \text{ শ্রেণীটির } t_n)(3, 5, 7, \cdots \text{ শ্রেণীটির } t_n)}$

$$=\frac{1}{\{1+(n-1)2\}\{3+(n-1)2\}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

n এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া,

$$t_1=\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3})$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5})$$
$$t_3=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7})$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\therefore$ যোগ করিয়া, সমষ্টি $=\tfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\tfrac{1}{2}\times\dfrac{2n+1-1}{2n+1}=\dfrac{n}{2n+1}$.

উদা. 6. Sum to n terms : $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots$.

(1) n যুগ্ম সংখ্যা হইলে,

প্রদত্ত রাশি $=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots$ $\tfrac{1}{2}n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(-3)+(-7)+(-11)+\cdots$ $\tfrac{1}{2}n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=-(3+7+11+\cdots$ $\tfrac{1}{2}n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$=-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}n\{2.3+(\tfrac{1}{2}n-1)4\}=-\tfrac{1}{4}n(2+2n)=-\tfrac{1}{2}n(n+1)$.

(2) n বিযুগ্ম সংখ্যা হইলে,

প্রদত্ত রাশি $=1^2+\{(-2^2+3^2)+(-4^2+5^2)+(-6^2+7^2)$
$+\cdots$ $\tfrac{1}{2}(n-1)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$=1^2+\{5+9+13+\cdots$ $\tfrac{1}{2}(n-1)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$=1^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(n-1)[2.5+\{\tfrac{1}{2}(n-1)-1\}4]$

$=1+\tfrac{1}{4}(n-1)\times\{10+2(n-1)-4\}$

$=1+\tfrac{1}{4}(n-1)(2n+4)=1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n+2)$

$=\tfrac{1}{2}(n^2+n)=\tfrac{1}{2}n(n+1)$.

মন্তব্য। এস্থলে প্রথম পদ 1^2কে পৃথক করিয়া রাখায় বাকি পদগুলির সংখ্যা হইয়াছিল যুগ্মসংখ্যা $n-1$, কারণ n বিযুগ্ম। তৎপর দুই দুইটি পদকে এক একটি পদরূপে লওয়ায় পদসংখ্যা হইল $\tfrac{1}{2}(n-1)$.

উদা. 7. Sum to n terms : $2+5+10+17+\cdots$.

যোগফল $S_n = 2+5+10+17+\cdots+t_n$

আবার, $S_n = \quad 2+\ 5+10+\cdots+t_{n-1}+t_n$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $0 = 2+3+5+7+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত $-t_n$

$\therefore\quad t_n = 2+\{3+5+7+\cdots$ $(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত$\}$

$= 2+\frac{1}{2}(n-1)\{2.3+(n-2).2\}$

$= 2+\frac{1}{2}(n-1)(2n+2) = 2+n^2-1 = n^2+1.$

$\therefore$ nএর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া,

$$t_1 = 1^2+1$$
$$t_2 = 2^2+1$$
$$t_3 = 3^2+1$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$t_n = n^2+1$$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $S_n = (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+n$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n = \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6\}$

$= \frac{1}{6}n(2n^2+3n+7).$

মন্তব্য। প্রদত্ত রাশিমালাটির বিশেষত্ব এই যে, পর পর দুই দুইটি পদের অন্তর লইলে একটি সমান্তর শ্রেণী উৎপন্ন হয়। এইজন্য t_n নির্ণয় করিতে গিয়া রাশিমালাটির পদগুলিকে এক এক পদ করিয়া ডাইনে সরাইয়া বিয়োগ করা হইয়াছে। t_n এর তুল্যমান রাশিমালাটিকে সরল করিবার সুবিধার জন্য প্রথম পদটি ছাড়া বাকি $(n-1)$টি পদ দ্বারা গঠিত সমান্তর শ্রেণীটিকে পৃথক লওয়া হইয়াছে।

উদা. 8. Sum to $(3n+2)$ terms the series

$$1+2-3+4+5-6+7+8-9+10+11-12+\cdots.$$

নির্ণেয় যোগফল =

$(1+2-3)+(4+5-6)+(7+8-9)+(10+11-12)+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

+ প্রদত্ত শ্রেণীটির $(3n+1)$-তম পদ + প্রদত্ত শ্রেণীটির $(3n+2)$-তম পদ

$= 0+3+6+9+\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত $+(3n+1)+(3n+2)$

$= 3+6+9+\cdots(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত $+6n+3$

$= \frac{1}{2}(n-1)\{2.3+(n-2)3\}+6n+3$

$= \frac{1}{2}(n-1).3n+6n+3 = \frac{1}{2}(3n^2-3n+12n+6)$

$= \frac{1}{2}(3n^2+9n+6) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2).$

Exercise 57

1. Find the sum of the squares of the first n natural numbers. (C. U. 1915 ; D. B. 1932, '34, '45 ; G. U. 1951)

2. Find the sum of the cubes of the first n natural numbers. (C. U. 1918)

3. The nth term of an A. P. is $2n-1$. Find the sum to n terms. (D. B. 1946)

4. The rth term of an A. P. is $r(r+1)$. Find the sum to n terms. (D. B. 1937)

Sum the series :

5. $n.1+(n-1).2+(n-2).3+(n-3).4+\cdots+1.n.$ (C. U. 1889)

[r-তম পদ $=\{n-(r-1)\}.r=(n+1).r-r^2$. এখন r এর স্থলে পর পর 1, 2, 3, ..., n লিখিয়া কষ।]

6. $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$ to n terms.

7. $2^2+5^2+8^2+\cdots$ to n terms and to 10 terms. (D. B. 1936)

8. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots$ to n terms and to 12 terms.

9. $1.2+2.3+3.4+\cdots$ to n terms. (C. U. 1912, '17, '39, '44, '51 ; D. B. 1926, '33, '41, '44)

10. $2.3+3.4+4.5+\cdots$ to n terms. (E. B. S. B. 1949)

11. $1.3+3.5+5.7+\cdots$ to n terms. (S. B. 1952)

12. $3.7+5.10+7.13+\cdots$ to n terms. (D. B. 1936)

13. $1.2.3.+2.3.5+3.4.7+\cdots$ to n terms.

14. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$ to n terms.

15. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$ to n terms. (S. B. 1953)

16. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots$ to n terms.

17. $1-2+3-4+5-6+\cdots$ to n terms.

18. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots$ to n terms.

19. $1+3+6+10+\cdots$ to n terms.

20. $2+5+10+17+\cdots$ to n terms.

21. $1-3+5-7+9-11+\cdots$ to $(2n+1)$ terms.

গুণোত্তর শ্রেণী

122. কোন শ্রেণীর অন্তর্গত পদগুলি যদি এরূপ হয় যে, উহাদের যে কোন পদের ও তৎপূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বত্র সমান হয়, তবে ঐ শ্রেণীকে **গুণোত্তর শ্রেণী** (Geometrical series) বলে এবং ঐ অনুপাতটিকে **সাধারণ অনুপাত** (Common ratio) বলে। গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলিকে গুণোত্তর প্রগতিতে (in Geometrical Progression বা in G. P.) অবস্থিত বলা হয়।

নিম্নের শ্রেণীগুলি সবই গুণোত্তর শ্রেণী :

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16,$$
$$2, \quad 1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{8}$$
$$3, \quad -1, \quad \tfrac{1}{3}, \quad -\tfrac{1}{9}, \quad \tfrac{1}{27}$$
$$a, \ -ar, \ ar^2, \ -ar^3, \ ar^4$$

উল্লিখিত গুণোত্তর শ্রেণীগুলির প্রথমটির সাধারণ অনুপাত 2, দ্বিতীয়টির $\frac{1}{2}$, তৃতীয়টির $-\frac{1}{3}$ এবং চতুর্থটির $-r$.

সাধারণ অনুপাত নির্ণয়। কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদের ও তৎপূর্ববর্তী পদের অনুপাতই শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত। কাজেই কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদকে উহার অব্যবহিত পূর্ব পদ দ্বারা ভাগ করিলে শ্রেণীটির সাধারণ অনুপাত পাওয়া যায়। সাধারণতঃ দ্বিতীয় পদকে প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করা হয়।

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাতকে সাধারণতঃ r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গুণোত্তর শ্রেণীর কোন পদকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা ভাগ করিলে তৎপূর্ববর্তী পদটি পাওয়া যায়। কাজেই যে কোন পদকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়। সুতরাং কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।

***n*-তম পদ নির্ণয়।** কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে,

প্রথম পদ $t_1 = a$ অর্থাৎ ar^{1-1},
দ্বিতীয় পদ $t_2 = ar$ অর্থাৎ ar^{2-1},
তৃতীয় পদ $t_3 = ar^2$ অর্থাৎ ar^{3-1},
চতুর্থ পদ $t_4 = ar^3$ অর্থাৎ ar^{4-1};

$\therefore$ যে কোন পদের r এর ঘাতের সূচক উহার অবস্থানজ্ঞাপক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

$\therefore$ n-তম পদ বা $t_n = ar^{n-1}$. ... (1)

$\therefore$ কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r ও পদসংখ্যা n হইলে এবং শেষ পদ বা t_n কে l দ্বারা সূচিত করিলে,

$$l = ar^{n-1}. \quad \cdots \quad (2)$$

উদা. 1. Find the 5th term of the series 4, 12, 36, ...

এস্থলে, প্রথম পদ $a=4$, সাধারণ অনুপাত $r = 12 \div 4 = 3$, এবং পদসংখ্যা $n=5$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় 5-তম পদ} = ar^{n-1} = 4.3^{5-1} = 4.3^4 = 324.$$

উদা. 2. Find the pth term of the series 3, − 9, 27, ...

এস্থলে, প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অনুপাত $= -9 \div 3 = -3$.

$$\therefore \; p\text{-তম পদ} = 3 \times (-3)^{p-1} = -(-3)(-3)^{p-1}$$
$$= -(-3)^{1+p-1} = -(-3)^p.$$

মন্তব্য। p যুগ্ম কি বিযুগ্ম জানা নাই। p যুগ্ম হইলে, পদটি ঋণাত্মক হইবে এবং বিযুগ্ম হইলে ধনাত্মক হইবে।

উদা. 3. Find the nth term of the series $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots$.

শ্রেণীটির প্রথম পদ $\sqrt{3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{\sqrt{3}} \div \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

$$\therefore \; n\text{-তম পদ} = \sqrt{3}(\tfrac{1}{3})^{n-1} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{n-1}} = 3^{\frac{3}{2}-n}.$$

উদা. 4. Find the common ratio of the G. P. of which the first term is 2 and the 10th term is 1. (C. U. 1925)

এস্থলে, প্রথম পদ $a=2$ এবং $t_{10}=1$. তাহা হইলে সাধারণ অনুপাত r হইলে,

$$t_{10} \text{ বা } ar^{10-1} = 1 \quad \text{বা, } 2.r^9 = 1 \quad \text{বা, } r^9 = \tfrac{1}{2} \quad \therefore \; r = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{9}}.$$

123. যে কোন দুই পদ হইতে গুণোত্তর শ্রেণী নির্ণয়। কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন দুইটি পদ জানা থাকিলে, শ্রেণীটিকে সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

উদা. 5. The 3rd term of a G. P. is 4 and the 7th term is 64. Find the 5th term and the series.

মনে কর, নির্ণেয় শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে,

সর্তদ্বয় হইতে, $ar^2 = 4$ ... (1) এবং $ar^6 = 64$ ... (2)

$\therefore$ (2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া, $r^4 = 16$ $\therefore r = \pm 2$.

$\therefore$ (1) হইতে, $a(\pm 2)^2=4$ বা, $4a=4$ $\therefore$ $a=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় 5-তম পদ $=ar^4=1.(\pm 2)^4=1.16=16.$

$r=2$ ধরিয়া, নির্ণেয় শ্রেণী : 1, 2, 4, ⋯.

অথবা, $r=-2$ ধরিয়া, নির্ণেয় শ্রেণী : 1, −2, 4, ⋯.

উদা. 6. The sum of the 2nd and 3rd terms of a G. P. is $1\frac{1}{2}$ and that of the 4th and 5th terms is 6. Find the series.

প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে সর্তদ্বয় হইতে,

$$ar+ar^2=1\tfrac{1}{2} \text{ বা, } ar(1+r)=1\tfrac{1}{2} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং } ar^3+ar^4=6 \text{ বা, } ar^3(1+r)=6 \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া, $r^2=4$ $\therefore$ $r=\pm 2$

$\therefore$ (1) হইতে, $r=2$ হইলে, $a.2(1+2)=1\frac{1}{2}$ $\therefore$ $a=\frac{1}{4}$

এবং $r=-2$ হইলে, $a(-2)(1-2)=1\frac{1}{2}$ $\therefore$ $a=\frac{3}{4}.$

$\therefore$ $a=\frac{1}{4}$ এবং $r=2$ হইতে, নির্ণেয় শ্রেণী : $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ⋯.

অথবা, $a=\frac{3}{4}$ এবং $r=-2$ হইতে, নির্ণেয় শ্রেণী : $\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}$, 3, −6, 12, ⋯.

উদা. 7. Which term of the series 3, −6, 12,⋯ is 192 ?

এস্থলে, প্রথম পদ $a=3$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=-6\div 3=-2.$ সুতরাং n-তম পদ 192 হইলে,

$$ar^{n-1}=192 \text{ বা, } 3\times(-2)^{n-1}=192$$

$$\text{বা, } (-2)^{n-1}=64=(-2)^6 \quad \therefore n-1=6 \quad \therefore n=7.$$

$\therefore$ 192, শ্রেণীটির সপ্তম পদ।

উদা. 8. Show that the product of any two terms of a G. P., equidistant from the beginning and the end is constant. (D. B. 1931)

মনে কর, প্রথম পদ a, শেষ পদ l এবং সাধারণ অনুপাত r.

প্রথম ও শেষ পদ হইতে আরম্ভ করিয়া p-তম পদ দুইটি লইয়া দেখা যাক্।

a কে প্রথম পদ ধরিলে p-তম পদ $=ar^{p-1}$ এবং l কে প্রথম পদ ধরিলে সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{r}$ বলিয়া, p-তম পদ $=l\times\frac{1}{r^{p-1}}=\frac{l}{r^{p-1}}.$

$\therefore$ উহাদের গুণফল $=ar^{p-1}\times\frac{l}{r^{p-1}}=al=$ ধ্রুবক।

উদা. 9. The first term of a series in G. P. is a, nth term is l and the product of the first n terms is p. Show that $p=(al)^{\frac{n}{2}}$. (D. B. 1930)

সাধারণ অনুপাত যেন r. তাহা হইলে,

$$p=a.ar.ar^2.\cdots.ar^{n-1}=a^n r^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

$$=a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}=\left(a^2 r^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(a.ar^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=(al)^{\frac{n}{2}}.$$

উদা. 10. If the pth and the qth terms of a G. P. be c and d respectively, find the first term and the common ratio. (C. U. 1934)

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে, সর্তদ্বয় হইতে, $ar^{p-1}=c$ ⋯ (1) এবং $ar^{q-1}=d$ ⋯ (2)

∴ (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $r^{p-q}=\dfrac{c}{d}$ ∴ $r=\left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

∴ (1) হইতে, $a=\dfrac{c}{r^{p-1}}=cr^{1-p}=c\left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{1-p}{p-q}}=c\left(c.d^{-1}\right)^{\frac{1-p}{p-q}}$

$$=c^{1+\frac{1-p}{p-q}}\times d^{\frac{p-1}{p-q}}=c^{\frac{1-q}{p-q}}\times d^{\frac{p-1}{p-q}}=\left(c^{1-q}\times d^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Exercise 58

1. The first term of a G. P. is 2 and the common ratio is 3. Find the 5th term.

2. Find the 6th term of the series $1, -2, 4, \cdots$.

3. Find the 7th term of the series $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$.

4. Find the 8th term of the series $1, -\sqrt{2}, 2, \cdots$.

5. Find the pth term of the series $16, -8, 4, \cdots$.

6. Find the 10th term of a G. P. whose 1st term is 3 and 2nd term 1.

7. Find the 8th term of a G. P. whose 5th term is 1 and common ratio $\frac{1}{3}$.

8. Find the common ratio of a G. P. whose 1st term is 2 and 10th term 1.

9. Find the 1st term of a G. P. whose 7th term is -1 and common ratio $-\frac{1}{2}$.

10. The 5th term of a G. P. is 48 and the 12th term 6144. Find the first term and the common ratio. (D. B. 1928)

11. The 3rd term of a G. P. is 3 and the 6th term $-\frac{1}{9}$. Find the 9th term.

12. The sum of the 1st and 2nd terms of a G. P. is 3 and that of the 4th and 5th terms is 24. Find the series.

13. The sum of the 2nd and 3rd terms of a G. P. is 4 and that of the 4th and 5th terms is 36. Find the series.

14. Which term of the series 3, 6, 12, ··· is 384 ?

15. Is 526 a term of the series $2, -8, 32, \cdots$?

16. The pth term of a G. P. is $2 \times 3^{p-1}$; find its 5th term.

17. Show that if all the terms of a G. P. be multiplied or divided by the same quantity, the results will be in G. P.

18. Show that the reciprocals of the terms of a G. P. are also in G. P.

19. In a G. P., show that the product of any two terms equidistant from the beginning and end is constant and is equal to the product of the first and last terms. (D. B. 1931)

20. Show that the $2n$th term of a G. P. is the mean proportional between the nth and $3n$th terms. (C. U. 1877)

21. In a G. P., show that the product of any two terms equidistant from a given term is equal to the square of the given term. (C. U. 1915)

22. If the number of terms in a G. P. be odd, show that the square of the middle term is equal to the product of the first and last terms.

23. If the number of terms in a G. P. be even, show that the product of the two middle terms is equal to the product of the first and last terms.

24. The first term of a G. P. is a, nth term is l and the product of the first n terms is p. Show that $p=(al)^{\frac{n}{2}}$.

25. In a G. P., the $(p+q)$th term is m and $(p-q)$th term is n. Find the pth and qth terms. (C. U. 1935, '42)

26. In a G. P., the pth term is c and the qth term is d. Find its nth term. [উদা. 10 দেখ ।]

গুণোত্তর মধ্যক

124. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে তিনটি পদ থাকে, তবে মধ্যবর্তী পদটিকে প্রথম ও তৃতীয়ের **গুণোত্তর মধ্যক** (Geometric Mean বা সংক্ষেপে G. M.) বলে। যথা, 2, 6, 18 এই গুণোত্তর শ্রেণীর 6 কে 2 ও 18 এর গুণোত্তর মধ্যক বলে।

যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে তিনের অধিক পদ থাকে, তবে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের গুণোত্তর মধ্যক বলে। যথা, 1, 2, 4, 8, 16 এই গুণোত্তর শ্রেণীর 2, 4 ও 8 কে 1 ও 16 এর গুণোত্তর মধ্যক বলে।

125. গুণোত্তর মধ্যক নির্ণয়।

(*i*) মনে কর, a এবং bর গুণোত্তর মধ্যকটি নির্ণয় করিতে হইবে। যদি উহাদের গুণোত্তর মধ্যক x হয়, তবে a, x, b একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

$$\therefore \quad \frac{x}{a} = \frac{b}{x} \quad \therefore \quad x^2 = ab \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{ab}.$$

(*ii*) মনে কর, a ও bর মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তর মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে। গুণোত্তর মধ্যকগুলি যেন $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$. তাহা হইলে, $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী, যাহার পদসংখ্যা $x+2$, প্রথম পদ a এবং শেষ পদ বা $(n+2)$-তম পদ b. মনে কর, সাধারণ অনুপাত r.

তাহা হইলে, $ar^{n+1} = (n+2)$-তম পদ $= b$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \qquad \therefore \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\therefore \quad x_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \; x_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad x_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

ইত্যাদি।

উদা. 1. Insert 3 geometric means between 2 and 162.

2 এবং 162 এর মধ্যে 3টি গুণোত্তর মধ্যক সংস্থাপন করিলে 5টি পদবিশিষ্ট একটি গুণোত্তর শ্রেণী হইবে, যাহার প্রথম পদ 2 এবং পঞ্চম পদ 162. মনে কর, সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে,

$$2 \times r^{5-1} = t_5 \quad \text{বা,} \quad 2 \times r^4 = 162$$

$$\therefore \quad r^4 = 81 = (\pm 3)^4 \quad \therefore \quad r = \pm 3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $= ar, ar^2, ar^3 = 2.3, 2.3^2, 2.3^3 = 6, 18, 54$

বা, $2(-3), 2(-3)^2, 2(-3)^3 = -6, 18, -54.$

উদা. 2. Show that the product of n geometric means **between** x and y is the nth power of the single mean between them.

n-সংখ্যক গুণোত্তর মধ্যকগুলি $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}$ হইলে,

$$\text{উহাদের গুণফল} = a^n r^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}.$$

আবার, x ও y এর মধ্যবর্তী মধ্যক $= a$ ও ar^{n-1} এর মধ্যবর্তী মধ্যক

$$= (a.ar^{n-1})^{\frac{1}{2}} = ar^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$\therefore$ উহার n-তম ঘাত $= \{ar^{\frac{1}{2}(n-1)}\}^n = a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}$.

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

Exercise 59

Find the geometric mean between :

1. 3 and 27. **2.** -12 and -108. **3.** $\frac{5}{8}$ and $\frac{5}{32}$.

4. Find the geometric mean between a and b. (C. U. 1948)

5. Insert two such numbers between 5 and 135 so that the four numbers may be in G. P. (C. U. 1916)

6. Insert 3 geometric means between $\frac{1}{9}$ and 9. (C. U. 1914)

7. Insert 5 geometric means between $3\frac{5}{9}$ and $40\frac{1}{2}$. (D. B. 1935)

8. Show that the product of n geometric means between **any** two numbers is the nth power of the single mean between them.

গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়।

126. মনে কর, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, পদসংখ্যা n এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n. তাহা হইলে,

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$\therefore\ S_n.r = \qquad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $S_n - S_n r = a - ar^n$ বা, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$$\therefore\ \mathbf{S}_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \cdots \quad (1)$$

এই সূত্রের ডান পার্শ্বের লব ও হরকে -1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\mathbf{S}_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \cdots \quad (2)$$

গৃহীত শ্রেণীটির শেষ পদ অর্থাৎ n-তম পদ ar^{n-1} কে l দ্বারা সূচিত করিলে,

(1) হইতে, $S_n = \dfrac{a - lr}{1 - r}$ ... (3) এবং (2) হইতে, $S_n = \dfrac{lr - a}{r - 1}$ ... (4)

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a - lr}{1-r} = \frac{lr - a}{r-1}.$$

মন্তব্য (1)। r, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, সূত্র (1) এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে সূত্র (2) ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

মন্তব্য (2)। $r = 1$ হইলে সূত্র (1) ও (2) প্রয়োগ করা চলে না ; কারণ $r = 1$ হইলে, সমষ্টি বা $S_n = \frac{0}{0}$ হইয়া পড়ে। এরূপস্থলে সাধারণ নিয়ম প্রয়োগ করিবে। যেমন, $S_n = a + a + a + \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত $= na$.

উদা. 1. Find the sum of the first n terms of a G. P.
(C. U. 1919, '29, '39, '40, '42)

Or, Find the sum of $a + ar + ar^2 + \cdots$ to n terms. (C. U. 1931)
[সূত্র (1) নির্ণয় কর।]

উদা. 2. Find the sum of $2 + 6 + 18 + \cdots$ to 8 terms.

এস্থলে, প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত $r = 6 \div 2 = 3$ এবং পদসংখ্যা $n = 8$.

$$\therefore \quad \text{যোগফল} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = 3^8 - 1 = 6561 - 1 = 6560.$$

উদা. 3. Find the sum of $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$ to n terms.
(C. U. 1912, '39)

এস্থলে, প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{3} \div 1 = \frac{1}{3}$;

$$\therefore \quad \text{যোগফল} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1\{1 - (\frac{1}{3})^n\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

উদা. 4. Find the sum of $3 - 6 + 12 - \cdots + 768$.

এস্থলে, প্রথম পদ $a = 3$, সাধারণ অনুপাত $r = -6 \div 3 = -2$ এবং শেষ পদ $l = 768$.

$$\therefore \quad \text{যোগফল} = \frac{lr - a}{r - 1} = \frac{768 \times (-2) - 3}{-2 - 1} = \frac{-1536 - 3}{-3} = \frac{1539}{3} = 513.$$

উদা. 5. Find the sum of $4+12+36+\cdots$ to n terms without assuming any formula.

এস্থলে, প্রথম পদ $a=4$ এবং সাধারণ অনুপাত $r=12\div4=3$

$\therefore\ t_n=4.3^{n-1}\ \ \therefore$ যোগফল S_n হইলে,

$$S_n=4+12+36+\cdots+4.3^{n-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore\ 3S_n=\quad 12+36+\cdots+4.3^{n-1}+4.3^n \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $2S_n=4.3^n-4=4(3^n-1)$

$$\therefore\ S_n=\tfrac{4}{2}(3^n-1)=2(3^n-1).$$

উদা. 6. Find the sum of the series in the 10th group of

$$(1)+(5+5^2)+(5^3+5^4+5^5)+(5^6+5^7+5^8+5^9)+\cdots.$$

প্রথম বিভাগের পদসংখ্যা $=1$, দ্বিতীয় বিভাগের পদসংখ্যা $=2$, তৃতীয় বিভাগের পদসংখ্যা $=3$, ইত্যাদি। $\therefore$ দশম বিভাগের পদসংখ্যা $=10$. আবার, দ্বিতীয় বিভাগের প্রথম পদ $=5^1$, তৃতীয় বিভাগের প্রথম পদ $=5^{1+2}$, চতুর্থ বিভাগের প্রথম পদ $=5^{1+2+3}$. $\therefore$ দশম বিভাগের প্রথম পদ $=5^{1+2+3+\cdots+9}=5^{45}$.

$\therefore$ দশম বিভাগের যোগফল $=5^{45}+5^{46}+5^{47}+\cdots$ 10 পদ পর্যন্ত

$=5^{45}(1+5+5^2+\cdots$ 10 পদ পর্যন্ত$)$

$$=5^{45}.\frac{1(5^{10}-1)}{5-1}=\frac{5^{45}}{4}(5^{10}-1).$$

উদা. 7. Find the sum of n terms of a G. P. of which the 4th term is $\frac{1}{24}$ and the 7th term is $\frac{1}{192}$.

মনে কর, শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে,

সর্তানুসারে $ar^3=\frac{1}{24}\ \cdots$ (1) এবং $ar^6=\frac{1}{192}\ \cdots$ (2)

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া, $r^3=\frac{1}{8}\quad\therefore\ r=\frac{1}{2}$

$\therefore$ (1) হইতে, $a.(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{24}\ \therefore\ a=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় যোগফল}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

উদা. 8. The pth term of a G. P. is $2^p + 4p$. Find the sum of n terms.

এস্থলে, $t_p = 2^p + 4p$. $\therefore$ pর স্থলে পর পর 1, 2, 3, $\cdots$, n লিখিয়া,

$$t_1 = 2 + 4.1$$
$$t_2 = 2^2 + 4.2$$
$$t_3 = 2^3 + 4.3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n = 2^n + 4.n$$

$\therefore$ যোগ করিয়া, যোগফল $= (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= 2(2^n - 1) + 2n(n+1) = 2(n^2 + n + 2^n - 1).$$

উদা. 9. How many terms of the series 3, 6, 12, $\cdots$ must be taken so that the sum may be 765 ?

এস্থলে, প্রথম পদ $a = 3$, সাধারণ অনুপাত $r = 6 \div 3 = 2$ এবং নির্ণেয় পদ-সংখ্যা n হইলে, $S_n = 765$.

$\therefore$ $\dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = S_n$ হইতে, $\dfrac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 765$ বা, $3 \times 2^n - 3 = 765$

বা, $3 \times 2^n = 768$ বা, $2^n = 256 = 2^8$ $\therefore$ $n = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $= 8$.

Exercise 60

Find the sum of :

1. $1 + 2 + 4 + \cdots$ to 8 terms. (C. U. 1921)
2. $2 + 6 + 18 + \cdots$ to 10 terms.
3. $3 - 6 + 12 - \cdots$ to 8 terms.
4. $2 - 1 + \frac{1}{2} - \cdots$ to 7 terms.
5. $1 + 3 + 9 + \cdots$ to n terms. (C. U. 1924, '47)
6. $-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} + \cdots$ to r terms.
7. $1\frac{2}{3} - 1 + \frac{3}{5} - \cdots$ to n terms.
8. $\frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots$ to n terms. (C. U. 1911)
9. $(\sqrt{2} + 1) + (1) + (\sqrt{2} - 1) + \cdots$ to $(n+1)$ terms.
10. $3 + 6 + 12 + \cdots + 192$.
11. $2 - 6 + 18 - \cdots - 486$.

Find the sum without assuming any formula :

12. $\frac{5}{3}+1+\frac{3}{5}+\cdots$ to 12 terms.

13. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$ to n terms. (C. U. 1910, '18, '23, '38)

14. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ to n terms. (C. U. 1912)

15. Sum $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots+(a^n-x^n)$. (C. U. 1930)
[সমষ্টি $=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)=$ ইত্যাদি ।]

16. Sum $\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots$ to 10 terms.

$$\left[\text{যোগফল}=\frac{6+5}{2^2}+\frac{6+5}{2^4}+\cdots \text{ to 5 terms.}\right]$$

17. Find the sum of the series in the 8th group of $1+(3+3^2)+(3^3+3^4+3^5)+\cdots$.

18. In a G. P. the 3rd term is 2 and the 6th term is $\frac{1}{4}$. Find the sum to 10 terms.

19. Find the sum of 25 terms of a G. P. whose 4th term is 20 and the 7th term is 160. (D. B. 1945)

20. Find the sum of n terms of a G. P. whose 4th terms is -1 and the 7th term is $\frac{1}{27}$.

21. The sum of the first and second terms of a G. P. is 12, and that of its fourth and fifth terms is 324. Find the sum of the first six terms of the series. (E. B. S. B. 1949)

22. The rth term of a G. P. is 2^r+2r. Find the sum of n terms. (D. B. 1941)

23. Sum to n terms : $(1)+(1+3)+(1+3+3^2)+\cdots$. (C. U. 1931)

$$\left[t_n=\frac{1(3^n-1)}{3-1}=\tfrac{1}{2}(3^n-1)=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}.\right]$$

24. How many terms of the series $3, -6, 12, \cdots$ must be taken so that the sum may be 513 ?

25. How many terms of the series $4, 2, 1, \cdots$ must be taken to make the sum $7\frac{31}{32}$?

26. A supplier undertakes to supply 1 match-stick on the first day, 2 on the second, 4 on the third and so on for a month of 30 days for a lac of rupees. If a match-box of 60 sticks cost 3 pice, find to the nearest rupee, the loss or gain of the supplier.

127. প্রগতিঘটিত বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. Find the sum of $7+77+777+\cdots$ to n terms.

$$\text{যোগফল} = 7(1+11+111+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{7}{9}(9+99+999+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{7}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত}\}$$
$$= \tfrac{7}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত})-n\}$$
$$= \tfrac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\} = \tfrac{7}{9}\left\{\tfrac{10}{9}(10^n-1)-n\right\}.$$

উদা. 2. Sum $.6+.66+.666+\cdots$ to n terms and to 12 terms.

$$\text{যোগফল} = 6(.1+.11+.111+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{6}{9}(.9+.99+.999+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{2}{3}\{(1-.1)+(1-.01)+(1-.001)+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত}\}$$
$$= \tfrac{2}{3}\left\{n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত}\right)\right\}$$
$$= \tfrac{2}{3}\left\{n-\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right\} = \tfrac{2}{3}\left\{n-\tfrac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$$

$$\therefore\quad 12 \text{ পদ পর্যন্ত যোগফল} = \tfrac{2}{3}\left\{12-\tfrac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^{12}}\right)\right\}.$$

উদা. 3. Sum to n terms $1+4+10+22+\cdots$.

যোগফলকে S_n এবং n-তম পদকে t_n দ্বারা সূচিত করিয়া,

$$S_n = 1+4+10+22+\cdots+t_n$$

আবার, $$S_n = \quad 1+4+10+\cdots+t_{n-1}+t_n$$

বিয়োগ করিয়া, $$0 = (1+3+6+12+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত})-t_n$$

$$\therefore\ t_n = 1+3+6+12+\cdots\ n \text{ পদ পর্যন্ত}$$
$$= 1+\{3+6+12+\cdots(n-1) \text{ পদ পর্যন্ত}\}$$
$$= 1+\frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1} = 1+3.2^{n-1}-3 = 3.2^{n-1}-2.$$

এখন, nএর স্থলে পর পর 1, 2, 3, ⋯, n লিখিয়া,

$$t_1 = 3.1 - 2$$
$$t_2 = 3.2 - 2$$
$$t_3 = 3.2^2 - 2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n = 3.2^{n-1} - 2$$

∴ যোগ করিয়া, $S_n = 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - 2n$

$$= 3.\frac{1(2^{n-1})}{2-1} - 2n = 3.2^n - 2n - 3.$$

মন্তব্য। এস্থলে পদগুলির বিশেষত্ব এই যে, দুই দুইটি ক্রমিক পদের অন্তরগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 4. Sum to n terms $1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$.

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots + na^{n-1} \quad (\because t_n = na^{n-1})$$
$$aS_n = \qquad a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + (n-1)a^{n-1} + na^n$$

বিয়োগ করিয়া, $(1-a)S_n = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} - na^n)$

$$= \frac{1(1-a^n)}{1-a} - na^n \quad \therefore \quad S_n = \frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{na^n}{1-a}.$$

মন্তব্য। এস্থলে শ্রেণীটির প্রথম পদ 1কে 1.1 ধরিলে n-তম পদটি দুইটি উৎপাদকের গুণফল, যাহাদের প্রথমটি একটি সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ এবং দ্বিতীয়টি একটি গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম পদ। এইরূপ শ্রেণীকে ইংরেজিতে *Arithmetico-Geometrical series* বলে।

উদা. 5. Sum to n terms $1 + 3.4 + 5.4^2 + 7.4^3 + \cdots$.

$$t_n = \{1 + (n-1)2\}.4^{n-1} = (2n-1).4^{n-1}$$
$$\therefore \quad S_n = 1 + 3.4 + 5.4^2 + 7.4^3 + \cdots + (2n-1)4^{n-1}$$
$$4S_n = \qquad 1.4 + 3.4^2 + 5.4^3 + \cdots + (2n-3)4^{n-1} + (2n-1)4^n$$

বিয়োগ করিয়া, $-3S_n = 1 + 2.4 + 2.4^2 + 2.4^3 + \cdots + 2.4^{n-1} - (2n-1)4^n$

$$= 1 + 2.4\{1 + 4 + 4^2 + \cdots \text{ to } (n-1) \text{ terms}\} - (2n-1)4^n$$
$$= 1 + 2.4.\frac{4^{n-1}-1}{4-1} - (2n-1)4^n.$$

$$\therefore \quad S_n = \tfrac{1}{3}(2n-1)4^n - \tfrac{8}{9}.4^{n-1} + \tfrac{5}{9} = \tfrac{1}{9}\{(6n-5)4^n + 5\}.$$

উদা. 6. The sum of three numbers in G. P. is $24\frac{4}{5}$ and their product is 64. Find the numbers. (E. B. S. B. 1950)

নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি যেন $\frac{a}{r}$, a, ar.

$$\therefore \quad \frac{a}{r}+a+ar=24\tfrac{4}{5} \ldots (1) \text{ এবং } \frac{a}{r}.a.ar=64 \cdots (2)$$

$$\therefore \quad (2) \text{ হইতে, } a^3=64 \quad \therefore \quad a=4.$$

$$\therefore \quad (1) \text{ হইতে, } \frac{4}{r}+4+4r=24\tfrac{4}{5}$$

$$\text{বা, } \quad 4r-20\tfrac{4}{5}+\frac{4}{r}=0 \text{ বা, } r-5\tfrac{1}{5}+\frac{1}{r}=0$$

$$\text{বা, } 5r^2-26r+5=0 \text{ বা, } (r-5)(5r-1)=0 \quad \therefore \quad r=5 \text{ বা } \tfrac{1}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় $\frac{4}{5}$, 4, 20 বা 20, 4, $\frac{4}{5}$.

উদা. 7. If a, b, c are in G. P., show that $a+c>2b$, where a, b, c are positive.

$\because$ a ও c-র b গুণোত্তর মধ্যক, $\therefore$ $b=\pm\sqrt{ac}$

এখন, $a+c-2b=a+c-(\pm 2\sqrt{ac})=a+c\mp 2\sqrt{ac}$

$=(\sqrt{a}\mp\sqrt{c})^2=$ একটি ধনরাশি ($\because$ a ও c ধনাত্মক);

$\therefore$ $a+c>2b$.

উদা. 8 Show that the arithmetic mean between any two positive and unequal quantities is greater than their geometric mean. (C. U. 1928, '39, '41, '44, '47, '48)

সংখ্যাদ্বয় যেন a ও b. তাহা হইলে,

উহাদের সমান্তর মধ্যক $=\frac{1}{2}(a+b)$ এবং গুণোত্তর মধ্যক $=\pm\sqrt{ab}$

এখন, $\frac{1}{2}(a+b)-(\pm\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(a+b\mp 2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})^2$, যাহা একটি ধনরাশি; কারণ a ও b অসমান ধনসংখ্যা।

$\therefore$ $\frac{1}{2}(a+b)>\pm\sqrt{ab}$ অর্থাৎ, সমান্তর মধ্যক > গুণোত্তর মধ্যক।

উদা. 9. The arithmetic mean between two numbers is 20 and their geometric mean is 12. Find the numbers.

নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি যেন a এবং b. তাহা হইলে, উহাদের সমান্তর মধ্যক $\frac{1}{2}(a+b)$ এবং গুণোত্তর মধ্যক $\pm\sqrt{ab}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\frac{1}{2}(a+b)=20$ বা, $a+b=40 \cdots (1)$

এবং $\pm\sqrt{ab}=12$ বা, $ab=144$

$\therefore$ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=40^2-4\times 144=1024$

$\therefore$ $a-b=\pm 32 \cdots (2)$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া, $2a=40\pm 32$ $\therefore$ $a=36$ বা 4

$\therefore$ (1) হইতে, $b=40-a=40-36$ বা $40-4=4$ বা 36

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 36 এবং 4 বা 4 এবং 36.

উদা. 10. If a, b, c, d be in G. P., then a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2 are also in G. P. (C. U. 1919)

মনে কর, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$. তাহা হইলে, $a=bk$, $b=ck$, $c=dk$.

$\therefore$ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2k^2+c^2k^2}{b^2+c^2}=k^2$ এবং $\frac{b^2+c^2}{c^2+d^2}=\frac{c^2k^2+d^2k^2}{c^2+d^2}=k^2$;

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2+d^2}$$

$\therefore$ a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2 একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 11. If $\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}$, then a, b, c are in G. P.

'যোগ ও ভাগ ক্রিয়া' দ্বারা, $\frac{2a}{2bx}=\frac{2b}{2cx}$ বা, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\therefore$ a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 12. If a, b, c be in G. P., then

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ are in A. P. (D. B. 1946 ; G. U. 1948)

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে,

যদি $\frac{1}{2b}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{2b}$

বা, $\frac{a-b}{2b(a+b)}=\frac{b-c}{2b(b+c)}$ বা, $\frac{a-b}{a+b}=\frac{b-c}{b+c}$

বা, $ab+b^2-ac-bc=ab+ac-b^2-bc$

বা, $2b^2=2ac$ বা, $b^2=ac.$

কিন্তু a, b, c একটি গুণোত্তর শ্রেণী বলিয়া, $b^2=ac$;

$\therefore \quad \frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদা. 13. If p, q, r be in A. P., then pth, qth, rth terms of a G. P. are in G. P. (S. B. 1952)

গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ যেন a এবং সাধারণ অনুপাত d.

$\therefore$ p-তম পদ $=ad^{p-1}$, q-তম পদ $=ad^{q-1}$, r-তম পদ $=ad^{r-1}$.

এখন, $ad^{p-1}, ad^{q-1}, ad^{r-1}$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী,

যদি $\frac{ad^{q-1}}{ad^{p-1}}=\frac{ad^{r-1}}{ad^{q-1}}$ হয়, অর্থাৎ যদি $d^{q-p}=d^{r-q}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $q-p=r-q$ হয়, অর্থাৎ যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণী হয়, যাহা প্রদত্ত সর্তানুসারে সমান্তর শ্রেণী। $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

উদা. 14. If a, b, c be in A. P. and a, b, d be in G. P., then $a, a-b, d-c$ are in G. P. (C. U. 1919)

প্রথম সর্তানুসারে, $b-a=c-b$, $\therefore \quad c=2b-a.$

দ্বিতীয় সর্তানুসারে, $\frac{b}{a}=\frac{d}{b}$, $\therefore \quad b^2=ad$.

$\therefore \quad a(d-c)=ad-ac=b^2-a(2b-a)=b^2-2ab+a^2=(a-b)^2$

$\therefore \quad a, a-b, d-c$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী।

উদা. 15. If x, y, z be respectively the pth, qth, rth terms of a series in G. P. then $x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}=1.$ (C. U. 1951)

গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ যেন a এবং সাধারণ অনুপাত d. তাহা হইলে,

$$x=ad^{p-1},\ y=ad^{q-1},\ z=ad^{r-1}.$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(ad^{p-1})^{q-r}\times(ad^{q-1})^{r-p}\times(ad^{r-1})^{p-q}$

$$=a^{q-r+r-p+p-q}\times d^{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)-(q-r+r-p+p-q)}$$

$$=a^0\times d^0=1\times 1=1.$$

উদা. 16. If a, b, c be in A. P. and x, y, z be in G. P., then $x^{b-c}\, y^{c-a}\, z^{a-b}=1.$ (C. U. 1940, '50)

প্রথম সর্তানুসারে, $a-b=b-c \quad \therefore \quad 2b-c-a=0$

দ্বিতীয় সর্তানুসারে, $\frac{y}{x}=\frac{z}{y} \quad \therefore \quad xz=y^2.$

$$\therefore \quad x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}=x^{b-c}y^{c-a}z^{b-c}=(xz)^{b-c}y^{c-a}$$
$$=(y^2)^{b-c}y^{c-a}=y^{2b-2c+c-a}$$
$$=y^{2b-c-a}=y^0=1.$$

উদা. 17. Find the ratio of the two numbers when the ratio of their A. M. and G. M. is 5 : 3.

সংখ্যা দুইটি যেন x ও y.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{\frac{1}{2}(x+y)}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{3} \quad \therefore \quad \frac{(x+y)^2}{4xy}=\frac{25}{9} \quad \cdots \quad (1)$

$\therefore \quad \frac{(x+y)^2}{4xy}-1=\frac{25}{9}-1$ বা, $\frac{(x-y)^2}{4xy}=\frac{16}{9} \quad \cdots \quad (2)$

$\therefore$ (1)কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\frac{25}{16} \quad \therefore \quad \frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{4}$

$\therefore$ 'যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া' দ্বারা, $\frac{2x}{2y}=\frac{9}{1} \quad \therefore \quad x:y=9:1.$

উদা. 18. If a, b, c be in G. P., and x, y be A. M.'s between a, b and b, c respectively, prove that

$$(i) \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}, \qquad (ii) \quad \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2.$$

সর্ত হইতে, $b:a=c:b,\ x=\frac{1}{2}(a+b),\ y=\frac{1}{2}(b+c)$;

$$\therefore \quad ac=b^2,\ \frac{1}{x}=\frac{2}{a+b},\ \frac{1}{y}=\frac{2}{b+c}.$$

$$(i) \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)=2.\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)}$$
$$=2.\frac{a+2b+c}{ab+b^2+ac+bc}=2.\frac{a+2b+c}{ab+2b^2+bc}=\frac{2}{b}.$$

(ii) $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)=2.\frac{a(b+c)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)}$

$$=2.\frac{ab+2ac+bc}{ab+b^2+ac+bc}=2.\frac{ab+2ac+bc}{ab+2ac+bc}=2.$$

Exercise 61

Sum to n terms :

1. $3+33+333+\cdots$.
2. $5+55+555+\cdots$.
3. $\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots$. (C. U.)
4. $\dot{7}+\cdot77+\cdot777+\cdots$.
5. $1+3+7+15+\cdots$.
6. $1+5+13+29+\cdots$.
7. $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots$. (C. U.)
8. $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots$
9. $1.2+2.3+4.4+\cdots$.
10. $3.2+5.2^2+7.2^3+\cdots$

11. If S_n, S_{2n}, S_{3n} denote respectively the sums of a G. P. to n, $2n$, $3n$ terms, show that $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

[প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে, প্রত্যেক পক্ষ $=\left\{\frac{ar^n(r^n-1)}{r-1}\right\}^2$ দেখাও।]

12. The sum of three numbers in G. P. is 26 and their product is 216. Find the numbers.

[সংখ্যা তিনটিকে $\frac{a}{r}$, a ও ar ধরিয়া কষ।]

13. Divide 21 into three parts such that the parts may be in G. P. and their product is 64. (G. U. 1953)

14. The sum of three numbers in G. P. is 13 and the sum of their squares is 91. Find the numbers.

15. The product of three numbers in G. P. is 64 and the sum of their products in pairs is 56. Find the numbers.

16. Three numbers are in G. P. The middle number is 6 and the sum of the first and the second is 15. Find the numbers. (C. U. 1922)

17. The sum of three numbers in A. P. is 15. If 1, 4 and 19 be added to them respectively, the resulting numbers are in G. P. Find the numbers.

18. Three numbers whose product is 512 are in G. P. If 8 be added to the first and 6 to the second, the two resulting numbers and the third are in A. P. Find the numbers. (C. U. 1950)

19. If a, b, c are in G. P., show that $a+c > 2b$, where a, b, c are positive. (C. U. 1947)

20. Show that the arithmetic mean between any two positive and unequal quantities is greater than their geometric mean.

(C. U. 1928, '39, '41, '44, '47, '48)

21. The arithmetic mean between two numbers is 15 and their geometric mean is 9. Find them. (C. U. 1926)

22. The arithmetic mean between two numbers is 40 and their geometric mean is 24. Find the numbers.

23. The arithmetic mean between two numbers is A and their geometric mean is G. Show that the two numbers are $A+\sqrt{A^2-G^2}$ and $A-\sqrt{A^2-G^2}$.

24. If a, b, c are in G. P., show that

(i) a^2+b^2, $ab+bc$, b^2+c^2 are in G. P.

(ii) $a^2-b^2+c^2$, $a^2+b^2+c^2$ are in G. P.

25. If a, b, c, d be in G. P., show that

(i) $a+b$, $b+c$, $c+d$ are in G. P.

(ii) a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2 are in G. P.

(iii) $(a+b)^2$, $(b+c)^2$, $(c+d)^2$ are in G. P.

(iv) $(a^2+b^2)^{-1}$, $(b^2+c^2)^{-1}$, $(c^2+d^2)^{-1}$ are in G. P.

(v) $a^2+b^2+c^2$, $ab+bc+cd$, $b^2+c^2+d^2$ are in G. P.

26. If a, b, c are in G. P., show that

$$a+2b+c=\frac{(a+b)^2}{a}=\frac{(b+c)^2}{c}.$$

27. If a, b, c, d are in G. P., show that

(i) $(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d)$. (C. U. 1924)

(ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$. (C. U. 1943)

28. If $\frac{a-bx}{a+bx}=\frac{b-cx}{b+cx}=\frac{c-dx}{c+dx}$, then a, b, c, d are in G. P.

29. If x, y, z are in G. P., show that

$$\frac{1}{x+y}, \frac{1}{2y}, \frac{1}{y+z} \text{ are in A. P.}$$

30. If p, q, r be in A. P., then the pth, qth, rth terms of a G. P. are in G. P. (S. B. 1952)

31. If a, b, c be in A. P. and a, b, d be in G. P., then $a, a-b, d-c$ are in G. P. (C. U. 1919)

32. If x, y, z be respectively the pth, qth and rth terms of a series in G. P., then $x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}=1$. (C. U. 1951)

33. If a, b, c be in A. P. and x, y, z be in G. P., then $x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}=1$. (C. U. 1940, '50)

34. If S be the sum, P the product, and R the sum of the reciprocals of n terms in G. P., prove that $\left(\frac{S}{R}\right)^n=P^2$. (C. U. 1883)

[প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে, $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$,

$$R=\left(1-\frac{1}{r^n}\right)\Big/a\left(1-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{ar^{n-1}}\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right),$$ ইত্যাদি।]

35. Find the ratio of the two numbers when the ratio of their A. M. and G. M. is 13 : 5.

36. If the A. M. of two numbers be twice their G. M., prove that the numbers are as $2+\sqrt{3} : 2-\sqrt{3}$.

[A. M. : G. M. = 2 : 1 ধর।]

37. The A. M. of a and b is to their G. M. as $m : n$. Show that $a : b = m+\sqrt{m^2-n^2} : m-\sqrt{m^2-n^2}$. [উদা. 17 দেখ।]

38. If A be the A. M., and a and b be two G. M.'s between two given numbers, show that

$$A=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right).$$

[প্রদত্ত সংখ্যাদ্বয় যেন x, y. $\therefore$ x, a, b, y একটি গুণোত্তর শ্রেণী। এখন,

$\because$ $\frac{a}{x}=\frac{b}{a}$ এবং $\frac{b}{a}=\frac{y}{b}$; $\therefore$ $x=\frac{a^2}{b}$ এবং $y=\frac{b^2}{a}$

$\therefore$ $A=\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)$.]

39. If G be the G. M., and a and b be two A. M.'s between two given numbers, show that $G^2=(2a-b)(2b-a)$.

[প্রদত্ত সংখ্যাদ্বয় যেন x, y. $\therefore$ x, a, b, y সমান্তর শ্রেণী; $\therefore$ $x+b=2a$ এবং $a+y=2b$. $\therefore$ $G^2=xy=(2a-b)(2b-a)$.]

40. If a, b, c be in G. P., and x, y be A. M.'s between a, b and b, c respectively, prove that

$$(i)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}, \quad (ii)\ \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2.$$

বিপরীত প্রগতি

128. **প্রথম সংজ্ঞা।** যদি কোন শ্রেণীর (Series) পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ শ্রেণীকে **বিপরীত শ্রেণী** (Harmonic Series) বলে এবং ঐ বিপরীত শ্রেণীর পদগুলিকে বিপরীত প্রগতিতে (in Harmonic Progression বা সংক্ষেপে in H. P.) অবস্থিত বলে। বিপরীতক্রমে, কোন সমান্তর শ্রেণীর পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি একটি বিপরীত শ্রেণী গঠন করে।

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \cdots$ একটি বিপরীত শ্রেণী, কারণ শ্রেণীটির পদসমূহের অন্যোন্যক 2, 5, 8, ⋯ একটি সমান্তর শ্রেণী।

(ii) a, b, c একটি বিপরীত শ্রেণী হইলে, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী।

p, q, r একটি সমান্তর শ্রেণী হইলে, $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$ একটি বিপরীত শ্রেণী।

(iii) a, b, cর পারস্পরিক সম্বন্ধ কিরূপ হইলে, উহারা একটি বিপরীত শ্রেণী গঠন করিবে, পরীক্ষা করিয়া দেখা যাক।

a, b, c একটি বিপরীত শ্রেণী হইবে,

যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হয়;

অর্থাৎ যদি $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ বা $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$

বা $\frac{ab}{bc}=\frac{a-b}{b-c}$ বা $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a : c=(a-b) : (b-c)$ হয়।

ইহা হইতে নিম্নের সংজ্ঞাটি পাওয়া যায়ঃ

দ্বিতীয় সংজ্ঞা। তিনটি ক্রমিক রাশির প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত যদি প্রথম দুইটি রাশির এবং শেষ দুইটি রাশির অন্তরদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি তিনটি একটি বিপরীত শ্রেণী গঠন করে এবং ঐ রাশি তিনটিকে বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত বলে।

তিনের অধিক রাশির প্রত্যেক তিনটি ক্রমিক রাশি যদি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, তবে ঐ রাশিসমূহকে বিপরীত প্রগতিতে অবস্থিত বলে।

সাধারণ পদ নির্ণয়। কোন বিপরীত শ্রেণীর সাধারণ পদ (General term) বা n-তম পদ নির্ণয় করিতে হইলে, বিপরীত শ্রেণীটিকে প্রথমে সমান্তর শ্রেণীতে পরিবর্তিত করিয়া সমান্তর শ্রেণীটির n-তম পদ নির্ণয় করিবে। এই n-তম পদের অন্যোন্যকই বিপরীত শ্রেণীটির সাধারণ পদ হইবে। যথা,

$a, a+b, a+2b, \cdots$ একটি বিপরীত শ্রেণী হইলে, $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}, \cdots$

একটি সমান্তর শ্রেণী, যাহার n-তম পদ $=\frac{1}{a+(n-1)b}$. বিপরীত শ্রেণীটির

n-তম পদ $=a+(n-1)b$. কাজেই দেখা যায়, বিপরীত শ্রেণী $a, a+b, a+2b, \cdots$কে একটি সমান্তর শ্রেণী বলিয়া কল্পনা করিলে উহার n-তম পদই বিপরীত শ্রেণীটির সাধারণ পদ হইবে।

বিপরীত শ্রেণীর যোগফল। বিপরীত শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করিবার কোন সূত্র (Formula) নাই।

বিপরীত মধ্যক নির্ণয়। a ও bর বিপরীত মধ্যক (Harmonic Mean বা সংক্ষেপে H. M.) যদি H হয়, তবে $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে।

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H} \text{ বা } \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab} \qquad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

$\therefore$ a ও bর বিপরীত মধ্যক $= \dfrac{2ab}{a+b}$. অনুরূপে a ও bর যে কোনও সংখ্যক বিপরীত মধ্যক নির্ণয় করা যাইতে পারে।

ত্রিবিধ মধ্যকের পারস্পরিক সম্বন্ধ। a ও b যেন দুইটি অসমান ধনাত্মক রাশি। উহাদের সমান্তর, গুণোত্তর ও বিপরীত মধ্যকত্রয়কে যথাক্রমে A, G ও H দ্বারা সূচিত করিলে,

$$A = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad G = \sqrt{ab}, \qquad H = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\therefore \quad A \,.\, H = \tfrac{1}{2}(a+b)\,.\,\frac{2ab}{a+b} = ab = G^2.$$

$\therefore$ (*i*) $A\,.\,H = G^2$ বলিয়া, A ও H এর গুণোত্তর মধ্যক G. সুতরাং a ও bর গুণোত্তর মধ্যক এবং A ও H এর গুণোত্তর মধ্যক একই।

(*ii*) $A\,.\,H = G^2$ বলিয়া, $H = \dfrac{G^2}{A}$.

আবার, $\because$ $A > G$ (উদা. 8, পৃঃ 270) ; $\therefore AG > G^2$ $\therefore G > \dfrac{G^2}{A}$

$$\therefore \quad G > H. \qquad \therefore \quad A > G > H.$$

মন্তব্য। বিপরীত প্রগতির শুধু সংজ্ঞা পাঠ্যসূচীর অন্তর্গত বলিয়া আর অধিক আলোচনা করা হইল না।

ভেদ (Variation)

129. সরল ভেদ। যদি দুইটি চলরাশির একটির মান পরিবর্তিত হইলে অপরটির মান একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে ঐ পরিবর্তনকে **সরল ভেদ** (Direct Variation) বলে এবং ঐ রাশি দুইটিকে **সরল ভেদে অবস্থিত** বলে। যেমন,

$x = 2y$এ $x = 2, 4, 6$ হইলে, $y = 1, 2, 3$; $\therefore$ x এবং y সরল ভেদে অবস্থিত, কারণ $2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3$ বলিয়া x এর মানের পরিবর্তনের অনুপাত y এর মানের পরিবর্তনের অনুপাতের সমান।

আবার, $x = 2y$এ $y = 1, 2, 3$ হইলে, $x = 2, 4, 6$; $\therefore$ y এবং x সরল ভেদে অবস্থিত, কারণ $1 : 2 : 3 = 2 : 4 : 6$.

$\therefore$ x এবং y এর যে কোন একটির মান পরিবর্তিত হইলে যদি অপরটির মান একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবেই x এবং y বা y এবং x সরল ভেদে থাকিবে।

x এবং y সরল ভেদে থাকিলে অর্থাৎ x এবং y সমান অনুপাতে পরিবর্তিত হইলে, $x \propto y$ (x varies as or directly varies as y) লিখিয়া প্রকাশ করা হয়। অবশ্য $y \propto x$ লেখাও চলে।

সরল ভেদের সমীকরণ। যদি x এবং y একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে $x = my$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

[If $x \propto y$, then $x = my$, where m is a constant.]

প্রমাণ। মনে কর, x, aতে পরিবর্তিত হইলে y, bতে পরিবর্তিত হয়।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $x : a = y : b$ বা, $x/a = y/b$;

$\therefore$ $x = \dfrac{a}{b} . y$ বা, $x = my$, যেখানে $\dfrac{a}{b}$ ধ্রুবক বলিয়া m ধ্রুবক।

এই ধ্রুবক m কে **ভেদের ধ্রুবক (Constant of Variation)** বলে।

বিপরীতক্রমে, $x = my$ হইলে, $x \propto y$.

দৃষ্টান্ত। বৃত্তের পরিধি $= \pi \times$ ব্যাস, যেখানে π একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $\propto$ ব্যাস।

ভেদের ধ্রুবক নির্ণয়। দুইটি চলরাশির একজোড়া অনুরূপ মান (Corresponding values) জানা থাকিলে ভেদের ধ্রুবকটি নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, x ও y সরল ভেদে অবস্থিত এবং $x = 2$ হইলে $y = 3$ হয়।

এখন, $\because$ $x \propto y$, $\therefore$ $x = my$, যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে, $2 = m.3$ $\therefore$ m বা ভেদের ধ্রুবক $\frac{2}{3}$.

সরল ভেদের লেখ। x এবং y সরল ভেদে থাকিলে, $x = my$ যেখানে m একটি ধ্রুবক। ইহার লেখটি (0, 0) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা। সুতরাং, দুইটি চলরাশি সরল ভেদে থাকিলে উহাদের অনুরূপ (corresponding) মানগুলি দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলি (0, 0) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার উপর থাকিবে।

130. ব্যস্ত ভেদ। মনে রাখিবে, 1কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে সংখ্যাটির অন্যোন্যক পাওয়া যায়। যেমন, $\frac{2}{3}$ এর অন্যোন্যক $= 1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$. তদ্রূপ,

x এর অন্যোন্যক $= 1 \div x = \dfrac{1}{x}$.

যদি দুইটি চলরাশির একটির মান পরিবর্তিত হইলে অপরটির অন্যোন্যকের মান একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে ঐ পরিবর্তনকে **ব্যস্ত ভেদ** (Inverse Variation) বলে এবং ঐ চলরাশি দুইটিকে **ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত** বলে।

কাজেই, (*i*) x এবং $1/y$ সরল ভেদে থাকিলে, x এবং y ব্যস্ত ভেদে থাকে (If x varies directly as $1/y$, then x varies inversely as y.)।

বিপরীতক্রমে, x এবং y ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, x এবং $1/y$ সরল ভেদে থাকে।

আবার, (*ii*) $\because$ x এবং y ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, $x \propto 1/y$;

$\therefore$ $x = m.1/y$ বা, $xy = m$ যেখানে m ধ্রুবক।

$\therefore$ দুইটি চলরাশি ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, উহাদের গুণফল ধ্রুবক হয়।

বিপরীতক্রমে, $xy = m$ হইলে, $x \propto 1/y$ এবং $y \propto 1/x$;

$\therefore$ $xy = m$ হইলে, x এবং y পরস্পরের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

ব্যস্ত ভেদের দৃষ্টান্ত। (*i*) কোন নির্দিষ্ট বেগে কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিতে যত সময় লাগে, ঐ বেগের 2 গুণ বেগে লাগিবে ঐ সময়ের $\frac{1}{2}$, 3 গুণ বেগে লাগিবে ঐ সময়ের $\frac{1}{3}$, 4 গুণ বেগে লাগিবে ঐ সময়ের $\frac{1}{4}$, ইত্যাদি। $\therefore$ দূরত্ব নির্দিষ্ট থাকিলে, বেগ ও সময় ব্যস্ত ভেদে থাকে।

(*ii*) কোন আয়তের ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট থাকিলে, উহার দুইটি সন্নিহিত বাহুর পরিমাণ ব্যস্ত ভেদে থাকে।

(*iii*) কোন নির্দিষ্ট কাজ শেষ করিবার লোকসংখ্যা এবং দিনসংখ্যা ব্যস্ত ভেদে থাকে।

ব্যস্ত ভেদঘটিত লেখ। x ও y ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, $xy = m$, যেখানে m ধ্রুবক। ইহার লেখ একটি সম-পরাবৃত্ত (অনু. 104)। সুতরাং দুইটি চলরাশি ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, উহাদের অনুরূপ (corresponding) মানগুলি দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলি একটি সম-পরাবৃত্তের উপর থাকিবে।

131. সম্মিলিত ভেদ (Joint Variation)। যদি একটি রাশি এবং অপর কতিপয় রাশির গুণফল সরল ভেদে থাকে, তবে প্রথমোক্ত রাশিটিকে অপর রাশিগুলির সহিত **সরল সম্মিলিত ভেদে অবস্থিত** বলা হয়।

[If a quantity varies as the product of some other quantities, then the first quantity is said to vary jointly as the other quantities.].

কাজেই যদি A এবং BCD সরল ভেদে থাকে অর্থাৎ যদি $A \propto BCD$ বা $A = mBCD$ (m ধ্রুবক) হয়, তবে Aকে B, C ও Dর সহিত সরল সম্মিলিত ভেদে অবস্থিত বলা হয়।

বিপরীতক্রমে, A যদি B, C ও Dর সহিত সরল সম্মিলিত ভেদে অবস্থিত থাকে, তবে A এবং BCD সরল ভেদে থাকিবে এবং $A = mBCD$ হইবে, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

[Conversely, if A varies jointly as B, C and D, then $A \propto BCD$ and $A = mBCD$, where m is a constant.]

মন্তব্য। B, C, D, E প্রভৃতি অসংখ্য রাশির সহিত A সরল সম্মিলিত ভেদে অবস্থিত থাকিতে পারে।

সরল সম্মিলিত ভেদের দৃষ্টান্ত। (*i*) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা, যেখানে $\frac{1}{2}$ ধ্রুবক। সুতরাং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং উহার ভূমি × উচ্চতা সরল ভেদে অবস্থিত। ∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার সহিত সরল সম্মিলিত ভেদে অবস্থিত।

(*ii*) কোন মূলধনের সুদ এবং মূলধন × সুদের হার × সময় সরল ভেদে অবস্থিত ; ∴ সুদ $= m$ × মূলধন × সুদের হার × সময়, যেখানে m ধ্রুবক। ∴ কোন মূলধনের সুদ ঐ মূলধন, সুদের হার ও সময়ের সহিত সরল সম্মিলিত ভেদে অবস্থিত।

132. যদি একটি রাশি দ্বিতীয় একটি রাশির সহিত এবং তৃতীয় একটি রাশির অন্যোন্যকের সহিত যুগপৎ সরল ভেদে থাকে, তবে প্রথমোক্ত রাশিটিকে দ্বিতীয়টির সহিত সরল ভেদে এবং তৃতীয়টির সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত বলা হয়। যেমন, $x = m.\frac{y}{z}$এ x যুগপৎ yএর সহিত সরলভেদে এবং zএর সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত।

দৃষ্টান্ত। কোন স্থানে পৌঁছিবার সময়ের পরিমাণ, স্থানটির দূরত্বের সহিত সরল ভেদে এবং গতির সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত থাকে।

132. সম্মিলিত ভেদ সম্বন্ধীয় উপপাদ্য। If $A \propto B$ when C is constant, and $A \propto C$ when B is constant, then $A \propto BC$ when both B and C vary.

[**দৃষ্টান্ত।** মনে কর, একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল A, ভূমি B এবং উচ্চতা C. তাহা হইলে, ত্রিভুজটির উচ্চতা C ধ্রুবক থাকিলে ক্ষেত্রফল A ∝ ভূমি B, এবং ভূমি B ধ্রুবক থাকিলে ক্ষেত্রফল A ∝ উচ্চতা C, এবং B ও C উভয়েই চল হইলে ক্ষেত্রফল A ∝ (ভূমি B × উচ্চতা C)। এই দৃষ্টান্তটির কথা মনে রাখিলে, নিম্নের প্রমাণটি বুঝিবার পক্ষে সুবিধা হইবে।]

প্রমাণ। যখন B পরিবর্তিত হয়, C ধ্রুবক থাকে এবং যখন C পরিবর্তিত হয়, B ধ্রুবক থাকে। সুতরাং B এবং Cর পৃথক পৃথক পরিবর্তনের ফলে A পরিবর্তিত হয়।

Bর bতে পরিবর্তিত হওয়ার ফলে A যেন a' এ পরিবর্তিত হইল। তাহা হইলে,

$$\because \quad A \propto B, \therefore A : a' = B : b \text{ বা, } \frac{A}{a'} = \frac{B}{b} \cdots (1)$$

তৎপর, Cর cতে পরিবর্তিত হওয়ার ফলে a' যেন aতে পরিবর্তিত হইল ;
তাহা হইলে, $\because \quad A \propto C, \therefore a' : a = C : c$ বা, $\frac{a'}{a} = \frac{C}{c} \cdots (2)$

$$\therefore \quad (1) \text{ ও } (2) \text{ হইতে, } \frac{A}{a'} \times \frac{a'}{a} = \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$$

বা, $\frac{A}{a} = \frac{BC}{bc} \quad \therefore \quad A = \frac{a}{bc}.BC$, যেখানে $\frac{a}{bc}$ ধ্রুবক ;

$\therefore \quad A \propto BC$, যখন B ও C উভয়েই চল।

মন্তব্য 1. যদি $A \propto B$, যখন C ধ্রুবক এবং $A \propto \frac{1}{C}$ যখন B ধ্রুবক, তবে $A \propto \frac{B}{C}$ যখন B ও C উভয়েই চল।

মন্তব্য 2. A যদি B, C, D, E প্রভৃতি প্রত্যেকটি রাশির সহিত সরল ভেদে থাকে, যখন সেই রাশিটি ছাড়া অপরগুলি ধ্রুবক থাকে, তবে

$A \propto BCDE\cdots$, যখন সমুদয় রাশিগুলিই চল।

133. মনে রাখিবার সুবিধার জন্য সিদ্ধান্তগুলি একসঙ্গে দেওয়া গেল :

1. যদি $x \propto y$ অর্থাৎ x ও y সরল ভেদে থাকে, তবে $x = my$, যেখানে m ধ্রুবক। বিপরীতক্রমে, $x = my$ হইলে $x \propto y$, অর্থাৎ x এবং y সরল ভেদে থাকে।

2. যদি $x \propto \frac{1}{y}$, অর্থাৎ x এবং $\frac{1}{y}$ সরল ভেদে থাকে অথবা x এবং y ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে $x = m \cdot \frac{1}{y}$ বা $xy = m$, যেখানে m ধ্রুবক।

বিপরীতক্রমে, $xy = m$ হইলে $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y \propto \frac{1}{x}$; $\therefore x$ এবং y পরস্পরের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে।

3. যদি $x \propto y$ এবং $x \propto \frac{1}{z}$, তবে $x \propto \frac{y}{z}$ এবং $x = m \cdot \frac{y}{z}$, যেখানে m ধ্রুবক।

বিপরীতক্রমে, $x = m \cdot \frac{y}{z}$ হইলে, $x \propto y$ এবং $x \propto \frac{1}{z}$.

4. A যদি B, C এবং Dর সহিত যুগপৎ সরল ভেদে থাকে (If A varies jointly as B, C and D), তবে $A \propto BCD$ এবং $A = mBCD$, যেখানে m ধ্রুবক।

বিপরীতক্রমে, $A = mBCD$ হইলে $A \propto BCD$ এবং A যুগপৎ B, C ও Dর সহিত সরল ভেদে থাকে।

5. যদি $A \propto B$, যখন C ধ্রুবক এবং $A \propto C$, যখন B ধ্রুবক, তবে $A \propto BC$, যখন B এবং C উভয়েই চল।

134. কতিপয় অতিরিক্ত সিদ্ধান্ত।

1. যদি $A \propto B$, তবে $B \propto A$.

$\because\ A \propto B,\ \therefore\ A = mB$ (m ধ্রুবক);

$\therefore\ B = \frac{1}{m} \cdot A\ \ \therefore\ B \propto A$ ($\because\ \frac{1}{m}$ ধ্রুবক)।

2. যদি $A \propto B$, তবে $A^n \propto B^n$.

$\because\ A \propto B,\ \therefore\ A = mB$ (m ধ্রুবক);

$\therefore\ A^n = m^n B^n,\ \therefore\ A^n \propto B^n$ ($\because\ m^n$ ধ্রুবক)।

3. যদি $A \propto B$ এবং $B \propto C$, তবে $A \propto C$.

$\because\ A \propto B,\ \therefore\ A = mB$ (m ধ্রুবক

এবং $\because\ B \propto C,\ \therefore\ B = nC$ (n ধ্রুবক);

$\therefore\ A = mB = m.nC = mnC$

$\therefore\ A \propto C$ ($\because\ mn$ ধ্রুবক)।

4. যদি $A \propto B$ এবং $C \propto D$, তবে $AC \propto BD$ এবং $AD \propto BC$.

$\because\ A \propto B$ এবং $C \propto D,\ \therefore\ A = mB$ এবং $C = nD$ (m এবং n ধ্রুবক);

$\therefore\ AC = mnBD\ \ \therefore\ AC \propto BD$ ($\because\ mn$ ধ্রুবক)।

আবার, $\frac{A}{C} = \frac{m}{n} \cdot \frac{B}{D},\ \therefore\ AD = \frac{m}{n}.BC$

$\therefore\ AD \propto BC\ \ (\because\ \frac{m}{n}$ ধ্রুবক)।

5. যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$, তবে $A \pm B \propto C$ এবং $AB \propto C^2$.

$\because\ A \propto C$ এবং $B \propto C,\ \therefore\ A = mC$ এবং $B = nC$ (m এবং n ধ্রুবক);

$\therefore\ A \pm B = (m \pm n)C,\ \therefore\ A \pm B \propto C$ ($\because\ m \pm n$ ধ্রুবক)।

আবার, $AB = mnC^2$; $\therefore\ AB \propto C^2$ ($\because\ mn$ ধ্রুবক)।

6. যদি $A \propto BC$, তবে $B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$.

$\because \quad A \propto BC, \quad \therefore \ A = mBC$ (m ধ্রুবক)

$\therefore \quad B = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{C}$ এবং $C = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{B}$.

$\therefore \quad B \propto \frac{A}{C}$ এবং $C \propto \frac{A}{B}$ ($\because \ \frac{1}{m}$ ধ্রুবক)।

135. ভেদঘটিত প্রশ্ন সমাধানের সাধারণ নিয়ম।

ভেদঘটিত প্রশ্নে তিন প্রকারের সর্ত দেওয়া থাকে। যথা,

(1) চলরাশিসমূহের ভেদের প্রকৃতি ;

(2) ভেদের কোন নির্দিষ্ট অবস্থায় সমুদয় চলরাশিগুলির অনুরূপ মান (Corresponding values) ;

(3) ভেদের অপর কোন নির্দিষ্ট অবস্থায় একটি চলরাশি ছাড়া অপর চলরাশিসমূহের অনুরূপ মান। ঐ একটি চলরাশির মান নির্ণয় করিতে হয়।

কাজেই সমাধানের নিয়ম হইবে এই :

(1) চলরাশিগুলির ভেদের প্রকৃতি অনুযায়ী ঐ চলরাশিগুলির সাহায্যে একটি সমীকরণ গঠন কর।

(2) এই সমীকরণটিতে দ্বিতীয় সর্তে প্রদত্ত সমুদয় চলরাশিগুলির অনুরূপ মানসমূহ বসাইয়া ভেদের ধ্রুবকটির মান নির্ণয় কর এবং এই মান সমীকরণটিতে বসাও। ইহাতে যে সমীকরণটি পাওয়া যাইবে, তাহাই হইবে চলরাশিগুলির সমীকরণ বা পারস্পরিক সম্বন্ধ (relation), যাহা চলরাশিগুলির যে কোন অনুরূপ মানসমূহ (Corresponding values of the variables) দ্বারা সিদ্ধ হইবে।

(3) এই শেষোক্ত সমীকরণটিতে তৃতীয় সর্তে প্রদত্ত মানগুলি বসাইয়া অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় কর। পৃথক পৃথক ভেদের জন্য পৃথক পৃথক ধ্রুবক ব্যবহার করিবে।

দ্রষ্টব্য। ভেদঘটিত প্রশ্নের সমাধানে নিম্নলিখিতগুলি ধরা চলিবে।

1. (*i*) x চল হইলে, $\frac{1}{x}$-ও চল, (*ii*) x এবং y চল হইলে, $x+y$ এবং $x-y$ও চল, ইত্যাদি।

2. (*i*) যদি $x \propto y$, তবে $y \propto x$, (*ii*) যদি $x \propto y$, তবে $\frac{1}{x} \propto \frac{1}{y}$, (*iii*) যদি $x \propto y$ এবং $y \propto z$ (বা $x \propto z$), তবে $x \propto y \propto z$, (*iv*) যদি $x \propto y \propto z$, তবে $x \propto y$ এবং $x \propto z$, (*v*) যদি $x \propto y$, তবে $x^2 \propto y^2$, $x^{\frac{1}{2}} \propto y^{\frac{1}{2}}$, $x^3 \propto y^3$, $x^{\frac{1}{3}} \propto y^{\frac{1}{3}}$, ইত্যাদি।

৪. দুইটি রাশি ভেদে অবস্থিত প্রমাণ করিতে, রাশিদ্বয়ের ভাগফল = ধ্রুবক দেখাইয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে। যেমন, $x^3+y^3+z^3 \propto 3xyz$ প্রমাণ করিতে, $\frac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}$ = ধ্রুবক দেখাইয়া প্রমাণ করা যায়।

উদা. 1. If $x \propto y$, and $x=2$ when $y=3$, find (*i*) the value of the constant of variation of x and y, (*ii*) the relation between x and y and (*iii*) the value of x when $y=6$.

$\because$ $x \propto y$ $\therefore$ $x=my$, যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

(*i*) $x=my$এ $x=2$, $y=3$ বসাইয়া,
$2=m.3$ $\therefore$ m বা ভেদের ধ্রুবক $=\frac{2}{3}$.

(*ii*) $x=my$এ $m=\frac{2}{3}$ বসাইয়া,
$x=\frac{2}{3}y$ এবং ইহাই x ও y এর পারস্পরিক সম্বন্ধ।

(*iii*) $x=\frac{2}{3}y$এ $y=6$ বসাইয়া,
$x=\frac{2}{3}.6$ $x=4$.

উদা. 2. If P varies inversely as Q, and P = 7 when Q = 3, find P when $Q=2\frac{1}{3}$. (C. U. 1919)

$$P \propto \frac{1}{Q} \qquad P=m.\frac{1}{Q}$$

$\therefore$ $PQ=m$ ··· (1), যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

(1) এ $P=7$, $Q=3$ বসাইয়া, $7.3=m$ $\therefore$ $m=21$.

(1) এ $m=21$ বসাইয়া, $PQ=21$ ··· (2)

P ও Qর এই পারস্পরিক সম্বন্ধ সর্বত্র বজায় থাকিবে ;

$\therefore$ (2)এ $Q=2\frac{1}{3}$ বসাইয়া, $P.2\frac{1}{3}=21$

$\therefore$ $P=21.\frac{3}{7}=9$.

উদা. 3. A varies as B and C jointly ; if A = 2, when $B=\frac{3}{5}$ and $C=\frac{10}{27}$, find C, when A = 54 and B = 3. (C. U. 1920)

সর্তানুসারে, $A=mBC$ ··· (1), যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

(1)এ $A=2$, $B=\frac{3}{5}$, $C=\frac{10}{27}$ বসাইয়া,

$2=m.\frac{3}{5}.\frac{10}{27}$ $\therefore$ $m=9$.

(1)এ $m=9$ বসাইয়া, $A=9BC$ ··· (2)

A, B এবং Cর এই পারস্পরিক সম্বন্ধ সর্বত্র বজায় থাকিবে ;

$\therefore$ (2)এ $A=54$, $B=3$ বসাইয়া, $54=9.3C$ $\therefore$ $C=2$.

উদা. 4. If x varies directly as y and inversely as z, and $x=a$, when $y=b$ and $z=c$, find the value of x when $y=b^2$ and $z=c^2$.

(C. U. 1877)

সর্তানুসারে, $x=m.\frac{y}{z}$ ⋯ (1), যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

(1)এ $x=a, y=b, z=c$ বসাইয়া, $a=\frac{mb}{c}$ $\therefore$ $m=\frac{ac}{b}$.

(1)এ $m=\frac{ac}{b}$ বসাইয়া, $x=\frac{acy}{bz}$ ⋯ (2)

x, y ও zএর এই পারস্পরিক সম্বন্ধ সর্বত্র বজায় থাকিবে ;

$\therefore$ (2)এ $y=b^2$, $z=c^2$ বসাইয়া, $x=\frac{acb^2}{bc^2}=\frac{ab}{c}$.

উদা. 5. If y varies as the sum of two quantities of which one varies directly as x and the other inversely as x, and if $y=7$ when $x=2$, and $y=8$ when $x=3$, find the equation connecting x and y.

প্রদত্ত সর্ত হইতে, $y \propto ax+\frac{b}{x}$, যেখানে a ও b ধ্রুবক।

$\therefore$ $y=k\left(ax+\frac{b}{x}\right)=kax+\frac{kb}{x}=mx+\frac{n}{x}$, যেখানে k ধ্রুবক, এবং $ka=m$ এবং $kb=n$ ধরায় m ও n ধ্রুবক।

এখন, $y=mx+\frac{n}{x}$এ যথাক্রমে $y=7$, $x=2$ এবং $y=8$, $x=3$ বসাইয়া,

$7=2m+\frac{1}{2}n$ বা, $4m+n=14$ ⋯ (1)

এবং $8=3m+\frac{1}{3}n$ বা, $9m+n=24$ ⋯ (2)

$\therefore$ (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $5m=10$ $\therefore$ $m=2$.

(1)এ $m=2$ বসাইয়া, $4.2+n=14$ $\therefore$ $n=6$.

$\therefore$ $y=mx+\frac{n}{x}$এ $m=2$, $n=6$ বসাইয়া,

$y=2x+\frac{6}{x}$ বা, $2x^2-xy+6=0$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 6. If $x=a+b+c$ where $a \propto y^2$, $b \propto y$ and c is a constant, and if $x=3, 6, 13$ when $y=1, 2, 3$ respectively, find the relation between x and y.

সর্তানুসারে, $x \propto py^2+qy+c$, যেখানে p, q ও c ধ্রুবক।

$\therefore \quad x = k(py^2 + qy + c) = kpy^2 + kqy + kc = ly^2 + my + n$, যেখানে k ধ্রুবক, এবং $kp = l$, $kq = m$ ও $kc = n$ ধরায় l, m ও n ধ্রুবক।

এখন, $x = ly^2 + my + n$এ x ও yর অনুরূপ তিন জোড়া মান বসাইয়া,

$$l + m + n = 3 \quad \cdots \quad (1)$$
$$4l + 2m + n = 6 \quad \cdots \quad (2)$$
$$9l + 3m + n = 13 \quad \cdots \quad (3)$$

এখন এই সমীকরণ তিনটি হইতে l, m, n নির্ণয় করিয়া লও।

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $3l + m = 3 \quad \cdots \quad (4)$

(3) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $5l + m = 7 \quad \cdots \quad (5)$

(5) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $2l = 4 \quad \therefore \; l = 2$

$\therefore$ (5) হইতে, $m = -3$ এবং (1) হইতে, $n = 4$.

$\therefore \quad x = ly^2 + my + n$ হইতে, $x = 2y^2 - 3y + 4$ এবং ইহাই x এবং yএর নির্ণেয় সম্বন্ধ।

উদা. 7. Given that $x + y \propto z + \frac{1}{z}$, and $x - y \propto z - \frac{1}{z}$, express x in terms of z if $z = 2$ when $x = 3$ and $y = 1$. (C. U. 1912)

$\because \quad x + y \propto z + \frac{1}{z}, \quad \therefore \quad x + y = m\left(z + \frac{1}{z}\right)$, যেখানে m ধ্রুবক $\cdots$ (1)

$\because \quad x - y \propto z - \frac{1}{z}, \quad \therefore \quad x - y = n\left(z - \frac{1}{z}\right)$, যেখানে n ধ্রুবক $\cdots$ (2)

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া, $x = \frac{1}{2}(m + n)z + \frac{1}{2}(m - n)\frac{1}{z} \quad \cdots \; \cdots \; (3)$

এখন, (1)এ $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ বসাইয়া, $4 = \frac{5}{2}m$, $\therefore \; m = \frac{8}{5}$

এবং (2)এ $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ বসাইয়া, $2 = \frac{3}{2}n$, $\therefore \; n = \frac{4}{3}$.

$\therefore$ (3)এ $m = \frac{8}{5}$, $n = \frac{4}{3}$ বসাইয়া, $x = \frac{1}{2}(\frac{8}{5} + \frac{4}{3})z + \frac{1}{2}(\frac{8}{5} - \frac{4}{3})\frac{1}{z}$

$\therefore \quad x = \frac{2}{15}\left(11z + \frac{1}{z}\right)$. $\therefore \; x$, z দ্বারা প্রকাশিত হইল।

উদা. 8. If $x \propto y$ এবং $y \propto z$, and if a, b, c and a', b', c' be two sets of values of x, y, z, prove that

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{aa' + bb' + cc'} = \frac{aa' + bb' + cc'}{a'^2 + b'^2 + c'^2}. \qquad \text{(C. U. 1922)}$$

$\because \quad x \propto y$ এবং $y \propto z$, $\therefore \; x \propto z$, (অনু. 134, সিদ্ধান্ত 3)

এখন, $\because x \propto z$, $\therefore x = mz$ এবং $\because y \propto z$, $\therefore y = nz$, যেখানে m ও n ধ্রুবক ;

$\therefore$ $x = mz$ এবং $y = nz$ হইতে,

$a = mc$, $b = nc$ এবং $a' = mc'$, $b' = nc'$

$\therefore$ $a^2 + b^2 + c^2 = c^2(m^2 + n^2 + 1)$,

$a'^2 + b'^2 + c'^2 = c'^2(m^2 + n^2 + 1)$,

এবং $aa' + bb' + cc' = cc'(m^2 + n^2 + 1)$.

$\therefore$ প্রদত্ত বাম পক্ষ $= \dfrac{c^2}{cc'} = \dfrac{c}{c'}$, এবং প্রদত্ত ডান পক্ষ $= \dfrac{cc'}{c'^2} = \dfrac{c}{c'}$.

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

উদা. 9. If A varies as B and also as C, show that A varies as B − C. (C. U. 1925)

$\because A \propto B$, $\therefore B \propto A$ (অনু. 134, সিদ্ধান্ত 1), $\therefore B = mA$, যেখানে m ধ্রুবক।

অনুরূপে, $\because A \propto C$, $\therefore C \propto A$, $\therefore C = nA$, যেখানে n ধ্রুবক।

$\therefore$ $B - C = mA - nA = (m - n)A$

$\therefore$ $B - C \propto A$ $\therefore$ $A \propto B - C$.

উদা. 10. If $x \propto 1/y$, when z is constant and $x \propto 1/z$, when y is constant, show that $x \propto 1/yz$, when both y and z vary.

$\because$ $x \propto 1/y$, যখন z ধ্রুবক, কাজেই যখন $1/z$ ধ্রুবক

এবং $x \propto 1/z$, যখন y ধ্রুবক, কাজেই যখন $1/y$ ধ্রুবক (দ্রষ্টব্য, অনু. 135)

$\therefore$ $x \propto 1/yz$, যখন $1/y$ এবং $1/z$ চল (অনু. 132)

$\therefore$ $x \propto 1/yz$, যখন y এবং z চল (দ্রষ্টব্য, অনু. 135)।

উদা. 11. If $x \propto y + z$, when $y - z$ is constant and $x \propto y - z$, when $y + z$ is constant, show that $x \propto y^2 - z^2$, when both y and z vary.

$\because$ $x \propto y + z$, যখন $y - z$ ধ্রুবক

এবং $x \propto y - z$, যখন $y + z$ ধ্রুবক ;

$\therefore$ $x \propto (y + z)(y - z)$ অর্থাৎ $x \propto y^2 - z^2$, যখন $y - z$ এবং $y + z$ চল (অনু. 132)

$\therefore$ $x \propto y^2 - z^2$, যখন y এবং z চল (দ্রষ্টব্য, অনু. 135)।

উদা. 12. If $A \propto B$ when C is constant, and $A \propto C$ when B is constant, then when $B \propto C$, $A \propto B^2$ or C^2.

সর্ত হইতে, $A \propto BC$, যখন B এবং C উভয়েই চল (অনু. 132) ;

$\therefore$ $A = mBC$, যেখানে m ধ্রুবক।

আবার, $\because$ $B \propto C$; $\therefore$ $B = nC$, যেখানে n ধ্রুবক।

$$\therefore \quad A = mBC = mB.\frac{B}{n} \; (\because \; B = nC)$$

$$= \frac{m}{n}B^2 ; \; \therefore \; A \propto B^2 \left(\because \; \frac{m}{n} \text{ ধ্রুবক}\right)।$$

আবার, $A = mBC = m.nC.C$ ($\because$ $B = nC$)

$$= mnC^2 ; \; \therefore \; A \propto C^2 \; (\because \; mn \text{ ধ্রুবক})।$$

উদা. 13. If $x + y \propto \frac{x}{y}$ and $x - y \propto \frac{y}{x}$, show that $x^2 - y^2$ is invariable.

$\because$ $x + y \propto \frac{x}{y}$, $\therefore$ $x + y = m.\frac{x}{y}$ ··· (1), যেখানে m ধ্রুবক।

$\because$ $x - y \propto \frac{y}{x}$, $\therefore$ $x - y = n.\frac{y}{x}$ ··· (2), যেখানে n ধ্রুবক।

$\therefore$ (1) কে (2) দ্বারা গুণ করিয়া, $x^2 - y^2 = mn =$ ধ্রুবক।

উদা. 14. If $x \propto \frac{1}{y}$, show that $x + y$ is least when $x = y$.

$\because$ $x \propto \frac{1}{y}$, $\therefore$ $x = m.\frac{1}{y}$ $\therefore$ $xy = m$, যেখানে m ধ্রুবক।

এখন, $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (x-y)^2 + 4m$.

এস্থলে $4m$ একটি ধ্রুবক, এবং $(x-y)^2$ এর ক্ষুদ্রতম মান 0, কারণ বর্গরাশি বলিয়া উহার কোন ঋণাত্মক মান হইতে পারে না।

$\therefore$ $(x+y)^2$ এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে, যদি $(x-y)^2 = 0$ হয় ;

$\therefore$ $x + y$ এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে যদি $x - y = 0$ হয়, অর্থাৎ যদি $x = y$ হয়।

উদা. 15. If $x \propto y$ and $y \propto z$, show that $ax^2 + by^2 + cz^2 \propto dyz + ezx + fxy$ where a, b, c, d, e, f are constants.

$\because$ $x \propto y$ এবং $y \propto z$, $\therefore$ $x \propto y \propto z$.

$\because$ $x \propto z$, $\therefore$ $x = mz$ এবং $\because$ $y \propto z$,

$\therefore$ $y = nz$, যেখানে m ও n ধ্রুবক।

$$\therefore \; ax^2 + by^2 + cz^2 = am^2z^2 + bn^2z^2 + cz^2 = (am^2 + bn^2 + c)z^2 \quad \cdots (1)$$

এবং $dyz + ezx + fxy = dnz^2 + emz^2 + fmnz^2 = (dn + em + fmn)z^2$ ··· (2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, $\dfrac{ax^2+by^2+cz^2}{dyz+ezx+fxy}=\dfrac{am^2+bn^2+c}{dn+em+fmn}=$ ধ্রুবক ;

$$\therefore \quad ax^2+by^2+cz^2 \propto dyz+ezx+fxy.$$

উদা. 16. If $A^2+B^2 \propto A^2-B^2$, show that $A \propto B$. (C. U. 1923)

$\therefore \quad A^2+B^2 \propto A^2-B^2, \quad \therefore \quad \dfrac{A^2+B^2}{A^2-B^2}=m$, যেখানে m ধ্রুবক।

$\therefore$ 'যোগ ও ভাগ ক্রিয়া' দ্বারা, $\dfrac{A^2}{B^2}=\dfrac{m+1}{m-1}$

$$\frac{A}{B}=\pm\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} \quad \therefore \quad A \propto B \quad \left(\because \pm\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} \text{ ধ্রুবক}\right)।$$

উদা. 17. If $x^2+y^2 \propto xy$, prove that $x+y \propto x-y$.

সর্ত হইতে, $x^2+y^2=mxy$, যেখানে m ধ্রুবক ; $\therefore \quad \dfrac{x^2+y^2}{2xy}=\dfrac{m}{2}$.

$\therefore$ 'যোগ ও ভাগ ক্রিয়া' দ্বারা, $\dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\dfrac{m+2}{m-2}$

$$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y}=\pm\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} \quad \therefore \quad x+y \propto x-y \quad \left(\because \pm\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} \text{ ধ্রুবক}\right)।$$

উদা. 18. If $x+y \propto x-y$, show that (i) $x^2+y^2 \propto xy$ and (ii) $ax+by \propto px+qy$, a, b, p, q being all constants. (C. U. 1936)

(i) $\because \; x+y \propto x-y, \quad \therefore \quad x+y=m(x-y)$, যেখানে m ধ্রুবক।

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $x^2+y^2+2xy=m^2(x^2+y^2-2xy)$

বা, $(m^2-1)(x^2+y^2)=2(m^2+1)xy$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\frac{2(m^2+1)}{m^2-1}.xy, \quad \therefore \quad x^2+y^2 \propto xy \left(\because \frac{2(m^2+1)}{m^2-1} \text{ ধ্রুবক}\right)।$$

(ii) $\because$ সর্ত হইতে, $x+y=m(x-y)$, যেখানে m ধ্রুবক ; $\therefore \; \dfrac{x+y}{x-y}=m$.

$\therefore$ 'যোগ ও ভাগ ক্রিয়া' দ্বারা, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{m+1}{m-1}=n$ (ধর) ; $\quad \therefore \quad x=ny$.

এখন, $\dfrac{ax+by}{px+qy}=\dfrac{any+by}{pny+qy}=\dfrac{an+b}{pn+q}$

= ধ্রুবক ($\because$ a, b, p, q ধ্রুবক এবং m ধ্রুবক বলিয়া n ধ্রুবক)।

$$\therefore \quad ax+by \propto px+qy.$$

উদা. 19. If $x+y$ varies as z when y is constant, and $x+z$ varies as y when z is constant, show that when both y and z vary $x+y+z$ varies as yz. (C. U. 1941)

$\because$ $x+y \propto z$ যখন y ধ্রুবক, $\therefore$ $x+y=mz$, যেখানে y ও m ধ্রুবক।

$\therefore$ $x+y+z=mz+z=(m+1)z$;

$\therefore$ $x+y+z \propto z$ যখন y ধ্রুবক ... (1)

আবার, $\because$ $x+z \propto y$ যখন z ধ্রুবক, $\therefore$ $x+z=ny$, যেখানে z ও n ধ্রুবক।

$\therefore$ $x+y+z=ny+y=(n+1)y$.

$\therefore$ $x+y+z \propto y$ যখন z ধ্রুবক ... (2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, $x+y+z \propto yz$ যখন y ও z উভয়েই চল (অনু. 132)।

উদা. 20. If x, y, z be variables such that $y+z-x$ is constant and $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$, show that $x+y+z \propto yz$. (P. U. 1940)

মনে কর, $y+z-x=$ ধ্রুবক m.

এখন, $\because$ $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$,

$\therefore$ $(z+x-y)(x+y-z)=nyz$, যেখানে n ধ্রুবক।

$\therefore$ $\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}=nyz$

বা, $x^2-(y-z)^2-4yz=nyz-4yz$

বা, $x^2-(y+z)^2=(n-4)yz$

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=(n-4)yz$

বা, $(x+y+z)(y+z-x)=(4-n)yz$

বা, $(x+y+z)m=(4-n)yz$ ($\because$ $y+z-x=m$)

$x+y+z=\frac{4-n}{m}\cdot yz$ $\qquad$ $x+y+z \propto yz$ ($\because$ $\frac{4-n}{m}$ ধ্রুবক)

Exercise 62

1. If x varies as y, and $x=3$ when $y=5$, find the relation between x and y.

2. If x varies inversely as y, and $x=3$ when $y=5$, find the equation connecting x and y.

3. If $x \propto y$, and $x=4$ when $y=3$, find x when $y=4\frac{1}{2}$.

4. If x varies inversely as y, and $x=a$ when $y=b$, find y when $x=c$.

5. A varies as B and C jointly. If $A=2$ when $B=3$ and $C=4$, find B when $A=\frac{2}{3}$ and $C=\frac{3}{4}$.

6. If x varies directly as y and inversely as z, and $x=a$, when $y=2b$ and $z=3c$, find the value of x when $y=2b^2$ and $z=c^2$.

7. If x varies directly as the square of y and inversely as the cube root of z, and if $x=2$ when $y=4$ and $z=8$, find the value of y when $x=3$ and $z=27$. (C. U. 1917)

8. If $x \propto y$, $y \propto z$ and $z \propto x$, find the relation between the constants of variation.

9. If $a^2 \propto bc$, $b^2 \propto ca$ and $c^2 \propto ab$, find the relation between the constants of variation.

10. If y varies as the sum of two quantities of which one varies directly as x and the other inversely as x, and $y=5$ when $x=3$ and $y=7$ when $x=6$, find the equation connecting x and y.

11. If $x \propto \alpha+\beta+\gamma$ of which $\alpha \propto y^2$, $\beta \propto y$ and γ is a constant and $x=2, 9, 22$ when $y=1, 2, 3$ respectively, find the relation between x and y.

12. Given that $x+y \propto z+\frac{1}{z}$ and $x-y \propto z-\frac{1}{z}$ express x in terms of z if $z=2$ when $x=3$ and $y=1$. (C. U. 1912)

13. If $x \propto y \propto z$ and if a, b, c and a', b', c' be two sets of values of x, y, z, show that

$$aa'+bb'+cc' = \frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$ (C. U. 1922)

14. (*i*) If $a \propto b$ and $b \propto c$, then $a \propto c$.

(*ii*) If $a \propto b$ and $c \propto d$, then $ac \propto bd$ and $ad \propto bc$.

(*iii*) If $a \propto b$ and $a \propto c$, then $a \propto b-c$. (C. U. 1925)

(*iv*) If $a \propto b$, show that $a^2-b^2 \propto ab$. (B. U. 1927)

[$\because a \propto b$, $\therefore a=mb$ (m ধ্রুবক) ; $\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$=(a+a/m)(mb-b)=$ ইত্যাদি ।]

15. (*i*) If $x \propto 1/y$, when z is constant and $x \propto 1/z$, when y is constant, show that $x \propto 1/yz$, when both y and z vary.

(*ii*) If $x \propto y+z$, when $y-z$ is constant and $x \propto y-z$, when $y+z$ is constant, show that $x \propto y^2-z^2$ when both y and z vary.

(*iii*) If $A \propto B$ when C is constant and $A \propto C$ when B is constant, then when $B \propto C$, $A \propto B^2$ or C^2.

16. (*i*) If $a \propto bc$ and $b \propto ca$, then c is constant.

(*ii*) If $a/b \propto a+b$ and $b/a \propto a-b$, then a^2-b^2 is invariable.

(*iii*) If $a \propto \frac{1}{b}$, then the value of $a+b$ is minimum when $a=b$.

17. (*i*) If $x \propto y \propto z$, then $x^2+y^2+z^2 \propto yz+zx+xy$.

(*ii*) If $x \propto y \propto z$, then $x^3+y^3+z^3 \propto 3xyz$.

(*iii*) If $x \propto y$ and $y \propto z$, then $x+y+z \propto (yz)^{\frac{1}{2}}+(zx)^{\frac{1}{2}}+(xy)^{\frac{1}{2}}$.

18. (*i*) If $lx+my \propto px+qy$, then $x \propto y$.

(*ii*) If $lx^2+my^2 \propto px^2+qy^2$, then $x \propto y$.

(*iii*) If $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$, then $x \propto y$.

(*iv*) If $x^3+\frac{1}{y^3} \propto x^3-\frac{1}{y^3}$, then $x \propto \frac{1}{y}$.

19. (*i*) If $x^2+y^2 \propto xy$, then $x+y \propto x-y$.

(*ii*) If $x+y \propto x-y$, then $x^2+y^2 \propto xy$ and $ax+by \propto px+qy$, a, b, p, q being all constants. (C. U. 1936)

20. (*i*) If $x+y \propto z$ when y is constant, and $x+z \propto y$ when z is constant, then when both y and z vary, $x+y+z \propto yz$. (C. U. 1941)

(*ii*) If x, y, z be variables such that $y+z-x$ is constant and $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$, show that $x+y+z \propto yz$. (P. U. 1940)

136. ভেদের সাহায্যে বিবিধ প্রশ্নের সমাধান প্রণালী উদাহরণ দ্বারা দেখান গেল

Ex. 21. If 5 men take 8 days to plough 10 acres of land, find how long will 20 men take to plough 30 acres?

লোকসংখ্যাকে x, দিনসংখ্যাকে y এবং একরসংখ্যাকে z দ্বারা সূচিত কর। প্রশ্ন হইতে দেখা যায়, দিনসংখ্যা y ধ্রুবক থাকিলে, লোকসংখ্যা x এবং একরসংখ্যা z সরলভেদে থাকে ;

$\therefore$ $x \propto z$, যখন y ধ্রুবক।

আবার, ঐকরসংখ্যা z ধ্রুবক থাকিলে, লোকসংখ্যা x এবং দিনসংখ্যা y ব্যস্ত ভেদে থাকে ;

$\therefore \quad x \propto 1/y$, যখন z ধ্রুবক ।

$\therefore \quad x \propto z/y$, যখন y ও z চল ।

$\therefore \quad x = mz/y$, যেখানে m ধ্রুবক ।

$\therefore \quad xy = mz \quad \cdots \quad (1)$

(1)এ $x=5,\ y=8,\ z=10$ বসাইয়া, $5.8=m.10 \quad \therefore \quad m=4$

$\therefore$ (1)এ $m=4$ বসাইয়া, $xy=4z \quad \cdots \quad (2)$

x, y ও z এর এই সম্বন্ধ সর্বত্র বজায় থাকিবে ;

$\therefore$ (2)এ $x=20,\ z=30$ বসাইয়া, $20y=4.30 \quad \therefore \quad y=6.$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় = 6 দিন ।

উদা. 22. Two globes of gold have their radii equal to r_1 and r_2. They are melted and formed into a single globe. Find its radius. (The volume of a globe varies as the cube of the radius.) (C.U. 1931)

মনে কর, r_1 ও r_2 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকদ্বয়ের ঘনফল যথাক্রমে V_1 ও V_2 এবং তৃতীয় গোলকটির ব্যাসার্ধ r_3 ও ঘনফল V_3.

এখন, $\because$ ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3,

$\therefore \quad V_1 = mr_1^3,\ V_2 = mr_2^3,\ V_3 = mr_3^3$, যেখানে একই m ভেদের ধ্রুবক ।

আবার, $\because \quad V_3 = V_1 + V_2 \ ; \quad \therefore \quad mr_3^3 = mr_1^3 + mr_2^3$

$\therefore \quad r_3^3 = r_1^3 + r_2^3 \ ; \quad \therefore \quad r_3 = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}$.

উদা. 23. The time for one complete oscilation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 40 inches oscilates once in a second, what is the length of the pendulum that oscilates once in $2\frac{1}{2}$ seconds. (C. U. 1913)

দোলকের দৈর্ঘ্যকে l ইঞ্চি এবং একবার দুলিবার সময়কে t সেকেণ্ড দ্বারা সূচিত কর ।

এখন, $\because \quad t \propto l^{\frac{1}{2}}, \quad \therefore \quad t = ml^{\frac{1}{2}} \cdots (1)$, যেখানে m ধ্রুবক ।

(1)এ $t=1,\ l=40$ বসাইয়া, $1 = m.40^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad m = \dfrac{1}{40^{\frac{1}{2}}}$

(1)এ $m = \frac{1}{40^{\frac{1}{2}}}$ বসাইয়া, $t = \left(\frac{l}{40}\right)^{\frac{1}{2}}$ (2)

t ও l এর এই সম্বন্ধ সর্বত্র বজায় থাকিবে

$\therefore$ (2)এ $t = 2\frac{1}{2}$ বসাইয়া, $\frac{5}{2} = \left(\frac{l}{40}\right)^{\frac{1}{2}}$ বা, $\frac{25}{4} = \frac{l}{40}$ $l = 250.$

দোলকটির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 250 ইঞ্চি।

উদা. 24. The illumination from a source of light varies inversely as the square of the distance. A book is at a distance of 4 inches from a source of light. Find how much further the book must be removed away from the source so that it may receive one-third as much light.

মনে কর, উৎপত্তিস্থলের আলো = L এবং আলোর উৎপত্তিস্থল হইতে বহিখানির দ্বিতীয় অবস্থানের দূরত্ব = x ইঞ্চি।

বহিখানির প্রথম অবস্থানের আলো $= \frac{m}{4^2}.L$, এবং দ্বিতীয় অবস্থানের আলো $= \frac{m}{x^2}.L$, যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

সর্তানুসারে, $\frac{m}{4^2}.L = \frac{3m}{x^2}.L$ $\therefore$ $\frac{1}{4^2} = \frac{3}{x^2}$

$x^2 = 3.4^2$ $x = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ বহিখানিকে আরও $(4\sqrt{3} - 4)$ ইঞ্চি বা $4(\sqrt{3} - 1)$ ইঞ্চি দূরে সরাইতে হইবে।

উদা. 25. The mass m of a body varies as density d when the volume v is constant and varies as the volume v when density d is constant. If unit mass be defined as mass of a body of unit volume and unit density, show that $m = vd$. (C. U. 1929)

$\because$ $m \propto d$, যখন v ধ্রুবক এবং $m \propto v$, যখন d ধ্রুবক

$\therefore$ $m \propto vd$, যখন v ও d চল (অনু. 132)।

$\therefore$ $m = nvd \cdots (1)$, যেখানে n ধ্রুবক।

$\therefore$ (1)এ, সর্তানুসারে, $m = 1, v = 1, d = 1$ বসাইয়া, $1 = n.1.1$ $\therefore n = 1.$

$\therefore$ (1)এ $n = 1$ বসাইয়া, $m = vd.$

উদা. 26. The expenses of a boarding house are partly constant and partly vary as the number of boarders. When the number of boarders are 40 and 50, the expenses are Rs. 1450 and Rs. 1750 respectively. Find the expenses for 75 boarders.

মোট খরচকে E টাকা, ধ্রুবক খরচকে C টাকা এবং বাসিন্দার সংখ্যাকে B দ্বারা সূচিত কর।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $E \propto C + pB$, যেখানে c ও p ধ্রুবক (উদা. 6 দেখ।)।

$\therefore$ $E = k(c + pB) = kc + kpB = m + nB$, যেখানে k ধ্রুবক এবং $kc = m$ এবং $kp = n$ ধরায় m ও n ধ্রুবক।

$E = m + nB$এ E এবং Bর অনুরূপ দুই জোড়া মান বসাইয়া,

$$m + 40n = 1450 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $m + 50n = 1750 \quad \cdots \quad (2)$

এখন, এই সমীকরণদ্বয় হইতে m ও n নির্ণয় করিয়া লও।

$\therefore$ (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $10n = 300$ $\therefore$ $n = 30$

$\therefore$ (1) হইতে, $m = 250$

$\therefore$ $E = m + nB$ হইতে, $E = 250 + 30.75 = 2500$

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= 2500$ টাকা।

উদা. 27. A locomotive engine without carriages can run 48 miles an hour, and its speed is diminished by an amount which varies as the square root of the number of carriages attached. With 9 carriages its speed is diminished by 18 miles. Find the minimum number of carriages which the engine fails to move.

ঘণ্টাপ্রতি গতির হ্রাসকে D মাইল দ্বারা এবং গাড়ীর সংখ্যাকে C দ্বারা সূচিত করিলে, $\because$ $D \propto C^{\frac{1}{2}}$ $\therefore$ $D = m.C^{\frac{1}{2}}$, যেখানে m ধ্রুবক।

শর্ত হইতে, $18 = m.9^{\frac{1}{2}}$ $\therefore$ $m = 6$ $\therefore$ $D = 6C^{\frac{1}{2}} \quad \cdots \quad (1)$

$\therefore$ $D = 48$ হইলে, $48 = 6C^{\frac{1}{2}}$ $\therefore$ $C = 64$

$\therefore$ গাড়ীর সংখ্যা 64 হইলে, এঞ্জিনখানি গতিহীন হইবে।

$\therefore$ গাড়ীর নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা $= 64$.

উদা. 28. The consumption of coal by an engine varies as the square of the velocity. When the consumption of coal is 36 mds.

per hour, the velocity is 30 miles per hour. The price of coal per md. is Re. 1 and the other expenses of the engine per hour is Rs. 16. The engine makes a journey of 100 miles at the least possible cost. Find the velocity and the least cost.

মনে কর, প্রতি ঘণ্টায় কয়লা পোড়ে C মণ এবং প্রতি ঘণ্টায় বেগ v মাইল,

$\because$ $C \propto v^2$, $\therefore$ $C = mv^2$ (m ধ্রুবক) ; $\therefore$ $36 = m.30^2$, $\therefore$ $m = \frac{1}{25}$.

$\therefore$ $C = mv^2$ হইতে, $C = \frac{1}{25}v^2$.

আবার, প্রতি ঘণ্টায় v মাইল গতিতে 100 মাইল যাইতে লাগে $\frac{100}{v}$ ঘণ্টা এবং 1 টাকা মণ দরে C মণ কয়লার দাম C টাকা।

$\therefore$ 100 মাইল যাওয়ার খরচ $= (C$ টাকা $+ 16$ টাকা$)\frac{100}{v} = (\frac{1}{25}v^2 + 16)\frac{100}{v}$ টাকা

$= 4\left(v + \frac{400}{v}\right)$ টাকা $= 4\left\{\left(\sqrt{v} - \frac{20}{\sqrt{v}}\right)^2 + 40\right\}$ টাকা ;

$\therefore$ $\sqrt{v} - \frac{20}{\sqrt{v}} = 0$ হইলে, অর্থাৎ $v = 20$ হইলে 100 মাইল যাওয়ার খরচ ক্ষুদ্রতম হইবে এবং তখন ঐ ক্ষুদ্রতম খরচ হইবে $4(0 + 40)$ টাকা বা 160 টাকা।

Exercise 63

1. The area of a triangle varies jointly as the base and the altitude. If the area of a triangle whose base is 16 ft. and altitude 9 ft. is 72 sq. ft., find the area of a triangle whose base is 18 ft. and altitude 13 fit.

2. The interest on a principal varies jointly as the principal, the rate of interest and time. If the interest on Rs. 100 for 1 year at 5% is Rs. 5, find the interest on Rs. 450 at 4% for $3\frac{1}{2}$ years.

3. How long will 25 men take to plough 30 acres, if 5 men take 9 days to plough 10 acres of land. (C. U. 1934)

4. If 10 men earn 45 rupees in 3 days, how much will 12 men earn in 5 days ?

5. The area of a circle varies as the square of its radius. Three circular plates of the same thickness and radii 12, 16 and 21 ft. respectively are melted and formed into one circular plate of the same thickness. Find its radius.

6. The volume of a sphere varies as the cube of its radius. Three solid spheres of silver whose radii are 3, 4 and 5 inches respectively are melted and formed into one solid sphere. Find the radius of the sphere.

7. The volume of a sphere varies as the cube of the radius and the surface of a sphere varies as the square of the radius. Show that the square of the volume varies as the cube of the surface (C. U. 1924)

8. The time for one complete oscilation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 18 inches oscilates once in $1\frac{1}{2}$ seconds, find the length of the pendulum which oscilates once in 2 seconds.

9. The time for one complete oscilation of a pendulum varies as the square root of its length. If a pendulum of length 28 inches makes 3 complete oscilations in 7 seconds, find the time of a complete oscilation of a pendulum of length 63 inches.

10. The illumination from a source of light varies inversely as the square of the distance. A book is at a distance of 6 inches from a lamp. Find how much further the book must be removed away from the lamp so that the book may receive four-ninths as much light.

11. The distance through which a body falls from rest varies as the square of the time. If a body falls 64 feet in 2 seconds, how far does it fall in 3 seconds ?

12. The pressure in a liquid varies as the depth when the density is constant, and it varies as the density when the depth is constant. The pressure is 1, when the depth is 32 and the density is 1. Find the depth at which the pressure is 2 when the density is 16. (C. U. 1921)

13. The volume of a cylinder varies as the square of the radius of the base when the height is the same, and as the height when the base is the same. The volume is 88 cubic feet when the height is 7 ft. and the radius of the base is 2 ft. What will be the height of a cylinder on a base of radius 9 ft. when the volume is 396 cubic feet ?

14. Supposing that the velocity of a steamer varies inversely as the area of its greatest section when the tonnage is constant and inversely as the tonnage when the area is constant and that a steamer whose section is 200 sq. ft. and tonnage 1000 goes 15 miles per hour, find the velocity of a steamer whose section is 250 sq. ft. and tonnage 1200. (B. U. 1893)

15. The expenses of a family are partly constant and partly varies as the price of rice. When rice sells at Rs. 17 and Rs. 29 per md. the expenses are Rs. 421 and Rs. 577 respectively. Find the expenses of the family when rice sells at Rs. 22 per md.

16. The expenses of a hostel are partly constant and partly vary as the number of inmates. The expenses were Rs. 2000 when the inmates were 120, and Rs. 1700 when the inmates were 100. Find the number of inmates when the expenses were Rs. 1880. (B. U. 1927)

17. The speed of a locomotive engine without carriages is 45 miles per hour and the speed is diminished by an amount which varies as the cube root of the number of carriages attached. With 8 carriages the speed is 27 miles. Find the maximum number of carriages which the engine can move.

18. The consumption of coal by an engine varies as the square of the velocity. When the consumption of coal is 45 mds. per hour, the velocity is 30 miles per hour. The price of coal is 8 as. per md. and the other expenses of the engine is Rs. 10 per hour. The engine makes a journey of 360 miles at the least possible cost. Find the velocity and the least cost.

লগারিদ্‌ম্

137. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. এস্থলে ঘাত 2^3এর 2 নিধান (base) এবং 3 সূচক (index)। 2, 3 ও 8 এর ভিতর 2 ও 3 দেওয়া থাকিলে 8 নির্ণয় করা যায় ($\because 2 \times 2 \times 2 = 8$) এবং 8 ও 3 দেওয়া থাকিলে 2 নির্ণয় করা যায় ($\because \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2.2.2} = 2$) কিন্তু 8 ও 2 দেওয়া থাকিলে, এইরূপ সহজ স্থলে পরীক্ষা দ্বারা 3 নির্ণয় করা যায়; এই 3 নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়া সম্বন্ধে এযাবৎ কোন আলোচনা হয় নাই।

লগারিদম্ (logarithm বা সংক্ষেপে log) এর প্রক্রিয়ায় এই 3 নির্ণয় করা হইয়া থাকে। log লিখিতে ছোট হাতের l ব্যবহার করিবে এবং পরে কোন বিন্দু বসাইবে না।

$\because$ $2^3=8$, $\therefore$ নিধান 2কে সূচক 3এ উন্নীত করিলে 8 হয়। এস্থলে আমরা বলি 8 এর লগারিদম্ সূচক 3 যখন নিধান 2. ইহাকে লেখা হয় $\log_2 8=3$ এবং পড়া হয় 8 এর 2-নিধানীয় লগ 3 (log of 8 to the base 2 is 3)।

$\because$ $3^4=81$, $\therefore$ 81এর লগ $=4$ যখন নিধান $=3$. ইহাকে লেখা হয় $\log_3 81=4$ এবং পড়া হয় 81এর 3-নিধানীয় লগ 4.

অনুরূপে, $a^x=n$ হইলে, nএর লগ $=x$ যখন নিধান $=a$. ইহাকে লেখা হয় $\log_a n=x$ এবং পড়া হয় x এর a-নিধানীয় লগ n.

বিপরীতক্রমে, $\log_2 8=3$ হইলে $2^3=8$. $\log_3 81=4$ হইলে $3^4=81$ এবং $\log_a n=x$ হইলে $a^x=n$.

লগের সংজ্ঞা। $\because$ $a^x=n$ হইলে, $\log_a n=x$. অতএব,

কোন নিধানের (aর) কোন ঘাত (a^x) কোন সংখ্যার (nএর) সমান হইলে, ঐ সংখ্যাটির (nএর) ঐ (a) নিধানীয় লগ ঐ ঘাতের সূচক (x) হইবে। যেমন,

(*i*) $\because$ $3^2=9$, $\therefore$ $\log_3 9=2$.

(*ii*) $\because$ $5^3=125$, $\therefore$ $\log_5 125=3$.

(*iii*) $\because$ $4^{\frac{1}{2}}=2$, $\therefore$ $\log_4 2=\frac{1}{2}$.

(*iv*) $\because$ $8^{\frac{2}{3}}=4$, $\therefore$ $\log_8 4=\frac{2}{3}$.

(*v*) $\because$ $2^{-4}=\frac{1}{2^4},=\frac{1}{16}$ $\therefore$ $\log_2(\frac{1}{16})=-4$.

(*vi*) $\because$ $9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{27}$, $\therefore$ $\log_9(\frac{1}{27})=-\frac{3}{2}$.

মন্তব্য। x এর কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বাস্তব (real) মান দ্বারা $a^x=-n$ (যেখানে a ধনাত্মক বাস্তব রাশি) সিদ্ধ হয় না; সুতরাং নিধান ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে, ঋণাত্মক রাশির লগ কাল্পনিক (imaginary) হয়।

138. কতিপয় বিশেষ স্থল।

(*i*) $1^0=1, 2^0=1, 3^0=1$, ইত্যাদি ; $\therefore$ $\log_1 1=0$. $\log_2 1=0$, $\log_3 1=0$, ইত্যাদি।

$\therefore$ 0 ও ∞ ছাড়া, যে কোন নিধানের জন্য 1 এর লগ $=0$.

দ্রষ্টব্য। $1^1=1$, $1^2=1$, $1^3=1$, ইত্যাদি হইলেও $\log_1 1$ এর মান 1, 2, 3, ইত্যাদি নহে।

(*ii*) $16^1 = 16, 4^2 = 16$ এবং $2^4 = 16$;

$\therefore$ $\log_{16}16 = 1, \log_4 16 = 2$ এবং $\log_2 16 = 4$.

$\therefore$ 1 ছাড়া, অপর যে কোন সংখ্যার লগ বিভিন্ন নিধানের জন্য বিভিন্ন।

কাজেই 1 ছাড়া, অপর কোন সসীম সংখ্যার লগ নির্ণয় করিতে হইলে নিধান জানা আবশ্যক।

(*iii*) $2^1 = 2, 3^1 = 3, 4^1 = 4$; $\therefore$ $\log_2 2 = 1, \log_3 3 = 1, \log_4 4 = 1$.

$\therefore$ 1 ছাড়া, অপর যে কোন নিধানের সমান সংখ্যার লগ = 1.

(*iv*) $\because$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $\therefore$ $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$

তদ্রূপ, $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $\therefore$ $\log_2(\frac{1}{2}) = -1$; $(\frac{1}{5})^{-1} = 5$, $\therefore$ $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$;

$\therefore$ নিধানের অন্যোন্যকের লগ = -1.

(*v*) $a<1$ হইলে $a^\infty = 0$ এবং $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{0} = \infty$;

$\therefore$ $\log_a 0 = \infty$ এবং $\log_a \infty = -\infty$.

যেমন, $\log_{\frac{2}{3}} 0 = \infty$ এবং $\log_{\frac{2}{3}} \infty = -\infty$.

(*vi*) $a>1$ হইলে $a^\infty = \infty$ এবং $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$;

$\therefore$ $\log_a \infty = \infty$ এবং $\log_a 0 = -\infty$.

যেমন, $\log_2 \infty = \infty$ এবং $\log_2 0 = -\infty$.

(*vii*) $\because$ $a^x = n$ হইলে, $x = \log_a n$;

$\therefore$ x এর এই মান $a^x = n$ এ বসাইয়া, $a^{\log_a n} = n$.

যেমন, aর স্থলে 2 এবং n এর স্থলে 8 বসাইলে,

$2^{\log_2 8} = 8$ হইবে ; কারণ, $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$.

139. লগ বিষয়ক সূত্র।

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$.

প্রমাণ। মনে কর, $\log_a(mn) = x, \log_a m = y, \log_a n = z$;

$\therefore$ $a^x = mn, a^y = m, a^z = n$;

$\therefore$ $a^x = m.n = a^y.a^z = a^{y+z}$ $\therefore$ $x = y + z$

$\therefore$ $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$.

$\therefore$ **দুইটি রাশির গুণফলের লগ = রাশি দুইটির লগদ্বয়ের সমষ্টি।**

(ii) $\log_a(mnp\cdots)=\log_a m+\log_a n+\log_a p+\cdots$.

মনে কর, $\log_a(mnp\cdots)=x$, $\log_a m=y$, $\log_a n=z$, $\log_a p=v,\cdots$

$\therefore\quad a^x=mnp\cdots,\ a^y=m,\ a^z=n,\ a^v=p,\cdots$

$\therefore\quad a^x=m.n.p.\cdots=a^y\,a^z.a^v.\cdots=a^{y+z+v+\cdots}$

$\therefore\quad x=y+z+v+\cdots$

$\therefore\quad \log_a(mnp\cdots)=\log_a m+\log_a n+\log_a p+\cdots$.

(iii) $\log_a(m^n)=n\log_a m$.

মনে কর, $\log_a(m^n)=x$, $\log_a m=y$;

$\therefore\quad a^x=m^n,\ a^y=m$;

$\therefore\quad a^x=m^n=(a^y)^n=a^{ny}\quad\therefore\ x=ny$

$\therefore\quad \log_a(m^n)=n\log_a m$.

অথবা, $\log_a(m^n)=\log_a(m.m.m\cdots$ n-বার $m)$

$=\log_a m+\log_a m+\log_a m+\cdots$ n-বার $\log_a m$

$=n\log_a m$.

$\therefore$ **কোন সংখ্যার ঘাতের লগ = ঘাতের সূচক × ঐ সংখ্যার লগ।**

(iv) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$.

মনে কর, $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=x$, $\log_a m=y$, $\log_a n=z$

$\therefore\quad a^x=\frac{m}{n},\ a^y=m,\ a^z=n$;

$\therefore\quad a^x=\frac{m}{n}=\frac{a^y}{a^z}=a^{y-z}$

$\therefore\quad x=y-z$

$\therefore\quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$.

$\therefore$ **একটি ভগ্নাংশের লগ = ভগ্নাংশটির লবের লগ − হরের লগ।**

140. নিধানের পরিবর্তন। একই রাশির দুইটি পৃথক নিধানীয় লগের পারস্পরিক সম্বন্ধ নিম্নের সূত্রটি হইতে পাওয়া যায়।

$$\log_a m=\log_b m\times\log_a b.$$

মনে কর, $\log_a m=x$, $\log_b m=y$, $\log_a b=z$.

$\therefore\quad a^x=m,\ b^y=m,\ a^z=b$;

$$\therefore \quad a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz} \quad \therefore \ x = yz$$

$$\therefore \quad \log_a m = \log_b m \times \log_a b.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\mathbf{\log_b a \times \log_a b = 1}$.

সূত্র $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$এ $m = a$ বসাইয়া,

$\log_a a = \log_b a \times \log_a b$; কিন্তু $\log_a a = 1$,

$$\therefore \quad \log_b a \times \log_a b = 1.$$

অথবা, স্বাধীনভাবে, মনে কর, $\log b^a = x$, $\log_a b = y$

$\therefore \quad b^x = a, \ a^y = b$; $\quad \therefore \quad a = b^x = (a^y)^x = a^{xy}$

$\therefore \quad xy = 1$; $\quad \therefore \quad \log_b a \times \log_a b = 1.$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর, $\log_b a = 1/\log_a b$, $\log_a b = 1/\log_b a$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\mathbf{\log_a m = \log_b m \times \dfrac{1}{\log_b a}}$.

কারণ, সূত্র $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$এ $\log_a b$র তুল্যমান $1/\log_b a$ বসাইলেই উহা পাওয়া যায়।

কাজেই m ও aর b-নিধানীয় লগদ্বয় জানা থাকিলে, m এর a-নিধানীয় লগ পাওয়া যায়। এস্থলে $1/\log_b a$ কে $\log_a m$ এর নিধান aর **মডিউলাস** (Modulus) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. $\mathbf{\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1}$.

$\because \quad \log_b a = \log_c a \times \log_b c$ (অনু. 140) ;

$\therefore$ প্রদত্ত বাম পক্ষ $= \log_c a \times \log_b c \times \log_c b \times \log_a c$

$= (\log_c a \times \log_a c) \times (\log_b c \times \log_c b)$

$= 1 \times 1 = 1$ (অনুসিদ্ধান্ত 1)।

অথবা, স্বাধীনভাবে, মনে কর, $\log_b a = x$, $\log_c b = y$, $\log_a c = z$;

$\therefore \quad b^x = a, \ c^y = b, \ a^z = c$;

$\therefore \quad a = b^x = (c^y)^x = c^{xy} = (a^z)^{xy} = a^{xyz}$

$\therefore \quad xyz = 1$; $\quad \therefore \quad \log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1.$

মন্তব্য। এই প্রণালীই সুবিধাজনক।

141. সাধারণ লগারিদম্। 10 কে নিধান ধরিলে কোন সংখ্যার যে লগারিদম্ হয়, তাহাকে **সাধারণ লগারিদম্** (Common logarithm) বলে। লিখিবার সুবিধার জন্য সাধারণতঃ 10 কে উহ্য রাখা হয়। সুতরাং কোন লগারিদমে নিধানের উল্লেখ না থাকিলে নিধান 10 উহ্য রাখা হইয়াছে বুঝিবে। যদি কোন প্রশ্নে সমুদয় লগগুলির একই নিধান থাকে, তবে সুবিধার জন্য ঐ নিধানকে উহ্য রাখা চলে। লগ বিষয়ক সূত্রগুলির প্রয়োগ প্রণালী উদাহরণ দ্বারা প্রদর্শিত হইল।

উদা. 1. Find the logarithm of 8000 to the base $2\sqrt{5}$.

নির্ণেয় লগারিদ্‌ম্ যেন x. তাহা হইলে,

$$(2\sqrt{5})^x = 8000 \text{ বা, } (2^2.5)^{\frac{x}{2}} = 8000$$

বা, $(20)^{\frac{x}{2}} = 20^3 \quad \therefore \quad \frac{x}{2} = 3 \quad \therefore \quad x = 6.$

$\therefore$ নির্ণেয় লগারিদ্‌ম্ $= 6.$

উদা. 2. Prove that $\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3.$

$\log(1+2+3) = \log 6 = \log(1 \times 2 \times 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3.$

উদা. 3. Prove that $\log 15 = 1 - \log 2 - \log 3.$

$$\log 15 = \log(5 \times 3) = \log 5 + \log 3$$
$$= \log(\tfrac{10}{2}) + \log 3 = \log 10 - \log 2 + \log 3$$
$$= 1 - \log 2 + \log 3 \quad [\because \log 10 = \log_{10} 10]$$

উদা. 4. Prove that $\log(\frac{4}{5}) = 3\log 2 - 1.$

$$\log(\tfrac{4}{5}) = \log 4 - \log 5 = \log(2^2) - \log(\tfrac{10}{2})$$
$$= 2\log 2 - \log 10 + \log 2 = 3\log 2 - 1.$$

উদা. 5. Show that

$\log_{10} 2 + 16\log_{10}\frac{16}{15} + 12\log_{10}\frac{25}{24} + 7\log_{10}\frac{81}{80} = 1.$ (C. U. 1940)

বাম পক্ষ $= \log 2 + 16\{\log 2^4 - \log(3 \times 5)\}$
$+ 12\{\log 5^2 - \log(2^3 \times 3) + 7\{\log 3^4 - \log(2^4 \times 5)\}$
$= \log 2 + 64\log 2 - 16\log 3 - 16\log 5$
$+ 24\log 5 - 36\log 2 - 12\log 3$
$+ 28\log 3 - 28\log 2 - 7\log 5$
$= \log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5) = \log 10 = 1.$

অথবা, বাম পক্ষ $= \log 2 + \log(\frac{16}{15})^{16} + \log(\frac{25}{24})^{12} + \log(\frac{81}{80})^7$

$$= \log\left\{2 \times \left(\frac{2^4}{3 \times 5}\right)^{16} \times \left(\frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)^{12} \times \left(\frac{3^4}{2^4 \times 5}\right)^7\right\}$$
$$= \log\left\{2 \times \frac{2^{64}}{3^{16} \times 5^{16}} \times \frac{5^{24}}{2^{36} \times 3^{12}} \times \frac{3^{28}}{2^{28} \times 5^7}\right\}$$
$$= \log(2 \times 5) = \log 10 = 1.$$

উদা. 6. If $a^2 + b^2 = 11ab$, then $\log\{\frac{1}{3}(a-b)\} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$

সর্ত হইতে, $a^2 + b^2 - 2ab = 9ab$ বা, $\frac{(a-b)^2}{9} = ab \quad \therefore \quad \frac{1}{3}(a-b) = (ab)^{\frac{1}{2}}.$

$\therefore$ উভয় পক্ষের লগ লইয়া, $\log\{\frac{1}{3}(a-b)\} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$

উদা. 7. If $\log_a m - \log_a n = \log_a(m-n)$, find m in n.

সর্ত হইতে, $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m-n) \quad \therefore \quad \frac{m}{n} = m - n$

বা, $mn - n^2 = m$ বা, $m(n-1) = n^2 \quad \therefore \quad m = \frac{n^2}{n-1}$.

উদা. 8. If the logarithm of x^2 to the base y^3 be equal to the logarithm of y^4 to the base x^6, find the value of each logarithm.

মনে কর, প্রত্যেকটি লগারিদম্ $= a$. তাহা হইলে,

$\log_{y^3} x^2 = a$ এবং $\log_{x^6} y^4 = a$

$\therefore \quad (y^3)^a = x^2$ বা, $y^{3a} = x^2$ এবং $(x^6)^a = y^4$ বা, $x^{6a} = y^4$ বা, $x^2 = y^{\frac{4}{3a}}$

$\therefore \quad y^{3a} = x^2 = y^{\frac{4}{3a}}$ বা, $y^{3a} = y^{\frac{4}{3a}}$

$\therefore \quad 3a = \frac{4}{3a}$ বা, $9a^2 = 4 \quad \therefore \quad a^2 = \frac{4}{9} \quad \therefore \quad a = \pm\frac{2}{3}$

$\therefore$ প্রত্যেকটি লগারিদ্মের মান $= \pm\frac{2}{3}$.

উদা. 9. Show that $\log_{10}2$ lies between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$.

মনে কর, $\log_{10}2 = a$. তাহা হইলে, $10^a = 2 \quad \therefore \quad 10 = 2^{\frac{1}{a}}$

এখন, $\because 2^{\frac{1}{a}} = 10, \ \therefore 16 > 2^{\frac{1}{a}} > 8 \ \therefore 2^4 > 2^{\frac{1}{a}} > 2^3 \ \therefore 4 > \frac{1}{a} > 3$

$\therefore \quad \frac{1}{4} < a < \frac{1}{3} \quad \therefore \quad a$ অর্থাৎ $\log_{10}2$, $\frac{1}{4}$ অপেক্ষা বড় এবং $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা ছোট ;

$\therefore \quad \log_{10}2$ এর মান $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{3}$ এর ভিতর অবস্থিত।

উদা. 10. If $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$, prove that $x^x y^y z^z = 1$.

$$\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k \text{ (ধর)}$$

তাহা হইলে, $\log x = k(y-z)$, $\log y = k(z-x)$, $\log z = k(x-y)$

$$\therefore \quad \log x^x y^y z^z = x\log x + y\log y + z\log z$$
$$= k\{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)\}$$
$$= k \times 0 = 0 = \log 1 \quad \therefore \quad x^x y^y z^z = 1.$$

উদা. 11. Prove that $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = \log_a a$. (C. U. 1942)

$\because \log_b a = \log_c a \times \log_b c$ [অনু. 140]

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \log_c a \times \log_b c \times \log_c b \times \log_a c$

$= \log_c a \times \log_a c$ [$\because \log_b c \times \log_c b = 1$ (অনুসি. 1, অনু. 140)

$= \log_a a$ [অনু. 140] ।

উদা. 12. Find the value of $\log_5 \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots \text{to } \infty}}}$.

মনে কর, $x = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots \text{to } \infty}}}$, তাহা হইলে,

$x^2 = 5\sqrt{5\sqrt{5\cdots \text{to } \infty}} = 5x$

$\therefore x(x-5) = 0 \quad \therefore x - 5 = 0 \quad (\because x \neq 0) \quad \therefore x = 5$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \log_5 x = \log_5 5 = 1$.

উদা. 13. If p, q, r are in G. P., show that

(i) $\log_a p, \log_a q, \log_a r$ are in A. P.

(ii) $\log_p a, \log_q a, \log_r a$ are in H. P.

(i) $\because p, q, r$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী, $\therefore q^2 = pr$;

$\therefore \log_a(q^2) = \log_a(pr) \quad \therefore 2\log_a q = \log_a p + \log_a r$

$\therefore \log_a p, \log_a q, \log_a r$ একটি সমান্তর শ্রেণী ।

(ii) $\because p, q, r$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী ;

$\therefore \log_a p, \log_a q, \log_a r$ একটি সমান্তর শ্রেণী [(i)এ প্রমাণিত]

অর্থাৎ, $\dfrac{1}{\log_p a}, \dfrac{1}{\log_q a}, \dfrac{1}{\log_r a}$ একটি সমান্তর শ্রেণী [দ্রষ্টব্য, অনুসি. 1, অনু. 140]

$\therefore \log_p a, \log_q a, \log_r a$ একটি বিপরীত শ্রেণী [প্রথম সংজ্ঞা, অনু. 128] ।

উদা. 14. Prove that $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

(C. U. 1939, '44)

বাম পক্ষের লগ $= \log\left(x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y}\right)$

$= (\log y - \log z)\log x + (\log z - \log x)\log y$

$+ (\log x - \log y)\log z$

$= 0 = \log 1 =$ ডান পক্ষের লগ ;

$\therefore$ বাম পক্ষ $=$ ডান পক্ষ ।

উদা. 15. If $a=y^{l+1}$, $b=y^{m+1}$, $c=y^{n+1}$, show that

$$(m-n)\log a+(n-l)\log b+(l-m)\log c=0.$$

বাম পক্ষ $=(m-n)\log(y^{l+1})+(n-l)\log(y^{m+1})+(l-m)\log(y^{n+1})$

$=(l+1)(m-n)\log y+(m+1)(n-l)\log y+(n+1)(l-m)\log y$

$=[\{l(m-n)+m(n-l)+n(l-m)\}+(m-n+n-l+l-m)]\log y$

$=(0+0)\log y=0.\log y=0.$

Exercise 64

1. Find the logarithms of

(i) 8 to the base 4. (ii) 144 to the base $2\sqrt{3}$.

(iii) 324 to the base $3\sqrt{2}$. (iv) 512 to the base $\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

(v) 1 to the base $3\sqrt{3}$. (vi) 1600 to the base $2\sqrt[3]{5}$.

2. If 5 be the logarithm of 243, find the base.

[ইঙ্গিত : নিধান a হইলে, $a^5=243$.]

3. The logarithm of a number x to the base a is 6. Find the logarithm of the number when the base is a^3.

[ইঙ্গিত : $\log_a x=6 \quad \therefore\ a^6=x$ বা, $(a^3)^2=x \quad \therefore\ \log_{a^3}x=2.$]

4. Prove that

(i) $\log(1+2+3)=\log 1+\log 2+\log 3.$

(ii) $\log(1+3+5+7)=4\log 2.$

(iii) $\log 45=1-\log 2+2\log 3.$ (iv) $\log(\frac{8}{15})=4\log 2-\log 3-1.$

5. Show that

(i) $\log\frac{16}{27}+3\log\frac{3}{2}+\log\frac{2}{9}-2\log\frac{2}{3}=0.$

(ii) $3\log 2+2\log\frac{2}{3}+\log\frac{9}{5}+3\log\frac{5}{2}=2.$

6. Prove that

(i) $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2.$ (C. U. 1923)

(ii) $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}=\log 2.$ (C. U. 1951)

7. Show that (i) $\log_2\log_2\log_2 16=1.$

(ii) $\log_4\log_4\log_4 256=0.$

8. Evaluate $\log_2\sqrt{\frac{1}{2}}+\log_2\sqrt{\frac{2}{3}}+\log_2\sqrt{\frac{3}{4}}.$

9. Prove that (i) $\log\dfrac{b^n}{c^n}+\log\dfrac{c^n}{a^n}+\log\dfrac{a^n}{b^n}=0.$ (C. U. 1944)

(ii) $\log\dfrac{a^2}{bc}+\log\dfrac{b^2}{ca}+\log\dfrac{c^2}{ab}=0.$

10. (i) If $a^2+b^2=6ab$, then $\log\{\frac{1}{2}(a-b)\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

(ii) If $a^2+b^2=7ab$, then $\log\{\frac{1}{3}(a+b)\}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

11. Prove that

(i) $\log_b a\times\log_a b=1$. (ii) $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1$.

(iii) $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c\times\log_a d=1$.

(iv) $\log_b a.\ \log_c b.\ \log_d c.\ \log_e d.\cdots.\log_r q.\ \log_a r=1$.

12. If $\log_a m+\log_a n=\log_a(m-n)$, express m in n.

13. If the logarithm of x to the base y^2 be equal to the logarithm of y to the base x^2, find the value of each logarithm.

14. Show that $\log_{10}3$ lies between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{2}$.

15. If $\frac{\log x}{b-c}=\frac{\log y}{c-a}=\frac{\log z}{a-b}$, show that

(i) $xyz=1$, (ii) $x^a y^b z^c=1$, (iii) $x^{b+c}y^{c+a}z^{a+b}=1$.

16. If $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}$, then $x\log\left(\frac{b}{a}\right)=\log a$. (C. U. 1937)

[ইঙ্গিত : প্রদত্ত সর্তের উভয় পক্ষের লগ লইয়া সরল করিলে, $x(\log b-\log a)=\log a$, ইত্যাদি।]

17. Prove that

(i) $\log a+\log a^2+\log a^3+\cdots+\log a^n=\frac{1}{2}n(n+1)\log a$.

(ii) $\log a+\log a^2+\log a^4+\cdots+\log a^{2^{n-1}}=(2^n-1)\log a$.

18. Show that

(i) $\log_a m\times\log_b n=\log_b m\times\log_a n$.

[বাম পক্ষ $=\log_b m.\ \log_a b\times\log_a n.\ \log_b a$ (অনু. 140) = ডান পক্ষ (অনুসি. 1, অনু. 140)।]

(ii) $\log_b a\times\log_c b=\log_d a\times\log_c d$.

[বাম পক্ষ $=\log_d a.\ \log_b d\times\log_c b$ (অনু. 140) = ডান পক্ষ (অনু. 140)।]

(iii) $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$. [উদা. 11 দেখ।] (C. U. 1942)

19. Find the value of $\log_3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\text{to}\ \infty}}}$.

20. If a series of numbers be in G. P., their logarithms are in A. P.

[গুণোত্তর শ্রেণীটিকে $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ ধরিয়া কষ।]

21. If p, q, r be in G. P., show that

(*i*) $\log_a p$, $\log_a q$, $\log_a r$ are in A. P.

(*ii*) $\log_p a$, $\log_q a$, $\log_r a$ are in H. P.

22. Prove that $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1.$

(C. U. 1939, '44)

23. If $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$, show that

$$(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0.$$

24. If $p = \log_a bc$, $q = \log_b ca$, $r = \log_c ab$, show that

$$pqr = p + q + r + 2.$$

[ইঙ্গিত: সর্ত হইতে, $a^p = bc$, $b^q = ca$, $c^r = ab$; $\therefore$ $a^{pqr} = b^{qr}c^{qr} = (ca)^r.(ab)^q = a^r a^q.c^r.b^q = a^r a^q.ab.ca = a^r a^q a^2.bc = a^r a^q a^2 a^p = a^{p+q+r+2}$

$\therefore$ $pqr = p + q + r + 2.$]

142. বিভিন্ন নিধানীয় লগ। যে কোন সংখ্যাকে নিধান লইয়া যে কোন ধনাত্মক সংখ্যার লগ নির্ণয় করা যায়। 10-নিধানীয় এবং e-নিধানীয় লগই সাধারণতঃ ব্যবহৃত হয়। স্থূল হিসাবের জন্য 10-নিধানীয় লগ ব্যবহৃত হয়। এইজন্যই ইহার নাম সাধারণ লগ (Common logarithm)। এই প্রণালীর প্রবর্তক Henry Briggs. সূক্ষ্ম হিসাবের জন্য e-নিধানীয় লগ ব্যবহৃত হয়। e একটি অমেয় রাশি এবং 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত উহার আসন্ন মান 2·71828. এই প্রণালীর আবিষ্কারক John Napier এবং তাঁহার নামানুসারে প্রণালীটির নাম Napierian System. এস্থলে বিশেষভাবে সাধারণ লগ সম্বন্ধে আলোচিত হইবে।

143. লগ নির্ণয়ে সূত্রের প্রয়োগ। এক বা একাধিক সংখ্যার লগ জানা থাকিলে লগ বিষয়ক সূত্রগুলির সাহায্যে অপর কোন সংখ্যার লগ নির্ণয় করা যাইতে পারে। উদাহরণ দ্বারা প্রণালী প্রদর্শিত হইল।

উদা. 1. If $\log 2 = \cdot 30103$ and $\log 3 = \cdot 47712$, find the values of $\log 4$, $\log 5$ and $\log 6$.

$$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 = 2 \times \cdot 30103 = \cdot 60206.$$

$$\log 5 = \log \tfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \cdot 30103 = \cdot 69897.$$

$$\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = \cdot 30103 + \cdot 47712 = \cdot 77815.$$

উদা. 2. If $\log 35 = 1\cdot 54407$ and $\log 5 = \cdot 69897$, find $\log 7$.

$$\log 7 = \log \tfrac{35}{5} = \log 35 - \log 5 = 1\cdot 54407 - \cdot 69897 = \cdot 84510$$

উদা. 3. If $\log 2 = \cdot 30103$, find $\log \frac{8}{5}$.

$$\log \frac{8}{5} = \log 8 - \log 5 = \log 2^3 - \log \frac{10}{2}$$
$$= 3 \log 2 - \log 10 + \log 2 = 4 \log 2 - 1$$
$$= 4 \times \cdot 30103 - 1 = 1 \cdot 20412 - 1 = \cdot 20412.$$

উদা. 4. If $\log 2 = \cdot 30103$ and $\log 7 = \cdot 84510$, find $\log (\frac{49}{32})^{\frac{1}{5}}$.

$$\log (\tfrac{49}{32})^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(\log 49 - \log 32) = \tfrac{1}{5}(\log 7^2 - \log 2^5)$$
$$= \tfrac{1}{5}(2 \log 7 - 5 \log 2) = \tfrac{1}{5}(2 \times \cdot 84510 - 5 \times \cdot 30103)$$
$$= \tfrac{1}{5}(1 \cdot 69020 - 1 \cdot 50515) = \tfrac{1}{5} \times \cdot 18505 = \cdot 03701.$$

উদা. 5. If $\log_{10} 2 = \cdot 30103$ and $\log_{10} 5 = \cdot 69897$, find $\log_2 5$.

$\log_2 5 = \log_{10} 5 \times \log_2 10$ (অনু. 140) $= \log_{10} 5 \times 1/\log_{10} 2$

(অনুসি. 2, অনু. 140)

$$= \frac{\cdot 69897}{\cdot 30103} = \frac{69897}{30103} = 2 \cdot 32192.$$

Exercise 65

If $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$ and $\log 7 = \cdot 84510$, find the values of :

1. $\log 12$.
2. $\log 18$.
3. $\log 32$.
4. $\log 36$.
5. $\log 45$.
6. $\log 63$.
7. $\log \frac{16}{9}$.
8. $\log 33\frac{1}{3}$.
9. $\log \sqrt[5]{105}$.
10. $\log \frac{16}{15} + \log \frac{12}{5} + \log \frac{18}{27}$.
11. $\log_2 3$.

144. **সূচক সমীকরণ।** কোন কোন সূচক সমীকরণ (Exponential Equations) সমাধান করিবার জন্য লগারিদ্‌মের প্রয়োজন হয়। উদাহরণ দ্বারা সমাধান প্রণালী দেখান গেল।

উদা. 1. Solve $a^{x+1} = b^{2x+3}$.

উভয় পার্শ্বের লগ লইয়া, $(x+1)\log a = (2x+3)\log b$

বা, $(\log a - 2 \log b)x = 3 \log b - \log a$

$$\therefore \quad x = \frac{3 \log b - \log a}{\log a - 2 \log b}.$$

উদা. 2. Solve $a^x + 9a^{-x} = 3(b^x + b^{-x})$.

a^x দ্বারা গুণ করিয়া, $a^{2x} + 9 = 3(b^x + b^{-x})a^x$

পক্ষান্তর করিয়া, $a^{2x} - 3a^x b^x - 3a^x b^{-x} + 9 = 0$

বা, $a^x(a^x - 3b^x) - 3b^{-x}(a^x - 3b^x)$

বা, $(a^x - 3b^x)(a^x - 3b^{-x}) = 0$ $\therefore$ $a^x = 3b^x \cdots (1)$ বা $a^x = 3b^{-x} \cdots (2)$

$\therefore$ (1) হইতে, $x \log a = \log 3 + x \log b$ $\therefore$ $x = \dfrac{\log 3}{\log a - \log b}$.

অনুরূপে, (2) হইতে, $x = \dfrac{\log 3}{\log a + \log b}$.

উদা. 3. Solve $5^{5-3x} + 4^{\frac{1}{2}x+3} = 5^{7-3x} - 2^{x+5}$, given $\log 2 = \cdot 30103$.
(C. U. 1943)

সমীকরণটি হইতে, $5^{7-3x} - 5^{5-3x} = 2^{x+6} + 2^{x+5}$

বা, $5^{5-3x}(5^2 - 1) = 2^{x+5}(2+1)$ বা, $5^{5-3x} = \frac{3}{24}\cdot 2^{x+5} = 2^{x+2}$

বা, $\dfrac{5^5}{(5^3)^x} = 2^x.2^2$ বা, $(5^3 \times 2)^x = \dfrac{5^5}{2^2}$ বা, $\left(\dfrac{10^3}{2^2}\right)^x = \dfrac{10^5}{2^7}$

$\therefore$ $x(3 \log 10 - 2 \log 2) = 5 \log 10 - 7 \log 2$

$\therefore$ $x = \dfrac{5 - 7 \log 2}{3 - 2 \log 2} = \dfrac{5 - 7 \times \cdot 30103}{3 - 2 \times \cdot 30103} = \dfrac{5 - 2\cdot 10721}{3 - \cdot 60206}$

$= \dfrac{2\cdot 89279}{2\cdot 39794} = 1\cdot 27\cdots$.

Exercise 66

Solve :

1. $3^x = 2$. (C. U. 1927)
2. $2^x.3^{2x} = 100$. (C.U. 1925)
3. $3^x = 5^{x+1}$.
4. $5^{2-x} = 2^{1-2x}.7^x$.
5. $a^{3x+4} = b^{4x+5}$.
6. $a^x + 4a^{-x} = 2(b^x - b^{-x})$.
7. $6^{3-4x}.4^{x+5} = 8$. (C. U. 1938, '45)
8. $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$. (C. U. 1941)
9. $2^x = 3^y \cdots (1)$, $2^{y+1} = 3^{x-1} \cdots (2)$. (C. U. 1942)

[ইঙ্গিত : $2^x.3^{x-1} = 3^y.2^{y+1}$ বা, $\frac{1}{3}.6^x = 6^y.2$

বা, $6^x = 6^y.6$ $\therefore$ $x = y + 1$.

$\therefore$ (1) হইতে, $2^{y+1}=3^y$, $\therefore$ $(y+1)\log 2 = y \log 3$,

$\therefore$ $y = \log 2/(\log 3 - \log 2) = 1{\cdot}71$.

$\therefore$ $x = 1{\cdot}71\cdots + 1 = 2{\cdot}71$.]

10. $2^x 7^y = 80000 \cdots (1)$, $3^y = 500 \cdots (2)$. (C. U. 1947)

[ইঙ্গিত : (2) হইতে, $y \log 3 = \log 1000 - \log 2 = 3 - \log 2$,

$\therefore$ $y = (3 - \log 2)/\log 3 = 5{\cdot}66$.

$\therefore$ (1) হইতে, $x \log 2 + y \log 7 = 4 + 3 \log 2$,

$\therefore$ $x = (4 + 3 \log 2 - 5{\cdot}66 \times \log 7)/\log 2 = {\cdot}41$.]

11. If $\log (x^2 y^3) = a$, and $\log \dfrac{x}{y} = b$, find $\log x$ and $\log y$.

(C. U. 1919)

145. লগের তালিকার সাহায্যে সাধারণ লগ নির্ণয়। পরীক্ষার প্রশ্নে কোন কোন স্থলে লগের মান দেওয়া থাকে না। লগের তালিকার (Logarithm table) সাহায্যে লগের মান নির্ণয় করিয়া লইতে হয়। Frank Castle এর বহি হইতে দুইটি তালিকা পরিশিষ্টে দেওয়া গেল। প্রথমটির সাহায্যে 1 হইতে 100000 পর্যন্ত সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় করা চলিবে এবং দ্বিতীয়টির সাহায্যে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ কোনও সংখ্যা, কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌ম্, তাহা নির্ণয় করা চলিবে। এরূপস্থলে শেষোক্ত সংখ্যাকে প্রথমোক্ত সংখ্যাটির এন্টিলগারিদ্‌ম্ (Antilogarithm) বলে। যেমন, 100 এর লগ $=2$; $\therefore$ 2এর antilog বা antilog $2 = 100$.

তালিকা দুইটিকে পরীক্ষাকেন্দ্রে ব্যবহার করা চলিবে এবং লগের পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান লইয়া প্রশ্ন সমাধান করিলেই যথেষ্ট হইবে। প্রথমটিতে অংশকগুলির (যাহার বিষয় পরে আলোচিত হইবে) এবং দ্বিতীয়টিতে সংখ্যাগুলির সর্ববামের দশমিক বিন্দুগুলি উহ্য রাখা হইয়াছে। তালিকা দুইটির ব্যবহার প্রণালী পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে আলোচিত হইবে।

146. লগের প্রকৃতি। সাধারণ লগসমূহ প্রায়ই পূর্ণসংখ্যা নহে এবং উহারা সকল স্থলে ধনাত্মকও নহে। যেমন,

(i) $10^1 = 10$ এবং $10^2 = 100$, $\therefore$ $\log 10 = 1$ এবং $\log 100 = 2$,

$\therefore$ 56, 10 অপেক্ষা বড় এবং 100 অপেক্ষা ছোট বলিয়া,

$\log 56 = 1 +$ একটি ধনাত্মক দশমিক বা সামান্য ভগ্নাংশ।

(*ii*) $10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot01$ এবং $10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1$,

$\therefore$ $\log \cdot01=-2$ এবং $\log \cdot1=-1$;

$\therefore$ ˙03, ˙01 অপেক্ষা বড় এবং ˙1 অপেক্ষা ছোট বলিয়া,

$\log \cdot03=-1+$একটি ধনাত্মক দশমিক বা সামান্য ভগ্নাংশ।

147. পূর্ণক ও অংশক। কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ দশমিকে প্রকাশিত থাকিলে উহার পূর্ণাংশকে **পূর্ণক** (Characteristic) বলে এবং দশমিকাংশকে **অংশক** (Mantissa) বলে। যেমন,

$10^{2\cdot00432}=101$ হইলে, $\log 101=2\cdot00432$;

$\therefore$ log 101 এর 2 পূর্ণক এবং ˙00432 অংশক।

148. লগারিদ্‌ম্‌ ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়ই হইতে পারে। লগারিদ্‌ম্‌ ঋণাত্মক হইলে হিসাবের সুবিধার জন্য উহার অংশককে সর্বদাই ধনাত্মক রাখার রীতি গণিতবিদ্‌গণ কর্তৃক গৃহীত হইয়াছে। ঋণাত্মক অংশককে ধনাত্মক করিতে হইলে পূর্ণক হইতে 1 বিয়োগ করিয়া অংশকের সহিত 1 যোগ করিতে হয়। ইহাতে লগারিদ্‌মের মানের কোন পরিবর্তন হয় না, শুধু আকার পরিবর্তিত হয়। যেমন,

(*i*) $\log \cdot48=-\cdot31876=0+(-\cdot31876)$

$=0-1+(1-\cdot31876)=-1+\cdot68124$

$\therefore$ গৃহীত রীতি অনুসারে log ˙48 এর পূর্ণক এবং অংশক যথাক্রমে -1 এবং ˙68124 কিন্তু 0 এবং $-\cdot31876$ নহে। $-1+\cdot68124$ কে সংক্ষেপে $\bar{1}\cdot68124$ লেখা হয়। 1এর উপর বসান $-$ চিহ্নটিতে শুধু 1 ঋণাত্মক এবং অপর অংশ ধনাত্মক বুঝায়।

(*ii*) $\log \cdot0048=-2\cdot31876=-2+(-\cdot31876)$

$=-2-1+(1-\cdot31876)=-3+\cdot68124=\bar{3}\cdot68124$

$\therefore$ গৃহীত রীতি অনুসারে log ˙0048 এর পূর্ণক এবং অংশক যথাক্রমে -3 এবং ˙68124 কিন্তু -2 এবং $-\cdot31876$ নহে।

মন্তব্য। এই রীতি অবলম্বন করিয়া তালিকাদ্বয়ে প্রদত্ত অংশকগুলি নির্ণীত হইয়াছে। পূর্ণক ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হইবে কিন্তু অংশক সর্বত্র ধনাত্মক।

149. পূর্ণক নির্ণয়ের নিয়ম। যে কোন সংখ্যার লগের পূর্ণক, সংখ্যাটিকে দেখিয়াই বলা যায়।

প্রথমে 1 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যা লওয়া যাক্।

$\because\ 10^0 = 1, \quad \therefore\ \log 1 = 0;$
$\because\ 10^1 = 10, \quad \therefore\ \log 10 = 1;$
$\because\ 10^2 = 100, \quad \therefore\ \log 100 = 2;$
$\because\ 10^3 = 1000, \quad \therefore\ \log 1000 = 3,$ ইত্যাদি।

অতএব, 1 এবং 10 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগ 0 অপেক্ষা বড় এবং 1 অপেক্ষা ছোট কোন দশমিক হইবে। সুতরাং যে সংখ্যার পূর্ণাংশ এক অঙ্কবিশিষ্ট, তাহার লগের পূর্ণক 0.

10 এবং 100 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগ 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট কোন দশমিক হইবে। সুতরাং যে সংখ্যার পূর্ণাংশ দুই অঙ্কবিশিষ্ট, তাহার লগের পূর্ণক 1.

100 এবং 1000 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগ 2 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট কোন দশমিক হইবে। সুতরাং যে সংখ্যার পূর্ণাংশ তিন অঙ্কবিশিষ্ট, তাহার লগের পূর্ণক 2.

সাধারণভাবে, যে সংখ্যার পূর্ণাংশ n-সংখ্যক অঙ্কবিশিষ্ট, তাহার লগের পূর্ণক **$(n-1)$**. অতএব নিয়ম হইল :

নিয়ম। 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন সংখ্যার সাধারণ লগের পূর্ণক ধনাত্মক এবং উহার মান সংখ্যাটির পূর্ণাংশের অঙ্কসংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

এখন, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যা লইয়া পরীক্ষা করা যাক্।

$\because\ 10^0 = 1, \quad \therefore\ \log 1 = 0;$

$\because\ 10^{-1} = \frac{1}{10} = \cdot 1, \quad \therefore\ \log \cdot 1 = -1;$

$\because\ 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \cdot 01. \quad \therefore\ \log \cdot 01 = -2;$

$\because\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \cdot 001, \quad \therefore\ \log \cdot 001 = -3,$ ইত্যাদি।

অতএব, ·1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগারিদম্ -1 অপেক্ষা বড় এবং 0 অপেক্ষা ছোট। সুতরাং যে পূর্ণাংশবিহীন দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে শূন্য থাকে না, তাহার লগারিদম্ '$-1+$কোন ধনাত্মক দশমিক' বলিয়া পূর্ণক $\bar{1}$.

'01 এবং '1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ -2 অপেক্ষা বড় এবং -1 অপেক্ষা ছোট। সুতরাং যে পূর্ণাংশবিহীন দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে একটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদ্‌ম্ '$-2+$কোন ধনাত্মক দশমিক' বলিয়া পূর্ণক $\bar{2}$.

'001 এবং '01 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ -3 অপেক্ষা বড এবং -2 অপেক্ষা ছোট। সুতরাং যে পূর্ণাংশবিহীন দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে দুইটি শূন্য থাকে, তাহার লগারিদ্‌ম্ '$-3+$কোন ধনাত্মক দশমিক' বলিয়া পূর্ণক $\bar{3}$.

সাধারণভাবে, যে পূর্ণাংশবিহীন দশমিকের দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে n-সংখ্যক শূন্য থাকে, তাহার লগারিদ্‌ম্ '$-(n+1)+$কোন ধনাত্মক দশমিক' বলিয়া পূর্ণক $\overline{n+1}$. অতএব, নিয়ম হইল :

নিয়ম। 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ধনসংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক ঋণাত্মক এবং উহার পরম মান সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরবর্তী শূন্যগুলির সংখ্যা অপেক্ষা 1 অধিক।

উদাহরণ। (1) 3'435 এর পূর্ণাংশে একটি অঙ্ক রহিয়াছে,

$\therefore$ উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক $=1-1=0$.

(2) 524'27 এর পূর্ণাংশে তিনটি অঙ্ক রহিয়াছে,

$\therefore$ উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক $=3-1=2$.

(3) '2345 এর দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে কোন শূন্য নাই,

$\therefore$ উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক $\bar{1}$.

(4) '000702 এর দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে তিনটি শূন্য রহিয়াছে, $\therefore$ উহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক $\bar{4}$.

150. অংশক নির্ণয়ের নিয়ম। যে সকল সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি একই এবং একই ক্রমে সজ্জিত, তাহাদের দশমিক বিন্দুগুলির অবস্থান পৃথক হইলেও অংশকগুলি একই।

একটি উদাহরণ লইয়া পরীক্ষা করা যাক্।

মনে কর, $\log 69714 = 4{\cdot}84332$. তাহা হইলে,

$$\log 697{\cdot}14 = \log \tfrac{69714}{100} = \log 69714 - \log 100$$
$$= 4{\cdot}84332 - 2 = 2{\cdot}84332$$
$$\log {\cdot}69714 = \log \tfrac{69714}{100000} = \log 69714 - \log 100000$$
$$= 4{\cdot}84332 - 5 = \bar{1}{\cdot}84332.$$
$$\log {\cdot}0069714 = \log \tfrac{69714}{10000000} = \log 69714 - \log 10000000$$
$$= 4{\cdot}84332 - 7 = \bar{3}{\cdot}84332.$$

এখন, ·69714, 697·14 ·69714 এবং ·0069714 সংখ্যাগুলির সার্থক অঙ্কগুলি একই এবং একই ক্রমে সজ্জিত কিন্তু দশমিক বিন্দুগুলির অবস্থান পৃথক। উহাদের লগারিদ্‌মের দশমিকাংশ একই ধনাত্মক রাশি, কাজেই অংশকগুলি একই।

মন্তব্য। ইহা হইতে দেখা যায়, কোন সংখ্যার অংশক যত, সংখ্যাটিকে 10 এর কোন ঘাত দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলেও প্রাপ্ত সংখ্যাটির একই অংশক হইবে। যেমন,

মনে কর, $\log 2 = \cdot30103$. তাহা হইলে,

$\log 20 = \log(2 \times 10) = \log 2 + \log 10 = \cdot30103 + 1 = 1\cdot30103.$

$\log \cdot2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = \cdot30103 - 1 = \bar{1}\cdot30103.$

151. (1) **তালিকার সাহায্যে লগ নির্ণয়।** লগ তালিকার সাহায্যে সাধারণ লগ নির্ণয় করিবার প্রণালী উদাহরণ দ্বারা দেখান গেল।

উদা. 1. Find log 3·4. *Or*, Find the log of 3·4.

log 3·4 এবং log 34 এর অংশক একই (অনু. 150)।

এখন, তালিকার সর্ববামের স্তম্ভ হইতে **34** বাহির কর। উহার ঠিক ডান দিকে লিখিত ·53148 হইবে অংশক, এবং অনু. 149 অনুসারে 0 হইবে পূর্ণক।

$\therefore \log 3\cdot4 = 0\cdot53148$ বা $\cdot53148$.

এইরূপ, $\log 34 = 1\cdot53148$, $\log 340 = 2\cdot53148$, $\log 3400 = 3\cdot53148$.

$\log \cdot34 = \bar{1}\cdot53148$, $\log \cdot034 = \bar{2}\cdot53148$, $\log \cdot0034 = \bar{3}\cdot53148$.

উদা. 2. Find the value of log 2.

log 2 এর অংশক এবং log 20 এর অংশক একই (মন্তব্য, অনু. 150)। তালিকায় log 2 এর অংশক দেওয়া নাই। কাজেই log 2 এর অংশকের জন্য log 20 এর অংশক ·30103 লও, এবং অনু. 149 অনুযায়ী log 2 এর পূর্ণক 0. $\therefore \log 2 = 0\cdot30103$ বা ·30103.

এইরূপ, $\log 3 = \cdot47712$, $\log 5 = \cdot69897$, $\log 7 = \cdot84510$.

উদা. 3. Find the values of (*i*) log 237 and (*ii*) log ·00349.

(*i*) সর্ববামের স্তম্ভ হইতে **23** বাহির কর। **23** এর সারির সংখ্যাগুলির ভিতর যেটি 7এর স্তম্ভে রহিয়াছে, তাহা হইল ·37475. উহাই log 237 এর অংশক, এবং অনু. 149 অনুসারে 2 উহার পূর্ণক ; $\therefore \log 237 = 2\cdot37475$.

(ii) সর্ববামের স্তম্ভ হইতে **34** বাহির কর। **34** এর সারির সংখ্যাগুলির ভিতর যেটি 9 এর স্তম্ভে রহিয়াছে, তাহা হইল ·54283. উহাই log ·00349 এর অংশক এবং অনু. 149 অনুসারে $\bar{3}$ উহার পূর্ণক ; $\therefore \log \cdot00349 = \bar{3}\cdot54283$.

মন্তব্য। চারি বা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার লগারিদ্‌মের অংশক নির্ণয় করিতে হইলে, সর্বভাগে প্রদত্ত গড় অন্তরও (Mean Difference) ব্যবহার করিতে হয়। চতুর্থ অঙ্কের জন্য Mean Differenceএ প্রদত্ত সংখ্যা এবং পঞ্চম অঙ্কের জন্য সংখ্যাটির দশমাংশ লইয়া যোগ করিতে হয়। উদাহরণ দেওয়া গেল।

উদা. 4. Find the value of log 420·6.

log 420 এর অংশক = ·62325
6 এর গড় অন্তর = 61
·62386

∴ log 420·6 = 2·62386.

এইরূপ, log 42060 = 4·62386, log ·00420·6 = $\bar{3}$·62386.

উদা. 5. Find log 54·873 correct to 5th decimal place.

log 54·8 এর অংশক = ·73878
7 এর গড় অন্তর = 56
3 এর গড় অন্তর = 2 | 4
·73936

∴ log 54·873 = 1·73936.

এইরূপ, log 5487·3 = 3·73936, log ·054873 = $\bar{2}$·73936.

উদা. 6. Find log 7305·8 correct to 5th decimal place.

log 730 এর অংশক = ·86332
5 এর গড় অন্তর = 30
8 এর গড় অন্তর = 4 | 7
·86367

∴ log 7305·8 = 3·86367.

(2) এন্টিলগ তালিকা হইতে Antilogarithm নির্ণয়।

উদা. 7. Find antilog 2·45678. *Or,* Find antilog of 2·45678. *Or,* Find the number whose log is 2·45678

Antilog ·456 = ·28576
7 এর গড় অন্তর = 46
8 এর গড় অন্তর = 5 | 2
·28627

এখন, যে সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2, তাহার পূর্ণাংশে তিনটি অঙ্ক থাকিবে,

∴ Antilog 2·45678 = 286·27.

উদা. 8. Find the number, whose log is $\bar{3}\cdot61324$.

Antilog ·613 = ·41020
2 এর গড় অন্তর = 19
4 এর গড় অন্তর = 38
·41043

এখন, যে সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক −3, তাহার দশমিক বিন্দুর পর দুইটি শূন্য থাকিবে ; ∴ নির্ণেয় সংখ্যা = ·0041043.

Exercise 67

Find, correct to 5th decimal place, the values of :

1. log 5 **2.** log 9 **3.** log 24 **4.** log 87
5. log ·6 **6.** log ·23 **7.** log ·057 **8.** log ·0082
9. log 123 **10.** log 2·46 **11.** log ·347 **12.** log ·0578

Find, correct to 5th decimal place, the log of :

13. 1234 **14.** 23·45 **15.** ·4758 **16.** ·008375
17. 243·76 **18.** 4·6528 **19.** ·012345 **20.** ·00068938

Find the antilog of :

21. 1·32 **22.** 2·47 **23.** 2·654 **24.** 3·926
25. 1·1435 **26.** 2·4386 **27.** $\bar{1}\cdot16783$ **28.** $\bar{3}\cdot83674$

152. যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ। লগের সাহায্যে বিবিধ প্রশ্নের সমাধান করিতে হইলে, লগের মানগুলির যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের প্রণালী জানা থাকা আবশ্যক। নিম্নের সমাধানগুলি লক্ষ্য কর।

(i) $4\cdot68034+\bar{2}\cdot72509=(4-2)+\cdot68034+\cdot72509$
$=2+1\cdot40543=3\cdot40543.$

(ii) $4\cdot64836-\bar{2}\cdot95617=3+1\cdot64836-(-2+\cdot95617)$
$=3+2+(1\cdot64836-\cdot95617)=5\cdot69219.$

(iii) $\bar{5}\cdot30963-3\cdot87506=-6+1\cdot30963-3-\cdot87506$
$=-9+\cdot43457=\bar{9}\cdot43457.$

(iv) $(\bar{2}\cdot56324)\times3=(-2+\cdot56324)\times3=-6+1\cdot68972$
$=-5+\cdot68972=\bar{5}\cdot68972.$

(v) $\bar{3}\cdot45379\div7=(\bar{7}+4\cdot45379)\div7=\bar{1}\cdot63626.$

153. লগের সাহায্যে গুণ ও ভাগ।

উদা. 1. Find the value of 23·457 × ·0034562.

log (23·457 × ·0034562) = log 23·457 + log ·0034562 [অনু. 139(i)]

log 23·4 এর অংশক =	·36922	log ·00345 এর অংশক =	·53782
5 এর গড় অন্তর =	93	6 এর গড় অন্তর =	76
7 এর গড় অন্তর =	13|0	2 এর গড় অন্তর =	2|5
∴ log 23·457 =	$\bar{1}$·37028	∴ log ·0034562 =	$\bar{3}$·53861

∴ log (23·457 × ·0034562) = 1·37028 + $\bar{3}$·53861 = $\bar{2}$·90889

এখন, Antilog ·908 =	·80910
8 এর গড় অন্তর =	148
9 এর গড় অন্তর =	16|7
∴ Antilog $\bar{2}$·90889 =	·081075

∴ log (23·457 × ·0034562) = log ·081075

∴ 23·457 × ·0034562 = ·081075.

উদা. 2. Find the value of ·43256 ÷ 28·538.

log (·43256 ÷ 28·538) = log ·43256 − log 28·538 [অনু. 139 (iv)]

log ·432 এর অংশক =	·63548	log 28·5 এর অংশক =	·45484
5 এর গড় অন্তর =	50	3 এর গড় অন্তর =	46
6 এর গড় অন্তর =	6|0	8 এর গড় অন্তর =	12|2
∴ log ·43256 =	$\bar{1}$·63604	∴ log 28·538 =	1·45542

∴ log (·43256 ÷ 28·538) = $\bar{1}$·63604 − 1·45542 = $\bar{2}$·18062

এখন, Antilog ·180 =	·15136
6 এর গড় অন্তর =	21
2 এর গড় অন্তর =	|7
∴ Antilog $\bar{2}$·18062 =	·015158

∴ log (·43256 ÷ 28·538) = log ·015158

∴ ·43256 ÷ 28·538 = ·015158.

উদা. 3. Simplify : $\dfrac{52·437 \times ·092374}{7·8432 \times 34·456}$.

$$\log \frac{52·437 \times ·092374}{7·8432 \times 34·456}$$

= (log 52·437 + log ·092374) − (log 7·8432 + log 34·456)

$= (1{\cdot}71964 + \bar{2}{\cdot}96555) - (0{\cdot}89450 + 1{\cdot}53727)$ [তালিকা হইতে]
$= 0{\cdot}68519 - 2{\cdot}43177 = \bar{2}{\cdot}25342 = \log 0{\cdot}017924$ [তালিকা হইতে]
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= 0{\cdot}017924$.

154. লগের সাহায্যে ঘাত ও মূল নির্ণয়।

উদা. 1. Find the 7th power and the 7th root of ·28564.

$\log (\cdot 28564)^7 = 7 \times \log \cdot 28564 = 7 \times \bar{1}{\cdot}45581$ (লগতালিকা হইতে)
$= \bar{4}{\cdot}19067 = \log \cdot 00015513$ (এণ্টিলগতালিকা হইতে)
$\therefore \quad (\cdot 28564)^7 = \cdot 00015513.$

$$\log \left(\cdot 28564\right)^{\frac{1}{7}} = \tfrac{1}{7} \times \log \cdot 28564 = \tfrac{1}{7} \times \bar{1}{\cdot}45581$$
$$= \tfrac{1}{7} \times (\bar{7} + 6{\cdot}45581) = \bar{1}{\cdot}92226 = \log \cdot 83611$$
$$\therefore \quad \left(\cdot 28564\right)^{\frac{1}{7}} = \cdot 83611.$$

155. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. Find the number of digits in 3^{16}.

$\log 3^{16} = 16 \log 3 = 16 \times \cdot 47712 = 7{\cdot}63392.$

সুতরাং 3^{16} এর তুল্যমান সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 7 ; $\therefore$ 3^{16} এর তুল্যমান সংখ্যাটির অঙ্কসংখ্যা 7 + 1 বা 8 (অনু. 149)

উদা. 2. Find the position of the first significant figure in the decimal of 3^{-16}.

$$\log 3^{-16} = -16 \log 3 = -16 \times \cdot 47712 = -7{\cdot}63392$$
$$= -7 + (-\cdot 63392) = -7 - 1 + (1 - \cdot 63392)$$
$$= -8 + \cdot 36608 = \bar{8}{\cdot}36608.$$

সুতরাং 3^{-16} এর তুল্যমান দশমিকটির লগের পূর্ণক $\bar{8}$; $\therefore$ 3^{-16} এর তুল্যমান দশমিকটিতে দশমিক বিন্দুর পর (8 − 1)টি বা 7টি শূন্য থাকিবে (অনু. 149).

$\therefore$ প্রথম সার্থক অঙ্কটি অষ্টম অঙ্ক।

উদা. 3. Find the price of 375 articles at Rs. 25·72 nP. each.

নির্ণেয় মূল্য যেন x টাকা। তাহা হইলে,

$$x = 25{\cdot}72 \times 375$$

এখন, $\log x = \log 25{\cdot}72 + \log 375$
$= 1{\cdot}41027 + 2{\cdot}57403$
$= 3{\cdot}98430 = \log 9645$

$\therefore \quad x = 9645 \quad \therefore$ নির্ণেয় মূল্য $= 9645$ টাকা।

উদা. 4. The volume of a rectangular solid is 957·2 c. ft. and its height is 16·275 ft. Find the area of its base correct to 1 place of decimals.

ভূমির ক্ষেত্রফল যেন x বর্গফুট। $\therefore\ x = 957{\cdot}2 \div 16{\cdot}275$

$\therefore\ \log x = \log 957{\cdot}2 - \log 16{\cdot}275 = 2{\cdot}98100 - 1{\cdot}21146$

$= 1{\cdot}76954 = \log 58{\cdot}821 \quad \therefore\ x = 58{\cdot}821$

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $= 58{\cdot}8$ বর্গফুট।

উদা. 5. If the principal be Rs. 3850, find to the nearest rupee, the amount at compound interest for 12 years at 5%.

সমূল চক্রবৃদ্ধি যেন x টাকা। তাহা হইলে,

$$x = 3850 \times (1 + \tfrac{5}{100})^{12} = 3850 \times (1{\cdot}05)^{12}$$

এখন, $\log x = \log 3850 + 12 \log 1{\cdot}05$

$= 3{\cdot}58546 + 12 \times {\cdot}02119$

$= 3{\cdot}83974 = \log 6914 \quad \therefore\ x = 6914$

$\therefore$ নির্ণেয় সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 6914$ টাকা।

উদা. 6. Each year the number of births is $\frac{3}{80}$th and that of deaths is $\frac{1}{40}$th of the whole population at the beginning of the year. Find in how many years the population will be doubled.

প্রথম বৎসরের প্রারম্ভে লোকসংখ্যা যেন x এবং নির্ণেয় বৎসরসংখ্যা যেন n. তাহা হইলে প্রথম বৎসরান্তে লোকসংখ্যা হইবে $x(1 + \frac{3}{80} - \frac{1}{40})$ বা $x \cdot \frac{81}{80}$, দ্বিতীয় বৎসরান্তে হইবে $x \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80}$ বা $x(\frac{81}{80})^2$. অনুরূপে n-তম বৎসরান্তে লোকসংখা হইবে $x(\frac{81}{80})^n$. $\therefore$ প্রশ্নানুসারে,

$\therefore\ x(\frac{81}{80})^n = 2x$ বা, $(\frac{81}{80})^n = 2 \quad \therefore\ n \log \frac{81}{80} = \log 2$

$$\therefore\ n = \frac{\log 2}{\log 81 - \log 80} = \frac{{\cdot}30103}{{\cdot}90848 - {\cdot}90309} = \frac{30103}{539} = 55\tfrac{478}{539}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বৎসর সংখ্যা $= 55\frac{478}{539}$.

Exercise 68.

Using the tables, find the approximate values of :

1. ·237 × ·375. 2. 4·328 × ·0576. 3. ·03126 × 26·73.
4. ·823 ÷ ·435. 5. ·04257 ÷ 38·74 6. 36·307 ÷ ·0057318.

7. $\dfrac{46{\cdot}328 \times {\cdot}0854}{72{\cdot}43}$.

8. $\dfrac{7{\cdot}3945 \times 2{\cdot}328}{{\cdot}5234}$.

9. $({\cdot}27628)^5$.

10. $({\cdot}63105)^8$.

11. $({\cdot}98327)^9$.

12. $(26{\cdot}738)^{\frac{1}{4}}$.

13. $({\cdot}027458)^{\frac{1}{7}}$.

14. $({\cdot}0058628)^{\frac{1}{9}}$.

15. Find the number of digits in 5^{12}.

16. Find the position of the first significant figure in the decimal of 7^{-16}.

17. Find the price of 325 articles at Rs. 12·40 nP. each.

18. The base and altitude of a triangle are respectively 24·5 and 16·3 feet respectively. Find its area.

19. If the principal is Rs. 3750, find to the nearest rupee, the amount at compound interest for 20 years at 6 per cent.

20. In a town the number of annual births is 24 per thousand and that of annual deaths is 2 per hundred of the population at the beginning of each year. If the present population is 75000, find the approximate population 50 years afterwards.

21. The population of a town is 87250. If it increases annually at the rate of 5%, find how many years afterwards the population will be doubled.

22. The number of students of a school decreases annually at the rate of 5%. Find in many years the number will decrease to 45%.

23. Find the number of years in which a certain principal at 8% compound interest will be trebled.

24. A retailer has 1 maund 20 seers of superior quality of sugar. As soon as he completes the sale of 20 seers, he mixes with the remainder equal quantity of inferior kind. After how many such operations, only $\frac{32}{243}$th of the whole will be of superior quality.

অমূলদ রাশি

156. অমূলদ রাশি (Irrational quantity) সম্বন্ধে এবং দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয়ের প্রণালী সম্বন্ধে পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে অধিক পদবিশিষ্ট দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল এবং দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর ঘনমূল নির্ণয়ের প্রণালী সম্বন্ধে আলোচিত হইবে।

157. $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ **এর বর্গমূল নির্ণয়।**

মনে কর, $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

$\therefore$ উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া,

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$$

এখন মনে কর, $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{yz}=\sqrt{c}$, $2\sqrt{zx}=\sqrt{d}$ এবং $x+y+z=a$;

$\therefore$ $4xy=b$, $4yz=c$, $4zx=d$ এবং $8xyz=\sqrt{bcd}$.

$\therefore$ $x=\dfrac{8xyz}{2.4yz}=\dfrac{\sqrt{bcd}}{2c}=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{bd}{c}}$. তদ্রূপ, $y=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{cb}{d}}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{dc}{b}}$

$$\therefore \text{ বর্গমূল}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cb}{d}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{dc}{b}}\right)}.$$

দ্রষ্টব্য। যদি x, y, z এর নির্ণীত মানগুলি $x+y+z=a$ কে সিদ্ধ করে, তবেই প্রাপ্ত বর্গমূল নির্ণেয় বর্গমূল হইবে, নতুবা কোন বর্গমূলই পাওয়া যাইবে না। সুতরাং $x+y+z=a$এ x, y, z এর নির্ণীত মান তিনটি বসাইলে, বর্গমূল সম্ভবপর হওয়ার সর্ত হইবে :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cb}{d}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{dc}{b}}=a$$

বা, $\frac{1}{2}(bd+cb+dc)=a\sqrt{bcd}$ বা, $bd+cb+dc=2a\sqrt{bcd}.$

উদা. 1. Find the square root of $12+4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{15}$.

মনে কর, $\sqrt{12+4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

$\therefore$ উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া,

$12+4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$

ধর, $2\sqrt{xy}=4\sqrt{3}$, $2\sqrt{yz}=4\sqrt{5}$, $2\sqrt{zx}=2\sqrt{15}$, $x+y+z=12$

$\therefore$ $xy=12$, $yz=20$, $zx=15$, $xyz=\sqrt{12.20.15}=60$

$\therefore$ $x=3$, $y=4$, $z=5$ এবং এই মানগুলি দ্বারা $x+y+z=12$ সিদ্ধ হয় ;

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{3}+2+\sqrt{5}.$

158. পর্যবেক্ষণ দ্বারা বর্গমূল নির্ণয়। কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া গেল।

উদা. 2. Find the square root of $\frac{1}{2}(2x-1)+\sqrt{x^2-x-6}$.

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{2}\{(2x-1)+2\sqrt{(x+2)(x-3)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(x+2)+(x-3)+2\sqrt{(x+2)(x-3)}\}$

$=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)\right\}^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})$.

উদা. 3. Find the square root of $a^2+b^2-\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}$.

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2-2\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)})$

$=\frac{1}{2}\{(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)-2\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}\}$

$=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+ab+b^2}-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)\right\}^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+ab+b^2}-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)$.

উদা. 4. Find the square root of $15-4\sqrt{5}-2\sqrt{30}+4\sqrt{6}$.

প্রদত্ত রাশি $=15-2\sqrt{20}-2\sqrt{30}+2\sqrt{24}$

$=15-2\sqrt{4.5}-2\sqrt{5.6}+2\sqrt{6.4}$

$=4+5+6-2\sqrt{4.5}-2\sqrt{5.6}+2\sqrt{6.4}$

$=(2-\sqrt{5}+\sqrt{6})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=2-\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

159. দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর ঘনমূল। ঘনমূল নির্ণয়ের জন্য নিম্নের উপপাদ্যটির প্রয়োজন হইবে।

উপপাদ্য। যদি $\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}=a+\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt[3]{(x-\sqrt{y})}=a-\sqrt{b}$ হইবে।

প্রমাণ। $\because$ $\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}=a+\sqrt{b}$; $\therefore$ উভয় পক্ষের ত্রিঘাত লইয়া,

$x+\sqrt{y}=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$

$=(a^3+3ab)+(3a^2+b)\sqrt{b}$

$\therefore$ $x=a^3+3ab$ ··· (1) এবং $\sqrt{y}=(3a^2+b)\sqrt{b}$ ··· (2) (অনু. 59)

$\therefore$ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $x-\sqrt{y}=(a-\sqrt{b})^3$

$\therefore$ $\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=a-\sqrt{b}$.

মন্তব্য। অনুরূপে দেখান যায় যে, যদি $\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=a-\sqrt{b}$ হয়, তবে $\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}=a+\sqrt{b}$.

উদা. 5. Find the cube root of $7-5\sqrt{2}$.

মনে কর, $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x-\sqrt{y}$ ⋯ ⋯ (1)

$\therefore\ \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=x+\sqrt{y}$ ⋯ ⋯ (2)

(1) ও (2) গুণ করিয়া, $x^2-y=\sqrt[3]{49-50}=\sqrt[3]{-1}=-1$

$\therefore\ y=x^2+1$ ⋯ ⋯ (3)

(1) এর ত্রিঘাত লইয়া, $x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}=7-5\sqrt{2}$

বা, $x^3+3xy=7$ (অনু. 59) ⋯ (4)

$\therefore$ (3) হইতে, $x^3+3x(x^2+1)=7$ বা, $4x^3+3x-7=0$

বা, $4(x^3-1)+3(x-1)=0$ বা, $4(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)=0$

বা, $(x-1)(4x^2+4x+7)=0$ $\therefore$ $x-1=0$ $\therefore$ $x=1$

বা, $4x^2+4x+7=0$, যাহার বীজদ্বয় কাল্পনিক (অনু. 81)।

(3)এ $x=1$ বসাইয়া, $y=1^2+1=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=x-\sqrt{y}=1-\sqrt{2}$.

মন্তব্য। x এর কাল্পনিক বীজদ্বয় নির্ণয় করিয়া আরও দুইটি ঘনমূল নির্ণয় করা যাইতে পারে, তবে বাস্তব ঘনমূলটি নির্ণয় করিলেই চলিবে।

160. করণী-নিরসক গুণনীয়ক। অনুচ্ছেদ 46এ কতিপয় সহজ দ্বিপদ করণীর করণী-নিরসক গুণনীয়ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে সহজ ত্রিপদ করণীর এবং পরবর্তী অনুচ্ছেদদ্বয়ে শক্ত দ্বিপদ করণীর করণী-নিরসক গুণনীয়ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

$\because\ (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ [উদা. 11, পৃঃ 16]

$\therefore\ \left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)\left(-a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)$

$=2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2$, যাহা একটি মূলদ রাশি ;

$\therefore$ গুণনীয়ক চারিটির যে কোনটির করণী-নিরসক গুণনীয়ক হইবে অপর তিনটির গুণফল।

161. $x^{\frac{1}{p}}-y^{\frac{1}{q}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক নির্ণয়।

n যুগ্ম অথবা বিযুগ্ম যে কোন ধনসংখ্যাই হউক না কেন,

$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$ [অনু. 5 (1)]

এই অভেদটিতে $a=x^{\frac{1}{p}}$ এবং $b=y^{\frac{1}{q}}$ লিখিয়া,

$$\left(x^{\frac{1}{p}}-y^{\frac{1}{q}}\right)\left(x^{\frac{n-1}{p}}+x^{\frac{n-2}{p}}y^{\frac{1}{q}}+\cdots+x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{n-2}{q}}+y^{\frac{n-1}{q}}\right)=x^{\frac{n}{p}}-y^{\frac{n}{q}}.$$

এখন, $x^{\frac{n}{p}}-y^{\frac{n}{q}}$ একটি মূলদ রাশি হইবে, যদি p ও q এর ল. সা. গু. $=n$ হয়; কারণ, তাহা হইলে, $\frac{n}{p}$ এবং $\frac{n}{q}$ উভয়েই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইবে।

$\therefore$ $x^{\frac{1}{p}}-y^{\frac{1}{q}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $=x^{\frac{n-1}{p}}+x^{\frac{n-2}{p}}y^{\frac{1}{q}}+\cdots+x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{n-2}{q}}$ $+y^{\frac{n-1}{q}}$, যেখানে p এবং q এর (অর্থাৎ সূচকদ্বয়ের হর দুইটির) ল. সা. গু. $=n$.

উদা. 6. Find the rationalising factor of $2^{\frac{1}{3}}-1$.

$2^{\frac{1}{3}}-1=2^{\frac{1}{3}}-1^{1}$; $\because$ সূচকদ্বয়ের হর দুইটির ল. সা. গু. $=3$

এখন, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

এবং ইহাতে $a=2^{\frac{1}{3}}$ এবং $b=1$ বসাইয়া,

$\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}.1+1^2\right\}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-1^3=2-1=1$, যাহা মূলদ ;

$\therefore$ $2^{\frac{1}{3}}-1$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}.1+1^2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1.$

উদা. 7. Find the rationalising factor of $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}$.

$\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{4}$ এর হরদ্বয়ের ল. সা. গু. $=4$.

এখন, $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$

এবং ইহাতে $a=x^{\frac{1}{2}}$ ও $b=y^{\frac{1}{4}}$ বসাইয়া,

$\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}\right)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4-\left(y^{\frac{1}{4}}\right)^4=x^2-y$, যাহা মূলদ ;

$\therefore$ $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $=x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}$.

162. $x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{q}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক নির্ণয়।

(*i*) n যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে,

$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})=a^n-b^n$. [অনু. 5 (2)]

এই অভেদটিতে $a=x^{\frac{1}{p}}$ এবং $b=y^{\frac{1}{q}}$ লিখিয়া,

$$\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{q}}\right)\left(x^{\frac{n-1}{p}}-x^{\frac{n-2}{p}}y^{\frac{1}{q}}+\cdots+x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{n-2}{q}}-y^{\frac{n-1}{q}}\right)=x^{\frac{n}{p}}-y^{\frac{n}{q}}.$$

এখন, $x^{\frac{n}{p}} - y^{\frac{n}{q}}$ একটি মূলদ রাশি হইবে, যদি p ও q এর ল. সা. গু. $= n$ হয়।

$\therefore$ $x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{q}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $= x^{\frac{n-1}{p}} - x^{\frac{n-2}{p}} y^{\frac{1}{q}} + \cdots\cdots$
$+ x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{n-2}{q}} - y^{\frac{n-1}{q}}$, যেখানে p ও q এর (অর্থাৎ সূচকদ্বয়ের হর দুইটির) ল. সা. গু. $= n$ এবং n যুগ্ম ধনসংখ্যা।

(*ii*) n বিযুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে,

$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n$. [অনু. 5 (3)]

এই অভেদটিতে $a = x^{\frac{1}{p}}$ এবং $b = y^{\frac{1}{q}}$ লিখিয়া,

$$\left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{q}}\right)\left(x^{\frac{n-1}{p}} - x^{\frac{n-2}{p}} y^{\frac{1}{q}} + \cdots - x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{n-2}{q}} + y^{\frac{n-1}{q}}\right) = x^{\frac{n}{p}} + y^{\frac{n}{q}}$$

এখন, $x^{\frac{n}{p}} + y^{\frac{n}{q}}$ একটি মূলদ রাশি হইবে, যদি p ও q এর ল. সা. গু. $= n$ হয়।

$\therefore$ $x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{q}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $= x^{\frac{n-1}{p}} - x^{\frac{n-2}{p}} . y^{\frac{1}{q}} + \cdots$
$- x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{n-2}{q}} + y^{\frac{n-1}{q}}$, যেখানে p ও q এর (অর্থাৎ সূচকদ্বয়ের হর দুইটির) ল. সা. গু. $= n$ এবং n বিযুগ্ম ধনসংখ্যা।

উদা. 8. Find the rationalising factor of $1 + 2^{\frac{2}{3}}$.

$1 + 2^{\frac{2}{3}} = 1^1 + 2^{\frac{2}{3}}$; $\therefore$ সূচকদ্বয়ের হর দুইটির ল. সা. গু. $= 3$.

এখন, $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ এবং ইহাতে $a = 1$ ও $b = 2^{\frac{2}{3}}$ বসাইয়া,

$$\left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)\left\{1^2 - 1.2^{\frac{2}{3}} + \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2\right\} = 1^3 + \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + 4 = 5, \text{ যাহা মূলদ ;}$$

$\therefore$ $1 + 2^{\frac{2}{3}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $= 1^2 - 1.2^{\frac{2}{3}} + \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1 - 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}$.

উদা. 9. Find the rationalising factor of $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{4}}$

$\frac{1}{2}$ এবং $\frac{3}{4}$ এর হরদ্বয়ের ল. সা. গু. $= 4$.

এখন, $(a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$ এবং ইহাতে $a = x^{\frac{1}{2}}$ এবং $b = y^{\frac{3}{4}}$ বসাইয়া,

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{4}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{9}{4}}\right) = x^2 - y^3, \text{ যাহা মূলদ ;}$$

$\therefore$ $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{4}}$ এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক $= x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{9}{4}}$.

উদা. 10. Find the rationalising factor of $2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}$.

$\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{2}$ এর হরদ্বয়ের ল. সা. গু. $=6$.

এখন, $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)=a^6-b^6$ এবং ইহাতে $a=2^{\frac{1}{3}}$ এবং $b=3^{\frac{1}{2}}$ বসাইয়া,

$\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{5}{3}}-2^{\frac{4}{3}}.3^{\frac{1}{2}}+2.3-2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{1}{3}}.9-3^{\frac{5}{2}}\right)=2^2-3^3=-23$, যাহা মূলদ ;

$\therefore$ নির্ণেয় করণী-নিরসক গুণনীয়ক $=2^{\frac{5}{3}}-2^{\frac{4}{3}}.3^{\frac{1}{2}}+6-2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{3}{2}}+9.2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{2}}$.

উদা. 11. Find the rationalising factor of $9^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}}$.

প্রদত্ত রাশি $=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2+3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2$

এখন, $\left\{\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2+3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}\left(3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\right)=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=3-2=1$, যাহা মূলদ ;

$\therefore$ নির্ণেয় করণী-নিরসক গুণনীয়ক $=3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}$.

উদা. 12. Find the rationalising factor of $x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{2}}$.

$\because$ $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$\therefore$ $\left(x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}-3z^{\frac{1}{2}}\right)\left(-x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{2}}\right)$
$=72yz+18zx+8xy-x^2-16y^2-81z^2$, যাহা একটি মূলদ রাশি ;

$\therefore$ নির্ণেয় গুণনীয়ক $=\left(x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}-3z^{\frac{1}{2}}\right)\left(-x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{2}}\right)$.

উদা. 13. Rationalise the denominator of $\dfrac{2-3^{\frac{1}{3}}}{2+3^{\frac{1}{3}}}$.

$2+3^{\frac{1}{3}}=2^1+3^{\frac{1}{3}}$ এবং 1 ও $\frac{1}{3}$ এর হরদ্বয়ের ল. সা. গু. $=3$.

এখন, $\because$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

$\therefore$ $\left(2+3^{\frac{1}{3}}\right)\left\{(2)^2-2.3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}=2^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3=11$, যাহা মূলদ ;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির হর ও লবকে, $(2)^2-2.3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\text{হর} = 11 \text{ এবং লব} = \left(2 - 3^{\frac{1}{3}}\right)\left[\left\{(2)^2 + 2.3^{\frac{1}{3}} + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\} - 4.3^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= 2^3 - \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 2.4.3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}.4.3^{\frac{1}{3}} = 5 - 8.3^{\frac{1}{3}} + 4.3^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{5 - 8.3^{\frac{1}{3}} + 4.3^{\frac{2}{3}}}{11}.$$

উদা. 14. Rationalise the denominator of $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2} = \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3 - 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Exercise 69

1. Find, by inspection, the square root of :

(*i*) $7 - 2\sqrt{10}$. (*ii*) $9 + 2\sqrt{14}$. (*iii*) $7 - 4\sqrt{3}$.

(*iv*) $3 - \sqrt{5}$. (*v*) $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$. [C. U. '24] (*vi*) $\sqrt{24} + \sqrt{27}$.

2. Find the square root of :

(*i*) $15 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{30} + 4\sqrt{6}$.

(*ii*) $19 + 2\sqrt{30} + 4\sqrt{12} + 4\sqrt{10}$.

3. Find, by inspection, the square root of :

(*i*) $a + b + c + 2\sqrt{ab + ac}$. (*ii*) $2x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)}$.

(*iii*) $\frac{1}{2}(2x + 1) - \sqrt{x(x+1)}$. (*iv*) $a^2 + 1 - \sqrt{a^4 + a^2 + 1}$.

(*v*) $a + b + \sqrt{(2a + b)b}$. (*vi*) $15 - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{35} + 2\sqrt{21}$.

(*vii*) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{3}$. (*viii*) $5 - \sqrt{6} + \sqrt{15} - \sqrt{10}$.

(*ix*) $\sqrt{(x-y)(y-z)} + \sqrt{(y-z)(z-x)} + \sqrt{(z-x)(x-y)}$.

[ইঙ্গিত : প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{2}\{(x-y) + (y-z) + (z-x) + 2\sqrt{(x-y)(y-z)} + 2\sqrt{(y-z)(z-x)} + 2\sqrt{(z-x)(x-y)}\}$.]

4. Find the cube root of :

(*i*) $7 + 5\sqrt{2}$. (*ii*) $26 - 15\sqrt{3}$.

5. Find the rationalising factor of :

(i) $3^{\frac{1}{3}} - 1$. (ii) $2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{4}}$. (iii) $x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{1}{3}}$.

(iv) $x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{2}{5}}$. (v) $3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{2}{3}}$. (vi) $4^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 1$.

(vii) $\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

6. Express with a rational denominator :

(i) $\dfrac{3^{\frac{1}{3}} - 1}{3^{\frac{1}{3}} + 1}$. (ii) $\dfrac{2 + 3^{\frac{2}{3}}}{2 - 3^{\frac{2}{3}}}$.

(iii) $\dfrac{1}{9^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} + 1}$. (iv) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

7. Rationalise the equation :

(i) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0$. (ii) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$.

8. If $\sqrt[3]{(x-y)} + \sqrt[3]{(y-z)} + \sqrt[3]{(z-x)} = 0$, show that $x = y = z$.

9. If $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, show that $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x = 8$.

10. Show that $\sqrt[3]{[a\sqrt[3]{\{a\sqrt[3]{(a\cdots \text{ to } \infty)}\}}]} = \sqrt{a}$.

11. If $x = y\sqrt{(1+z^2)} + z\sqrt{(1+y^2)}$, show that
$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z) = 4x^2y^2z^2$.

কাল্পনিক রাশি

163. কোন বাস্তব রাশি, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, উহার বর্গ ধনাত্মক রাশি। বিপরীতক্রমে, শুধু ধনাত্মক রাশিরই বর্গমূল বাস্তব রাশি হইতে পারে। 4 এর বর্গমূল $+2$ বা -2 কিন্তু -4 এর বর্গমূল $+2, -2$ বা অপর কোন বাস্তব রাশি নহে। তদ্রূপ, $\sqrt{a^2}$ এর মান $+a$ বা $-a$, কিন্তু $\sqrt{-a^2}$ এর মান কোন বাস্তব সংখ্যা নহে। এইজন্য ঋণাত্মক রাশির বর্গমূলকে **কাল্পনিক রাশি** (Imaginary Quantity) বলে। কাল্পনিক রাশি হইলেও বাস্তব রাশির ন্যায় উহার অস্তিত্ব আছে; কারণ $\sqrt{-1}$ এ এমন একটি রাশি বুঝায়, যাহার বর্গ -1 এবং $\sqrt{-a}$ এ এমন একটি রাশি বুঝায়, যাহার বর্গ $-a$.

ঋণাত্মক রাশির বর্গমূলই শুধু কাল্পনিক রাশি নহে; পরন্তু, ঋণাত্মক রাশির যে কোন যুগ্ম মূলই কাল্পনিক রাশি; যেমন,

$\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-3}$, $\sqrt[6]{-4}$ ইত্যাদি রাশিগুলি সবই কাল্পনিক।

কিন্তু $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{-4}$ ইত্যাদি রাশিগুলি কাল্পনিক নহে, কারণ $\sqrt[3]{-1}=-1$, $\sqrt[3]{-2}=-2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{-3}=-3^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt[5]{-4}=-4^{\frac{1}{5}}$ ইত্যাদি।

লিখিবার সুবিধার জন্য কাল্পনিক (imaginary) রাশি $\sqrt{-1}$ কে imaginary শব্দের আদ্যক্ষর i দ্বারা প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

বাস্তব রাশিঘটিত যোগবিয়োগাদি যাবতীয় প্রক্রিয়া কাল্পনিক রাশির বেলায়ও সমভাবে প্রযোজ্য হইবে ; যেমন,

(i) $5i+3i=8i.$ (ii) $5i-3i=2i.$

(iii) $5i\times 3i=15i^2=-15.$ (iv) $5i\div 3i=\frac{5}{3}.$

(v) $\sqrt{-5}=\sqrt{5\times(-1)}=\sqrt{5}\times\sqrt{-1}=\sqrt{5}i.$

(vi) $\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2\times(-1)}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{-1}=ai.$

(vii) $\sqrt[4]{-a^5}=\sqrt[4]{a^5\times(-1)}=\sqrt[4]{a^5}\times\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{a^5}\times\sqrt[4]{i}.$

মন্তব্য। (v), (vi) ও (vii) হইতে দেখা যায়, যে কোন কাল্পনিক রাশিকে একটি বাস্তব রাশি এবং i এর অথবা i এর কোন ঘাতের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

164. iএর ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত।

$i^1=i=\sqrt{-1}$, $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$, $i^3=i^2.i=-i$,
$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$, $i^5=i^4.i=i$, $i^6=i^4.i^2=1.(-1)=-1$;

$\therefore$ n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$i^{4n}=(i^4)^n=1^n=1$, $i^{4n+1}=i^{4n}.i=1.i=i$,
$i^{4n+2}=i^{4n}.i^2=1.(-1)=-1$, $i^{4n+3}=i^{4n}.i^3=1.(-i)=-i$;

$\therefore$ iএর কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাতের মান $1, -1, i$ বা $-i$, তন্মধ্যে ± 1 বাস্তব এবং $\pm i$ কাল্পনিক।

165. iএর ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাত।

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i,\quad i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=\frac{i}{1}=i,\quad i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1,$$

$$i^{-5}=\frac{1}{i^5}=\frac{i}{i^6}=\frac{i}{-1}=-i,\quad i^{-6}=\frac{1}{i^6}=\frac{1}{i^4.i^2}=\frac{1}{1.(-1)}=-1\,;$$

∴ n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$i^{-4n}=\frac{1}{i^{4n}}=\frac{1}{(1)^n}=\frac{1}{1}=1, \qquad i^{-(4n+1)}=\frac{i}{i^{4n}.i^2}=\frac{i}{1.(-1)}=-i,$$

$$i^{-(4n+2)}=\frac{1}{i^{4n}.i^2}=\frac{1}{1.(-1)}=-1, \quad i^{-(4n+3)}=\frac{i}{i^{4n}.i^4}=\frac{i}{1.1}=i;$$

∴ i এর কোন ঋণাত্মক অখণ্ড ঘাতের মান $1, -1, i$ বা $-i$, তন্মধ্যে ± 1 বাস্তব এবং $\pm i$ কাল্পনিক।

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর: 4 এর বর্গমূল 2 কি -2 জানা না থাকিলে $\sqrt{4}=\pm 2$ লেখা হয়। কিন্তু $\sqrt{2\times 2}=\sqrt{4}=+2$, ± 2 নহে, কারণ 4 এর বর্গমূল যে 2, তাহা $\sqrt{2\times 2}$ হইতে স্পষ্ট বুঝা যায়।

∴ (i) $\sqrt{(-1)(-1)}=-1$, কিন্তু $\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=\pm 1$ নহে।

(ii) $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{(-1)a}\times\sqrt{(-1)b}=-1\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$

কিন্তু $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{(-1)a\times(-1)b}=\sqrt{1.ab}=\pm 1\sqrt{ab}=\pm\sqrt{ab}$ নহে।

Exercise 70

1. Find the values of :

(i) $2\sqrt{-4}+3\sqrt{-9}$. (ii) $4\sqrt{-9}-3\sqrt{-25}$.

(iii) $4\sqrt{-3}\times 3\sqrt{-4}$. (iv) $2\sqrt{-3}\times 3\sqrt{-4}\times 4\sqrt{-5}$.

(v) $4\sqrt{-18}+3\sqrt{-\sqrt{2}}$. (vi) $(3\sqrt{-8})^2+(2\sqrt{-3})^4$.

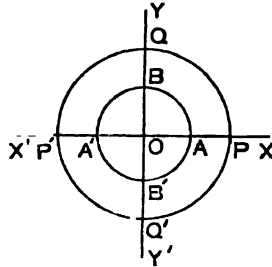
2. Find the values of :

(i) i^{17}. (ii) i^{30}. (iii) i^{51}. (iv) i^{64}.

(v) i^{-21}. (vi) i^{-34}. (vii) i^{-55}. (viii) i^{-80}.

166. iএর জ্যামিতিক অর্থ (Interpretation)।

X′OX এবং Y′OY সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। X′OX যেন x-অক্ষ, Y′OY y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং 1 কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন x-অক্ষকে A ও A′ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B ও B′ বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে

অবস্থিত A বিন্দু 1 বা $(\sqrt{-1})^4$ বা i^4 সূচিত করে এবং ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত A′ বিন্দু -1 বা $(\sqrt{-1})^2$ বা i^2 সূচিত করে।

এখন, A বিন্দু ধনাত্মক দিকে (anticlockwise) 1 সমকোণ করিয়া পর পর 2 সমকোণ ঘুরিয়া A′এর অবস্থানে আসিলে, A′ বিন্দু -1 বা $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ বা $i\times i$ সূচিত করে। সুতরাং A বিন্দু ধনাত্মক দিকে 1 সমকোণ ঘুরিয়া Bর অবস্থানে আসিলে, B বিন্দু $\sqrt{-1}$ বা i সূচিত করে।

অনুরূপে, A বিন্দু ধনাত্মক দিকে 3 সমকোণ ঘুরিয়া B′ এর অবস্থানে আসিলে, B′ বিন্দু $(\sqrt{-1})^3$ বা $(i)^3$ বা $-i$ সূচিত করে।

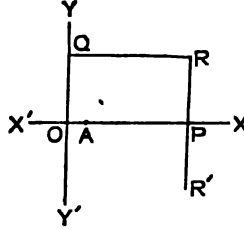
$\therefore$ A, B, A′, B′ বিন্দু চারিটি যথাক্রমে $i^4(=1)$, $i(=\sqrt{-1})$, $i^2(=-1)$, $-i(=-\sqrt{-1})$ সূচিত করে। তাহা হইলে, $i^4(=1)$, i, $i^2(=-1)$, $-i$ যথাক্রমে জ্যামিতিক বিন্দু A, B, A′, B′ দ্বারা সূচিত হইল।

আবার দেখ, 1 এর পরিবর্তে বাস্তব সংখ্যা a কে ব্যাসার্ধ লইয়া যদি একটি বৃত্ত অঙ্কিত করি এবং ঐ বৃত্ত যদি x-অক্ষকে P ও P′ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে Q ও Q′ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে P, Q, P′, Q′ যথাক্রমে a, ai, $-a$, $-ai$ সূচিত করিবে। ইহাদের ভিতর বাস্তব সংখ্যা a ও $-a$, x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং কাল্পনিক সংখ্যা ai ও $-ai$, y-অক্ষের উপর অবস্থিত। সুতরাং গৃহীত ব্যাসার্ধ a যে কোনও একটি বাস্তব সংখ্যা বলিয়া, সমুদয় বাস্তব সংখ্যা x-অক্ষের উপর থাকিবে এবং সমুদয় কাল্পনিক সংখ্যা y-অক্ষের উপর থাকিবে। এইজন্য x-অক্ষকে **বাস্তব অক্ষ** (Real axis) এবং y-অক্ষকে **কাল্পনিক অক্ষ** (Imaginary axis) বলে।

167. জটিল রাশি। যে কোন দুইটি বাস্তব রাশি a এবং b যদি $a+ib$ এর আকারে প্রকাশিত থাকে, তবে $a+ib$ কে **জটিল রাশি** (Complex quantity) বলে। এস্থলে 'জটিল রাশি' কথাটি 'কাল্পনিক জটিল রাশি' অর্থে ব্যবহৃত হইয়াছে। জটিল রাশির দুইটি অংশ, একটি অংশ বাস্তব এবং অপরটি কাল্পনিক। $a+ib$ এর

a বাস্তব অংশ এবং ib জটিল অংশ। $b=0$ হইলে, জটিল রাশিটি বাস্তব রাশিতে পরিণত হয় এবং $a=0$ হইলে, জটিল রাশিটি সরল কাল্পনিক রাশিতে পরিণত হয়।

168. (i) **জটিল রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ (Representation)।**

মনে কর, $a+ib$ কে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

X'OX এবং Y'OY সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। X'OX যেন x-অক্ষ বা বাস্তব অক্ষ, Y'OY y-অক্ষ বা কাল্পনিক অক্ষ (অনু. 166) এবং O মূলবিন্দু বা 0 সংখ্যাজ্ঞাপক বিন্দু।

$a+ib$ এর a বাস্তব ধনসংখ্যা, এবং b বাস্তব ধনসংখ্যা হইলেও ib কাল্পনিক ধনসংখ্যা। মনে কর, উভয় স্থলেই OA কে দৈর্ঘ্যের একক লওয়া হইল।

এখন, OA.aর সমান করিয়া বাস্তব অক্ষে ধনাত্মক দিক বরবারে ($\because$ a বাস্তব ধনসংখ্যা) OP লও। তাহা হইলে, P বিন্দু a সূচিত করিবে (অনু. 166)।

আবার, OA.bর সমান করিয়া কাল্পনিক অক্ষে ধনাত্মক দিক বরাবরে ($\because$ ib কাল্পনিক ধনসংখ্যা) OQ লও। তাহা হইলে Q বিন্দু ib সূচিত করিবে।

P বিন্দুতে OX এর উপর এবং Q বিন্দুতে OY এর উপর ধনাত্মক দিক বরাবরে লম্ব টান; লম্বদ্বয় যেন পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে R বিন্দু যুগপৎ a কে ($\because$ ▭OQRP এর QR$=$OP) এবং ib কে ($\because$ PR$=$OQ) সূচিত করে।

তাহা হইলে জ্যামিতিক বিন্দু R, $a+ib$ কে সূচিত করে।

(ii) **অনুবন্ধী জটিল রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ।**

মনে কর, $a+ib$র অনুবন্ধী $a-ib$ কে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

RP কে বর্ধিত করিয়া RPর সমান করিয়া PR' লও। তাহা হইলে R' বিন্দু $a-ib$ কে সূচিত করিবে।

প্রমাণ। $\because$ $OP=a$ এবং $PR'=-PR=-ib$, $\therefore$ R′ বিন্দু যুগপৎ a কে এবং $-ib$ কে সূচিত করে। $\therefore$ R′ বিন্দু $a-ib$ কে সূচিত করে।

তাহা হইলে দেখা যায়, দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির সূচক বিন্দুদ্বয় বাস্তব x-অক্ষ বরাবরে পরস্পরের প্রতিবিম্ব (Image)।

169. দুইটি জটিল রাশির যোগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

মনে কর. $a+ib$র এবং $c+id$র যোগফলকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

X′OX এবং Y′OY সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। X′OX যেন বাস্তব অক্ষ এবং Y′OY কাল্পনিক অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। মনে কর, P এবং Q বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $a+ib$ এবং $c+id$ সূচিত করে। POQR সামান্তরিকটি আঁক। তাহা হইলে R বিন্দু $a+ib$ এবং $c+id$ এর যোগফলকে সূচিত করিবে।

OX এর উপর PL, QM, RN এবং RN এর উপর QS লম্ব টান। RQ কে OX এর T বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

এখন POL এবং RQS ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle POL=$ অনুরূপ $\angle RTN=$ অনুরূপ $\angle RQS$, সম $\angle PLO=$ সম $\angle RSQ$ এবং $PO=RQ$ ($\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু); $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $ON=MN+OM=QS+OM=OL+OM=a+c$

এবং $NR=SR+NS=LP+MQ=ib+id=i(b+d)$.

$\therefore$ R বিন্দু যুগপৎ $(a+c)$ কে এবং $i(b+d)$ কে সূচিত করে ;

$\therefore$ R বিন্দু $(a+c)+i(b+d)$ কে সূচিত করে ;

অর্থাৎ R বিন্দু $a+ib$ এবং $c+id$র যোগফলকে সূচিত করে।

170. জটিল রাশির বিয়োগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

মনে কর, $a+ib$ হইতে $c+id$র বিয়োগফলকে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

X'OX এবং Y'OY সরলরেখাদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। X'OX যেন বাস্তব অক্ষ, Y'OY কাল্পনিক অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। মনে কর, P ও Q বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $a+ib$ এবং $c+id$ সূচিত করে। OQPR সামান্তরিকটি আঁক। তাহা হইলে R বিন্দু $a+ib$ হইতে $c+id$র বিয়োগফলকে সূচিত করিবে।

OX এর উপর PL, QM, RN এবং PL এর উপর QS লম্ব টান। PQ কে OX এর T বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

এখন, RON এবং PQS ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle$RON = অনুরূপ $\angle$PTL = অনুরূপ $\angle$PQS, সম$\angle$RNO = সম$\angle$PSQ এবং RO = PQ ($\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু); $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ ON = QS = OL − OM = $a-c$

এবং NR = SP = LP − MQ = $ib-id=i(b-d)$

$\therefore$ R বিন্দু যুগপৎ $a-c$ এবং $i(b-d)$ কে সূচিত করে ;

$\therefore$ R বিন্দু $(a-c)+i(b-d)$ কে সূচিত করে ;

অর্থাৎ, R বিন্দু $a+ib$ হইতে $c+id$র বিয়োগফলকে সূচিত করে।

171. দুইটি জটিল রাশির গুণফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

মনে কর, পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত X'OX বাস্তব অক্ষ, Y'OY কাল্পনিক অক্ষ, O মূলবিন্দু, OA = 1 হইলে OP = r_1 ও OQ = r_2, $\angle$AOP = θ_1, $\angle$AOQ = θ_2. θ_1 এর সমান করিয়া $\angle$QOR আঁক, যেন উহার বাহু OR = $r_1.r_2$ হয়। OX এর উপর PL, QM ও RN লম্বত্রয় টান।

এখন, $OL = r_1 \cos\theta_1$ এবং $LP = ir_1 \sin\theta_1$; $\therefore$ P বিন্দু $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ কে সূচিত করে। অনুরূপে Q বিন্দু $r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ কে সূচিত করে।

আমরা প্রমাণ করিব যে, R বিন্দু, P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত রাশিদ্বয়ের গুণফলকে সূচিত করে।

প্রমাণ। $\because$ $OR = r_1.r_2$ এবং $\angle NOR = \theta_1 + \theta_2$ (অঙ্কন);

$\therefore$ $ON = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ এবং $NR = ir_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$

$\therefore$ R বিন্দু $r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$ কে সূচিত করে।

আবার, P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত রাশিদ্বয়ের গুণফল

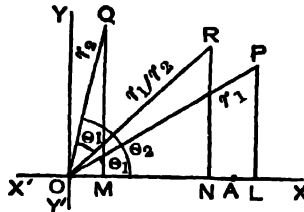
$= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$= r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$.

$\therefore$ R বিন্দু, P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত রাশিদ্বয়ের গুণফলকে সূচিত করে।

172. দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

মনে কর, পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত X'OX বাস্তব অক্ষ, Y'OY কাল্পনিক অক্ষ, O মূলবিন্দু, $OA = 1$ হইলে $OP = r_1$ ও $OQ = r_2$, $\angle AOP = \theta_1$, $\angle AOQ = \theta_2$.

θ_1 এর সমান করিয়া ঋণাত্মক দিকে $\angle QOR$ আঁক, যেন উহার বাহু $OR = r_1/r_2$ হয়। OX এর উপর PL, QM ও RN লম্বত্রয় আঁক।

এখন, $OL = r_1 \cos\theta_1$ এবং $LP = ir_1 \sin\theta_1$; $\therefore$ P বিন্দু $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$-কে সূচিত করে। অনুরূপে Q বিন্দু $r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ কে সূচিত করে।

আমরা প্রমাণ করিব যে, R বিন্দু $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)/r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$-কে সূচিত করে।

প্রমাণ। $\because$ $OR = r_1/r_2$ এবং $\angle NOR = \theta_2 - \theta_1$ (অঙ্কন);

$\therefore$ $ON = \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_2 - \theta_1)$ এবং $NR = i\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_2 - \theta_1)$

$\therefore$ R বিন্দু, $\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\}$ কে সূচিত করে।

আবার, (Pর দ্বারা সূচিত রাশি) $\div$ (Qর দ্বারা সূচিত রাশি)

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\}}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\}.$$

$\therefore$ R বিন্দু, $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)/r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ কে সূচিত করে।

173. জটিল রাশির কতিপয় বিশেষ ধর্ম।

(i) $a + ib = 0$ হইলে, $a = 0$, $b = 0$.

$\because$ $a + ib = 0$, $\therefore$ $a = -ib$.

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $a^2 = -b^2$ বা, $a^2 + b^2 = 0$.

এখন, বর্গসংখ্যা বলিয়া, a^2 এবং b^2 উভয়েই ধনাত্মক ; সুতরাং উহাদের প্রত্যেকে 0 না হইলে, উহাদের যোগফল 0 হইতে পারে না ;

$\therefore$ $a^2 = 0$ এবং $b^2 = 0$ $\therefore$ $a = 0$, $b = 0$.

(ii) $a + ib = c + id$ হইলে, $a = c$, $b = d$.

পক্ষান্তর করিয়া, $a - c = -i(b - d)$.

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $(a - c)^2 = i^2(b - d)^2 = -(b - d)^2$

বা, $(a - c)^2 + (b - d)^2 = 0$

এখন, বর্গসংখ্যা বলিয়া, $(a-c)^2$ এবং $(b-d)^2$ উভয়েই ধনাত্মক ; সুতরাং উহাদের প্রত্যেকে 0 না হইলে, উহাদের যোগফল 0 হইতে পারে না ;

$\therefore\ (a-c)^2=0$ এবং $(b-d)^2=0$ বা, $a-c=0$ এবং $b-d=0$;

$$\therefore\ a=c,\ b=d.$$

টীকা। *(ii)* হইতে দেখা যায়, দুইটি কাল্পনিক জটিল রাশি পরস্পর সমান হইলে, উহাদের বাস্তব অংশদ্বয় পরস্পর সমান এবং কাল্পনিক অংশদ্বয় পরস্পর সমান।

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির সমষ্টি এবং গুণফল বাস্তব।

$a+ib$ এবং $a-ib$ দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশি।

উহাদের সমষ্টি $=a+ib+a-ib=2a$, যাহা বাস্তব।

উহাদের গুণফল $=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$, যাহা বাস্তব।

(iv) দুইটি জটিল রাশির সমষ্টি এবং অন্তর জটিল রাশি।

$a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি।

উহাদের সমষ্টি $=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d)$, যাহা জটিল।

উহাদের অন্তর $=(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$, যাহা জটিল।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $(a+ib)\pm(c+id)\pm(e+if)\pm\cdots=$ জটিল রাশি।

(v) দুই বা ততোধিক জটিল রাশির গুণফল জটিল রাশি।

$a+ib,\ c+id,\ e+if$ প্রভৃতি জটিল রাশি।

$(a+ib)(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd$

$\quad=(ac-bd)+i(bc+ad)$, যাহা জটিল রাশি।

$(a+ib)(c+id)(e+if)=(\alpha+i\beta)(e+if)$ [$ac-bd=\alpha$ এবং $bc+ad=\beta$ ধরিয়া];

$\quad=\alpha e+i\beta e+i\alpha f+i^2\beta f$

$\quad=(\alpha e-\beta f)+i(\beta e+\alpha f)$, যাহা জটিল রাশি।

অনুরূপে, যে কোন সংখ্যক জটিল রাশির গুণফল জটিল রাশি হইবে।

(vi) দুইটি জটিল রাশির ভাগফল জটিল রাশি।

$a+ib$ ও $c+id$ যেন দুইটি জটিল রাশি।

এখন, $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{ac+ibc-iad-i^2bd}{c^2-i^2d^2}$

$=\dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$, যাহা জটিল রাশি।

(vii) জটিল রাশির ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত জটিল রাশি।

$a+ib$ যেন একটি জটিল রাশি।

$(a+ib)^2=a^2-b^2+i2ab=(a^2-b^2)+i2ab$, যাহা জটিল রাশি।

$(a+ib)^3=a^3+3a^2.ib+3a(ib)^2+(ib)^3$

$=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3)$, যাহা জটিল রাশি।

অনুরূপে, $a+ib$র যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাত জটিল রাশি হইবে।

(viii) জটিল রাশির যে কোন মূল জটিল রাশি।

মনে কর, $a+ib$ একটি জটিল রাশি এবং $\sqrt[n]{a+ib}=x$. তাহা হইলে, $a+ib=x^n$. এখন, যদি x বাস্তব হয়, তবে x^n বাস্তব হইবে। কাজেই $a+ib$ও বাস্তব হইবে, যাহা কল্পনানুসারে কাল্পনিক জটিল রাশি।

$\therefore$ x অর্থাৎ $\sqrt[n]{a+ib}$ বাস্তব হইতে পারে না; $\therefore$ $\sqrt[n]{a+ib}$ কাল্পনিক জটিল রাশি।

174. জটিল রাশির বর্গমূল।

মনে কর, $a+ib$র বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ জটিল রাশির যে কোন মূল জটিল রাশি [অনু. 173 (viii)];

$\therefore$ $\sqrt{a+ib}=x+iy$ ধর, যেখানে x এবং y বাস্তব ;

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $a+ib=x^2-y^2+2ixy$. তাহা হইলে,

$\because$ উভয় পক্ষের বাস্তব অংশদ্বয় সমান এবং কাল্পনিক অংশদ্বয় সমান [অনু. 173 (ii)]।

$\therefore$ $x^2-y^2=a$ ⋯ (1) এবং $2ixy=ib$, $\therefore$ $2xy=b$ ⋯ (2)

$\therefore$ $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$;

$\therefore$ $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ ⋯ (3)

$\therefore$ (1) ও (3) যোগ করিয়া এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$x^2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a) \text{ এবং } y^2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)$$

$\therefore$ $x=\pm\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}$ এবং $y=\pm\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}$.

(2) হইতে দেখা যায়, bর যে চিহ্ন থাকিবে, xyর সেই চিহ্নই থাকিবে ;

$\therefore$ b ধনাত্মক হইলে, x এবং y এর উভয়েই হয় ধনাত্মক, নয় ঋণাত্মক হইবে এবং b ঋণাত্মক হইলে, x এবং y এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

∴ b ধনাত্মক হইলে,

নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm[\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}} + i\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$.

এবং b ঋণাত্মক হইলে,

নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm[\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}} - i\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$.

মন্তব্য। (*i*) কল্পনানুসারে x এবং y বাস্তব; সুতরাং উহাদের একটি বা উভয়েই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, x^2+y^2 ধনাত্মক। কাজেই (3)এ x^2+y^2 এর তুল্যমান $\sqrt{a^2+b^2}$ কে ধনাত্মক ধরা হইয়াছে।

(*ii*) b ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, $a+ib$র বর্গমূল দুইটি, যাহাদের পরম মান সমান কিন্তু চিহ্ন পৃথক্।

175. If $\sqrt{a+ib}=x+iy$, then $\sqrt{a-ib}=x-iy$.

$\sqrt{a+ib}=x+iy$ এর উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া,

$$a+ib=x^2-y^2+2ixy, \quad \therefore \quad a=x^2-y^2 \text{ এবং } b=2xy;$$

$$\therefore \quad a-ib=x^2-y^2-2ixy=(x-iy)^2, \quad \therefore \quad \sqrt{a-ib}=x-iy.$$

176. মডিউলাস। a^2+b^2 এর ধনাত্মক বর্গমূলটিকে অর্থাৎ $+\sqrt{a^2+b^2}$ কে $a+ib$ এবং $a-ib$ এর প্রত্যেকের **মডিউলাস** (Modulus) বলে। যেমন,

$3+4i$ এর মডিউলাস $=\sqrt{3^2+4^2}=5$

এবং $3-4i$ এর মডিউলাস $=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

$a+ib$র modulus কে সংক্ষেপে mod $(a+ib)$ লেখা হয়।

177. মডিউলাসের কতিপয় বিশেষ ধর্ম।

(i) একটি জটিল রাশির এবং উহার অনুবন্ধীর একই মডিউলাস।

$a+ib$ একটি জটিল রাশি এবং $a-ib$ উহার অনুবন্ধী।

এখন, mod $(a+ib)=\sqrt{a^2+b^2}$

এবং mod $(a-ib)=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\therefore$ mod $(a+ib)=$ mod $(a-ib)$.

(ii) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের মডিউলাস, উহাদের মডিউলাসদ্বয়ের গুণফলের সমান।

মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি, যাহাদের

গুণফল $=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$.

∴ জটিল রাশিদ্বয়ের গুণফলের মডিউলাস

$$= \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$$
$$= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$$
$$= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{c^2+d^2}$$

$=(a+ib)$র মডিউলাস $\times (c+id)$র মডিউলাস

= জটিল রাশিদ্বয়ের মডিউলাসদ্বয়ের গুণফল।

∴ প্রমাণিত হইল।

(iii) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডিউলাস, উহাদের মডিউলাসদ্বয়ের ভাগফলের সমান।

মনে কর, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি, যাহাদের

ভাগফল $= \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

∴ জটিল রাশিদ্বয়ের ভাগফলের মডিউলাস

$$= \left\{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$= \dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{(a+ib)\text{র মডিউলাস}}{(c+id)\text{র মডিউলাস}}$;

= জটিল রাশিদ্বয়ের মডিউলাসদ্বয়ের ভাগফল ; ∴ প্রমাণিত হইল।

178. 1 এর ঘনমূল (Cube roots of unity)।

মনে কর, $x = \sqrt[3]{1}$. তাহা হইলে, $x^3 = 1$

বা, $x^3 - 1 = 0$ বা, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

∴ $x - 1 = 0$ ⋯ (1) অথবা, $x^2+x+1=0$ ⋯ (2)

$\therefore$ (1) হইতে, $x=1$ এবং (2) হইতে $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$ (অমু. 81)

$\therefore$ 1 এর ঘনমূল $1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ ও $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ এবং এই তিনটি ঘনমূলের প্রথমটি বাস্তব এবং অপর দুইটি কাল্পনিক।

179. 1 এর ঘনমূল তিনটির কতিপয় বিশেষত্ব।

(i) 1 এর ঘনমূলত্রয়ের সমষ্টি শূন্য।

$$\text{ঘনমূলত্রয়ের সমষ্টি} = 1+\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$$
$$=1+\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3})$$
$$=1+\tfrac{1}{2}(-2)=1-1=0.$$

(ii) 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের প্রত্যেকটির বর্গ অপরটির সমান।

$$\{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2=\tfrac{1}{4}(1-3-2\sqrt{-3})=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$$

এবং $\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2=\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}).$

মন্তব্য। 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপরটির বর্গের সমান।

(iii) 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের গুণফল 1.

$$\{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}\{\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}=\tfrac{1}{4}\{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2\}$$
$$=\tfrac{1}{4}(1+3)=1.$$

মন্তব্য। 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের গুণফল 1 বলিয়া, উহাদের প্রত্যেকটি অপরটির অন্যোন্যক।

কতিপয় অনুসিদ্ধান্ত। 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের প্রত্যেকটির বর্গ অপরটির সমান [(*ii*)এ প্রমাণিত]। সুতরাং উহাদের যে কোন একটিকে ω দ্বারা সূচিত করিলে অপরটি ω^2 দ্বারা সূচিত হইবে। কাজেই সুবিধার জন্য 1 এর ঘনমূল তিনটিকে সাধারণতঃ $1, \omega, \omega^2$ দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

(1) $\because$ $x^2+x+1=0$ এর একটি বীজ ω [অনু. 178]; সুতরাং সমীকরণটি ω দ্বারা সিদ্ধ হইবে। $\therefore$ $\omega^2+\omega+1=0.$

$\therefore$ 1 এর ঘনমূলত্রয়ের সমষ্টি শূন্য, যাহা পৃথক প্রণালীতে (*i*)এ প্রমাণিত হইয়াছে।

(2) $\because$ $x^2+x+1=0$ এর আর একটি বীজ ω^2; সুতরাং সমীকরণটি ω^2 দ্বারা সিদ্ধ হইবে। $\therefore$ $(\omega^2)^2+(\omega)^2+1=0$ বা, $(\omega^2)^2+(\omega)^2+1^2=0$

$\therefore$ **1 এর ঘনমূলত্রয়ের বর্গের সমষ্টি শূন্য।**

এই সত্যটি অন্যভাবেও প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে ; কারণ, $(\omega^2)^2+(\omega)^2+(1)^2$ $=\omega^3.\omega+\omega^2+1=1.\omega+\omega^2+1=\omega^2+\omega+1=0$ [(1) হইতে]।

(3) $\because$ ω, 1এর ঘনমূল, $\therefore$ $\omega^3=1$; $\therefore$ $\omega=\dfrac{1}{\omega^2}$ এবং $\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$

$\therefore$ 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপরটির অন্যোন্যক, যাহা পৃথক প্রণালীতে (*iii*)এ প্রমাণিত হইয়াছে।

(4) প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার তিনটি ঘনমূল, যাহাদের একটি বাস্তব বা পাটীগাণিতিক মূল এবং অপর দুইটি কাল্পনিক মূল। কোন বাস্তব সংখ্যা, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, উহার বাস্তব ঘনমূলটিকে ω এবং ω^2 দ্বারা গুণ করিয়া কাল্পনিক ঘনমূল দুইটি পাওয়া যাইতে পারে। যেমন,

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8\times 1}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{1}=2\times\sqrt[3]{1} \text{ এবং } \sqrt[3]{1}=1, \omega, \omega^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{8}=2, 2\omega, 2\omega^2.$$

অনুরূপে, $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3\times 1}=-2\times\sqrt[3]{1}$; $\therefore\ \sqrt[3]{-8}=-2, -2\omega, -2\omega^2$.

তদ্রূপ, $\sqrt[3]{\pm a^3}=\pm a, \pm a\omega, \pm a\omega^2$.

180. Find the cube root of -1.

মনে কর, $x=\sqrt[3]{-1}$. তাহা হইলে, $x^3=-1$

বা, $x^3+1=0$ বা, $(x+1)(x^2-x+1)=0$.

$\therefore\quad x+1=0 \cdots (1)$ অথবা, $x^2-x+1=0 \cdots (2)$

$\therefore$ (1) হইতে, $x=-1$ এবং (2) হইতে, $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$ [অনু. 81]

$\therefore\quad -1$ এর ঘনমূল $=-1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ এবং $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

মন্তব্য। 1এর ঘনমূল $1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ যথাক্রমে, $1, \omega, \omega^2$ হইলে -1 এর ঘনমূল যথাক্রমে, $-1, -\omega^2, -\omega$. সুতরাং 1 এবং -1 এর ঘনমূলত্রয়ের পরম মান সমান কিন্তু চিহ্ন পৃথক।

181. ω এর বিভিন্ন ঘাত।

ω এর যে কোন অখণ্ড ঘাতের মান 1, ω বা ω^2.

কারণ, $\omega^3=1$, $\omega^4=\omega^3.\omega=\omega$, $\omega^5=\omega^3.\omega^2=\omega^2$, $\omega^6=(\omega^3)^2=(1)^2=1$, $\omega^7=(\omega^3)^2.\omega=\omega$, $\omega^8=(\omega^3)^2.\omega^2=\omega^2$, $\omega^9=(\omega^3)^3=(1)^3=1$, ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, $\omega^n=1$, ω বা ω^2, যেখানে n এমন একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা, যাহাকে 3 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 0, 1 ও 2 থাকে।

আবার, $\omega^{-3}=\dfrac{1}{\omega^3}=\frac{1}{1}=1$, $\omega^{-4}=\omega^{-3}.\dfrac{1}{\omega}=1.\dfrac{\omega^3}{\omega}=\omega^2$, $\omega^{-5}=\omega^{-3}.\dfrac{1}{\omega^2}$ $=1.\dfrac{\omega^3}{\omega^2}=\omega$, $\omega^{-6}=(\omega^{-3})^2=1$, $\omega^{-7}=\omega^{-6}.\dfrac{1}{\omega}=(1)^2.\omega^3=\omega^2$, ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, $\omega^{-n}=1$, ω বা ω^2, যেখানে n এমন একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা, যাহাকে 3 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 0, 2 ও 1 থাকে।

$\therefore$ ω এর যে কোন অখণ্ড ঘাতের সূচক, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, ঘাতটির মান 1, ω বা ω^2 হইবে।

উদা. 1. Express $\dfrac{1}{2-\sqrt{-3}}$ with a rational denominator.

$$\frac{1}{2-\sqrt{-3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}i}=\frac{2+\sqrt{3}i}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)}=\frac{2+\sqrt{3}i}{2^2-(\sqrt{3}i)^2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}i}{4+3}=\frac{2+\sqrt{3}i}{7}.$$

উদা. 2. Rationalise the denominator of $\dfrac{3\sqrt{-2}-2\sqrt{-3}}{4\sqrt{-2}+5\sqrt{-3}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{i(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{i(4\sqrt{2}+5\sqrt{3})}=\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}-5\sqrt{3})}{(4\sqrt{2}+5\sqrt{3})(4\sqrt{2}-5\sqrt{3})}$$

$$=\frac{24-8\sqrt{6}-15\sqrt{6}+30}{32-75}=-\frac{54-23\sqrt{6}}{43}.$$

উদা. 3. Express $\dfrac{3+2i}{4-3i}$ in the form $a+ib$.

$$\frac{3+2i}{4-3i}=\frac{(3+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{12+8i+9i-6}{4^2-(3i)^2}=\frac{6+17i}{16+9}$$

$$=\frac{6+17i}{25}=\tfrac{6}{25}+i\,\tfrac{17}{25},$$ যাহা $a+ib$র আকারের।

উদা. 4. Find the square root of $3-4i$.

মনে কর, $\sqrt{3-4i}=x+iy$. তাহা হইলে, $3-4i=x^2-y^2+2ixy$

$\therefore$ $x^2-y^2=3 \cdots (1)$ এবং $2xy=-4$ বা, $xy=-2 \cdots (2)$

$\therefore$ $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=9+16=25,$

$\therefore$ $x^2+y^2=5 \cdots (3)$

$\therefore$ (1) ও (3) যোগ করিয়া এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$x^2=4$ এবং $y^2=1$; $\therefore$ $x=\pm 2$ এবং $y=\pm 1.$

(2) হইতে দেখা যায়, xy ঋণাত্মক ; সুতরাং x এবং y বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ;

$\therefore$ $x=2,\ y=-1$ অথবা $x=-2,\ y=1$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $2-i$ এবং $-2+i$ অর্থাৎ $\pm(2-i)$.

টীকা। উপরে প্রদর্শিত প্রণালীই বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম। তবে পরীক্ষা দ্বারা (by observation) সূত্র $(a^2 \pm 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}} = \pm(a \pm b)$ এর সাহায্যে নির্ণয় করিতে পারিলে, তাহাই সুবিধাজনক।

মনে কর, $3 - 4i$ এর বর্গমূল পর্যবেক্ষণ দ্বারা নির্ণয় করিতে হইবে।

এস্থলে $4i = 2 \times 2i$ এবং 2 ও i এর গুণফল $= 2i$ এবং উহাদের বর্গদ্বয়ের যোগফল $= 2^2 + i^2 = 3$.

$$\therefore \quad 3 - 4i = 2^2 + i^2 - 2 \times 2.i = (2 - i)^2$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(2 - i).$$

উদা. 5. Find the square root of $16 - 30i$. (P. U. 1936)

$30i = 2 \times 15i$, এবং 5 ও $3i$ এর গুণফল $= 15i$ এবং উহাদের বর্গদ্বয়ের যোগফল $= 5^2 + (3i)^2 = 25 - 9 = 16$.

$$\therefore \quad 16 - 30i = 5^2 + (3i)^2 - 2 \times 5.3i = (5 - 3i)^2$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(5 - 3i).$$

উদা. 6. Find the square root of $2(21i - 20)$. (P. U. 1945)

$2(21i - 20) = 2 \times 21i - 40$, এবং 3 ও $7i$ এর গুণফল $= 21i$ এবং উহাদের বর্গদ্বয়ের যোগফল $= 3^2 + (7i)^2 = 9 - 49 = -40$.

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশি} = 2 \times 21i - 40 = 2 \times 3.7i + 3^2 + (7i)^2$$

$$= (3 + 7i)^2. \quad \therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(3 + 7i).$$

উদা. 7. Find the square root of $2(21i + 20)$.

$2(21i + 20) = 2 \times 21i + 40$. এখন, $3i$ ও 7 এর গুণফল $= 21i$ এবং উহাদের বর্গদ্বয়ের যোগফল $= (3i)^2 + 7^2 = -9 + 49 = 40$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশি} = 2 \times 21i + 40 = 2 \times 3i.7 + (3i)^2 + 7^2$$

$$= (3i + 7)^2. \quad \therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(3i + 7).$$

উদা. 8. Extract the square root of i.

$i = \frac{1}{2}(2 \times i)$. এখন, 1 ও i এর গুণফল $= i$ এবং উহাদের বর্গের যোগফল $= 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$.

$$\therefore \quad i = \tfrac{1}{2}(0 + 2 \times i) = \tfrac{1}{2}(1^2 + i^2 + 2 \times 1.i)$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + i)^2. \quad \therefore \quad \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

উদা. 9. Extract the square root of $-i$.

$$-i = \tfrac{1}{2}(-2 \times i) = \tfrac{1}{2}(0 - 2 \times i)$$

$$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 - 2 \times 1.i)$$

$$= \frac{1}{2}(1-i)^2. \quad \therefore \quad \sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

উদা. 10. Find the square root of $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$. (C. U. 1934)

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{4}(-2+2\sqrt{-3})$. এখন, $\sqrt{-3}$ এবং $\sqrt{1}$ এর গুণফল $= \sqrt{-3}$ এবং উহাদের বর্গের যোগফল $= -3+1 = -2$.

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{4}(-2+2\sqrt{-3}) = \frac{1}{4}\{(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{1})^2 + 2\sqrt{-3}.\sqrt{1}\}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{-3}+1)^2. \quad \therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{-3}+1).$$

উদা. 11. Find the square root of $1 - i\sqrt{x^2+4x+3}$.

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{2}(2 - 2\times i.\sqrt{x+3}.\sqrt{x+1})$. এখন, $\sqrt{x+3}$ ও $i\sqrt{x+1}$ এর গুণফল $= i.\sqrt{x+3}.\sqrt{x+1}$ এবং উহাদের বর্গের যোগফল $(x+3)-(x+1) = 2$.

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{2}(2 - 2\times i\sqrt{x+3}.\sqrt{x+1})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{x+3})^2 + (i\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{x+3}.i\sqrt{x+1}\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x+3} - i\sqrt{x+1})^2.$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - i\sqrt{x+1}).$$

উদা. 12. Find the square root of $\frac{7-24i}{3+4i}$.

$$\frac{7-24i}{3+4i} = \frac{(7-24i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{-75-100i}{25} = -3-4i$$

$$= -3 - 2\times 2i = 1^2 + (2i)^2 - 2\times 1.2i$$

$$= (1-2i)^2. \quad \therefore \quad \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(1-2i).$$

উদা. 13. Find the fourth root of 1.

মনে কর, $x = \sqrt[4]{1}$. তাহা হইলে, $x^4 = 1$

বা, $x^4 - 1 = 0$ বা, $(x^2-1)(x^2+1) = 0$

বা, $(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = 0$

$\therefore$ 1 এর চতুর্থমূল $1, -1, i, -i$.

উদা. 14. Find the modulus of $\frac{(1-2i)(12+5i)}{(3+4i)(3-i)}$

$$\text{mod}\,\frac{(1-2i)(12+5i)}{(3+4i)(3-i)} = \frac{\text{mod}\,\{(1-2i)(12+5i)\}}{\text{mod}\,\{(3+4i)(3-i)\}}$$

$$= \frac{\text{mod } (1-2i) \times \text{mod } (12+5i)}{\text{mod } (3+4i) \times \text{mod } (3-1i)} = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2} \times \sqrt{12^2+5^2}}{\sqrt{3^2+4^2} \times \sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{169}}{\sqrt{25} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5} \times 13}{5 \times \sqrt{10}} = \frac{13}{5\sqrt{2}}.$$

উদা. 15. Show that a real value of x will satisfy the equation $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$, if $a^2+b^2=1$. (C. U. 1933)

$\because \frac{1-ix}{1+ix} = a - ib, \therefore 1 - ix = a + iax - ib + bx$

বা, $bx + iax + ix = 1 - a + ib$ বা, $x\{b + i(a+1)\} = (1-a) + ib$

$$\therefore x = \frac{(1-a)+ib}{b+i(a+1)} = \frac{\{(1-a)+ib\}\{b-i(a+1)\}}{\{b+i(a+1)\}\{b-i(a+1)\}}$$

$$= \frac{2b + i(a^2+b^2-1)}{b^2+a^2+2a+1} = \frac{2b}{2a+2} \quad (\because a^2+b^2=1)$$

$= \frac{b}{a+1}$, যাহা বাস্তব। $\therefore$ $a^2+b^2=1$ হইলে, x এর বাস্তব মান দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

উদা. 16. Show that $(\omega a + \omega^2 b)(\omega^2 a + \omega b) = a^2 - ab + b^2$. (C. U. 1929)

বাম পক্ষ $= \omega^2(a+\omega b)(\omega a + b) = \omega^2\{\omega a^2 + (\omega^2+1)ab + \omega b^2\}$

$= \omega^2(\omega a^2 - \omega ab + \omega b^2)$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0.]$

$= \omega^3(a^2 - ab + b^2) =$ ডান পক্ষ $[\because \omega^3 = 1.]$।

উদা. 17. Show that $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2 = -4$.

বাম পক্ষ $= (1+\omega+\omega^2-2\omega)^2 + (1+\omega+\omega^2-2\omega^2)^2$

$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = 4\omega^2 + 4\omega^4$

$= 4(\omega^2 + \omega^3.\omega) = 4(\omega^2+\omega) = 4(-1) = -4.$

উদা. 18. Show that $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8) = 9$

বাম পক্ষ $= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^2)$

$= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= \{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2 = \{1-(\omega+\omega^2)+\omega^3\}^2$

$= (1+1+1)^2 = 9.$

উদা. 19. Show that

$$(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

বাম পক্ষ $=a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^2+\omega^4)+ca(\omega+\omega^2)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$

$[\because \ \omega^3=1,\ \omega+\omega^2=-1,\ \omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega^3.\omega=\omega^2+\omega=-1\ ]$

উদা. 20. Factorise (*i*) a^2-ab+b^2.

(*ii*) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.

(*i*) $a^2-ab+b^2=a^2+(\omega+\omega^2)ab+\omega.\omega^2b^2$

$=(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$

বা, $=\omega(a+\omega b).\omega^2(a+\omega^2 b)$

$=(\omega a+\omega^2 b)(\omega^2 a+\omega b).$

(*ii*) উদা. 19 এর বিপরীতক্রমে কষিয়া,

রাশিটি $=a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^2+\omega^4)+ca(\omega+\omega^2)$

$=a(a+\omega^2b+\omega c)+\omega b(a+\omega^2b+\omega c)+\omega^2c(a+\omega^2b+\omega c)$

$=(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$

অথবা স্বাধীনভাবে কষিয়া,

রাশিটি $=a^2+(-b-c)a+b^2-bc+c^2$

$=a^2+\{(\omega+\omega^2)b+(\omega+\omega^2)c\}a+(\omega b+\omega^2c)(\omega^2b+\omega c)$ [উদা. 20]

$=a^2+\{(\omega b+\omega^2c)+(\omega^2b+\omega c)\}a+(\omega b+\omega^2c)(\omega^2b+\omega c)$

$=(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$

উদা. 21. Find the value of

$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}).$ (P. U. 1940)

রাশিটি $=(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$ $[\because \omega^3=1]$

$=(-2\omega)(-2\omega^2)(-2\omega)(-2\omega^2)=16\omega^6=16.$

উদা. 22. If $x=a+b,\ y=a+b\omega,\ z=a+b\omega^2$, show that

$x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3).$ (P. U. 1943)

$x^3+y^3+z^3=(a+b)^3+(a+b\omega)^3+(a+b\omega^2)^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)+a^3+b^3+3ab(a\omega+b\omega^2)$
$+a^3+b^3+3ab(a\omega^2+b\omega)$

$=3(a^3+b^3)+3ab\{(a+a\omega+a\omega^2)+(b+b\omega^2+b\omega)\}$

$=3(a^3+b^3)+3ab(a.o+b.o)=3(a^3+b^3).$

উদা. 23. Show that $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$
$$=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b).$$

$x=a+b\omega+c\omega^2$ এবং $y=a+b\omega^2+c\omega$ ধরিয়া,

বাম পক্ষ $=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$ [উদা. 20]
$=\{2a+(b+c)(\omega+\omega^2)\}\{a(1+\omega)+b(\omega+1)+2c\omega^2\}$
$\times\{a(1+\omega^2)+2b\omega+c(\omega^2+1)\}$ [$\because \omega^3=1, \omega^4=\omega$]
$=(2a-b-c)(-a\omega^2-b\omega^2+2c\omega^2)(-a\omega+2b\omega-c\omega)$
$=(2a-b-c).\omega^2(-a-b+2c).\omega(-a+2b-c)$
$=(2a-b-c)(2c-a-b)(2b-c-a).$ [$\because \omega^2.\omega=1$]

উদা. 24. Express $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)$ as the sum of two squares.

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$=\{(a+bi)(c+di)\}\{(a-bi)(c-di)\}$
$=\{(ac-bd)+(ad+bc)i\}\{(ac-bd)-(ad+bc)i\}$
$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=l^2+m^2$ ধর।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=(l^2+m^2)(e^2+f^2)$
$=(le-mf)^2+(lf+me)^2$ [পূর্বের ন্যায় করিয়া]
$=\{(ac-bd)e-(ad+bc)f\}^2$
$+\{(ac-bd)f+(ad+bc)e\}^2.$

অথবা, i এর সাহায্য না লইয়া,

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2-2abcd+a^2d^2+b^2c^2+2abcd$
$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$; ইত্যাদি।

উদা. 25. Show that
$$\sqrt{[-1-\sqrt{\{-1-\sqrt{(-1-\cdots \text{ to } \infty)}\}}]}=\omega \text{ or } \omega^2.$$

মনে কর, $x=$ প্রদত্ত রাশি ;

$\therefore$ $x^2=-1-\sqrt{\{-1-\sqrt{(-1-\cdots \text{ to } \infty)}\}}$ বা, $x^2=-1-x$

$\therefore$ $x^2+x+1=0$ $\therefore$ $x=\omega$ বা ω^2 [অনু. 178].

Exercise 71

1. Rationalise the denominators :

(i) $\dfrac{1}{1+\sqrt{-2}}$. (ii) $\dfrac{2+\sqrt{-5}}{3-\sqrt{-5}}$. (iii) $\dfrac{3+4i}{2-3i}-\dfrac{3-4i}{2+3i}$.

2. Express in the form $A + Bi$:

(*i*) $(1+2i)(3+4i)$. (*ii*) $(1+i)(1+2i)(1-3i)$.

(*iii*) $\dfrac{1+2i}{2-i}$. (*iv*) $\dfrac{4+i}{5-3i}$. (*v*) $\dfrac{13+41i}{4+3i}$.

(*vi*) $\dfrac{a+bi}{c+di}$. (*vii*) $\dfrac{a-bi}{a+bi} - \dfrac{a+bi}{a-bi}$.

3. Find the square roots of :

(*i*) $5+12i$. (*ii*) $7-24i$. (*iii*) $2(15i+8)$.

(*iv*) $1+2\sqrt{-2}$. (*v*) $-1+4\sqrt{-5}$. (*vi*) $4+3i$.

(*vii*) $12-5i$. (*viii*) $2i$. (*ix*) i.

(*x*) $-i$. (*xi*) $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. (*xii*) $x - i\sqrt{1-x^2}$.

(*xiii*) $x+2+i\sqrt{3x^2-8x-3}$. (*xiv*) $\dfrac{2i}{3+4i}$.

4. Extract the square root of $a^2 + \dfrac{1}{a^2} + 2\left(a + \dfrac{1}{a}\right)i + 1$.

[প্রদত্ত রাশি $= \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 - 2 + 2\left(a + \dfrac{1}{a}\right)i + 1$

$= \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + i^2 + 2\left(a + \dfrac{1}{a}\right)i = \cdots$.]

5. Show that

(*i*) $(i)^{\frac{1}{2}} + (-i)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$. (*ii*) $(21+20i)^{\frac{1}{2}} + (21-20i)^{\frac{1}{2}} = 10$.

(*iii*) $(5+12i)^{-\frac{1}{2}} + (5-12i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{13}$.

7. Find the moduli of :

(*i*) $1+i$. (*ii*) $(3-4i)(5i+12)$. (*iii*) $\dfrac{(1+2i)(3i+2)}{(2-3i)(3+4i)}$.

6. Find the fourth roots of 16 and $-7+24i$.

8. Show that

(*i*) $\dfrac{1+i}{1-i} = i$. (*ii*) $(1+i)^2 + (1-i)^2 = 0$.

(*iii*) $(1-i)^{-1} - (1+i)^{-1} = i$. (*iv*) $(1-i)^{-2} - (1+i)^{-2} = i$.

(*v*) $\dfrac{1+2i+3i^2+4i^3}{1-2i+3i^2-4i^3} = i$.

9. Simplify :

(i) $\dfrac{3-2i}{4+3i}+\dfrac{3+2i}{4-3i}$. (ii) $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^3-(1-i)^3}$.

10. If $x=2+i$, show that

(i) $x^2-4x+5=0$.

(ii) $x^3-3x^2+x+5=0$.

(iii) $x^4-3x^3+2x^2+x+5=0$.

11. If $x=1+i$, $y=1-i$, show that

$x^2+xy+y^2=2$.

12. Show that a real value of x will satisfy the equation

$\dfrac{1-ix}{1+ix}=a-ib$, if $a^2+b^2=1$. (C. U. 1933)

13. If $\sqrt{a-ib}=x-iy$, then $\sqrt{a+ib}=x+iy$.

14. If $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$, then $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4(x+y)(x-y)$.

15. If $\alpha=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ and $\beta=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$,

show that $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$.

[$\alpha=\omega$, $\beta=\omega^2$ ধরিলে, $\omega^2+\omega.\omega^2+(\omega^2)^2=\cdots$.]

16. Prove that $\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^{21}+\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^{21}=2$.

[$\because$ $\omega^{21}+(\omega^2)^{21}=(\omega^3)^7+(\omega^3)^{14}=1^7+1^{14}=\cdots$]

17. Prove that

$\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^n+\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^n=2$, if n be a multiple of 3, and the expression $=-1$, if n be any other integer.

18. Show that

(i) $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=4$.

(ii) $(1-2\omega+\omega^2)(1-2\omega^2+\omega)=9$.

(iii) $(1-\omega-\omega^2)^3-(1+\omega-\omega^2)^3=16$.

(iv) $(a-b\omega^2+c\omega)\div(c-b\omega+a\omega^2)=\omega$.

19. Resolve into factors :

(i) a^2+b^2. (ii) a^2+ab+b^2. (iii) a^3+b^3.

20. Show that $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ is the product of two imaginary factors. (C. U. 1930)

21. Resolve $a^3+b^3+c^3-3abc$ into three linear factors.

22. If $a+b+c=0$, show that

$$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3=27abc.$$

23. Show that $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$

$$=(1-bc-ca-ab)^2+(a+b+c-abc)^2.$$ [উদা 24 দেখ।]

24. Prove that

(i) $(a+b\omega+c\omega^2)^4+(a\omega+b\omega^2+c)^4+(a\omega^2+b+c\omega)^4=0.$

[বাম পক্ষ $=(a+b\omega+c\omega^2)^4\{1+\omega^4+(\omega^2)^4\}$]

(ii) $(1+\omega-\omega^2)(1+\omega^2-\omega^4)(1+\omega^4-\omega^8)(1+\omega^8-\omega^{16})\cdots$ to $2n$ factors $=2^{2n}$.

[রাশিটি $=\{(-2\omega^2)(-2\omega)\}\{(-2\omega^2)(-2\omega)\}\cdots$
$=2^2.2^2\cdots$ to n factors.]

(iii) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^{16}+\omega^{32})\cdots$ to $3n$ factors $=(-2)^{3n}$.

[$\because$ প্রত্যেকটি উৎপাদক $=1-\omega+\omega^2=-2\omega$,
$\therefore$ রাশিটি $=(-2\omega)^{3n}=\cdots$.]

25. Show that $\sqrt{[-1+\sqrt{\{-1+\sqrt{(-1+\cdots \text{ to }\infty)}\}}]}=-\omega$ or $-\omega^2$.

26. Prove that ω and ω^2 are the roots of the equation

$$x=\sqrt{[-1-\sqrt{\{-1-\sqrt{(-1-\cdots \text{ to }\infty)}\}}]}.$$ [উদা. 25 দেখ।]

দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ

182. যদি কতিপয় সহ-সমীকরণের এক বা একাধিক সমীকরণ দ্বিঘাত হয়, তবে উহাদিগকে **দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ** (Simultaneous Quadratic Equations) বলে।

অজ্ঞাত রাশিগুলির সংখ্যা যত, স্বতন্ত্র (independent) সহ-সমীকরণগুলির সংখ্যাও তত না হইলে সমাধান করা যায় না।

একটি একঘাত এবং একটি দ্বিঘাত সমীকরণের $2(=1\times 2)$ প্রস্থ (sets) বীজ থাকে। তদ্রূপ, দুইটি দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের $4(=2\times 2)$ প্রস্থ, একটি দ্বিঘাত ও একটি ত্রিঘাত সহ-সমীকরণের $6(=2\times 3)$ প্রস্থ বীজ থাকিবে। এই বীজগুলির ভিতর বাস্তব ও কাল্পনিক এবং সসীম ও অসীম বীজ থাকিতে পারে।

I. দ্বিবর্ণ দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ।

183. সহ-সমীকরণদ্বয়ের একটি একঘাত। যদি দ্বিবর্ণ বা দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি সহ-সমীকরণের একটি একঘাত এবং অপরটি দ্বিঘাত হয়, তবে উহাদিগকে নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়মে সমাধান করা যায়।

সাধারণ নিয়ম। একঘাত সমীকরণটি হইতে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোনও একটির (ধর যেন y এর) মান অপর অজ্ঞাত রাশটি (অর্থাৎ x) দ্বারা প্রকাশ কর। x দ্বারা প্রকাশিত y এর এই মান দ্বিঘাত সমীকরণটিতে বসাও। x দ্বারা গঠিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ পাইবে। দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান কর, x এর দুইটি মান পাইবে। x দ্বারা প্রকাশিত y এর মানে x এর এই মানদ্বয় পর পর বসাইয়া y এর মানদ্বয় নির্ণয় কর। x ও y এর দুই জোড়া অনুরূপ মান (Corresponding Values) নির্ণেয় বীজ হইবে। এই নিয়মটি সকল স্থলেই প্রযোজ্য, তবে স্থলবিশেষে কৌশলে অতি সহজে সমাধান করা যায়।

মন্তব্য। x এর মান y এর দ্বারা প্রকাশ করিয়া লইয়াও সমাধান করা চলে। তাহাতে প্রথমে y এর মান এবং পরে x এর মান পাইবে। সুতরাং উল্লিখিত প্রকারের দ্বিবর্ণ দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের সমাধান দুইভাবে করা যায়। যেভাবে সমাধান করিলে শ্রমের লাঘব হয়, তাহাই করিবে।

উদা. 1. Solve $x^2+y^2=13 \cdots (1),\quad x+y=5 \cdots (2)$.

(2) হইতে, $y=5-x \quad \cdots \quad (3)$

$\therefore$ (1) হইতে, $x^2+(5-x)^2=13$ বা, $x^2-5x+6=0$

বা, $(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore \quad x=2$ বা, 3

$\therefore$ (3) হইতে, $y=3$ বা, 2

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=2, y=3$; বা, $x=3, y=2$.

উদা. 2. Solve $x^2-y^2=16 \cdots (1),\quad x+y=8 \cdots (2)$.

কৌশলে : (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $x-y=2 \quad \cdots \quad (3)$

(2) ও (3) এর যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=5$

$\therefore$ (2) হইতে, $y=3$. $\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=5, y=3$.

উদা. 3. Solve $xy=10 \cdots (1),\quad x-y=3 \cdots (2)$.

কৌশলে : $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=3^2+4.10=49$

$\therefore \quad x+y=7 \cdots (3)$ এবং $x+y=-7 \cdots (4)$

(2) ও (3) এর সমষ্টিকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=5$; $\therefore$ (1) হইতে, $y=2$.
(2) ও (4) এর সমষ্টিকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $x=-2$; $\therefore$ (1) হইতে, $y=-5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=5, y=2$; বা, $x=-2, y=-5$.

উদা. 4. Solve $x^2-xy+y^2=19 \cdots (1), \quad x+y=8 \cdots (2)$.

কৌশলে: (1) হইতে, $(x+y)^2-3xy=19$ বা, $8^2-3x(8-x)=19$

বা, $3x^2-24x+45=0$ বা, $x^2-8x+15=0$

বা, $(x-3)(x-5)=0$ $\therefore$ $x=3$ বা $x=5$

$\therefore$ (2) হইতে, $x=3$ হইলে, $y=5$ এবং $x=5$ হইলে, $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=3, y=5$; বা, $x=5, y=3$.

উদা. 5. Solve $x^2+xy=15 \cdots (1), \quad x-y=1 \cdots (2)$. (C.U. 1915)

(2) হইতে, $y=x-1$, $\therefore$ (1) হইতে, $x^2+x(x-1)=15$
বা, $2x^2-x-15=0$ বা, $(x-3)(2x+5)=0$ $\therefore$ $x=3$, বা $-\frac{5}{2}$
$\therefore$ (2) হইতে, $x=3$ হইলে, $y=2$ এবং $x=-\frac{5}{2}$ হইলে, $y=-\frac{7}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=3, y=2$; বা, $x=-\frac{5}{2}, y=-\frac{7}{2}$.

উদা. 6. Solve $x+y=5 \cdots (1), \quad x^2+y^2=8xy \cdots (2)$. (C.U. 1917)

সাধারণ নিয়মে: (1) হইতে, $y=5-x \quad \cdots \quad (3)$

$\therefore$ (2) হইতে, $x^2+(5-x)^2-8x(5-x)=0$

বা, $10x^2-50x+25=0$ বা, $2x^2-10x+5=0$

$\therefore$ $x=\frac{1}{4}(10\pm\sqrt{60})=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{15})$

$\therefore$ (3) হইতে, $y=5-\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{15})=\frac{1}{2}(5\mp\sqrt{15})$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{15}), \quad y=\frac{1}{2}(5-\sqrt{15})$;
বা, $x=\frac{1}{2}(5-\sqrt{15}), \quad y=\frac{1}{2}(5+\sqrt{15})$.

উদা. 7. Solve $x+y=3 \cdots (1), 2x^2-5xy+2y^2=0 \cdots (2)$.
(C. U. 1920)

কৌশলে: (2) হইতে, $(x-2y)(2x-y)=0$

$\therefore$ $x-2y=0 \cdots (3)$ অথবা $2x-y=0 \cdots (4)$

$\therefore$ (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $y=1$; $\therefore$ (1) হইতে, $x=2$
এবং (1) ও (4) যোগ করিয়া, $x=1$; $\therefore$ (1) হইতে, $y=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=2, y=1$; বা, $x=1, y=2$.

উদা. 8. Solve $(x+a)(y+b)=c^2 \cdots (1),\ x+y=a+b \cdots (2).$ (C. U. 1930)

সাধারণ নিয়মে : (2) হইতে, $y=a+b-x \cdots (3)$

$\therefore$ (1) হইতে, $(x+a)(a+2b-x)=c^2$ বা, $(x+a)\{x-(a+2b)\}+c^2=0$

বা, $x^2-2bx-(a^2+2ab-c^2)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}\{2b\pm\sqrt{4b^2+4(a^2+2ab-c^2)}\}=b\pm\sqrt{(a+b)^2-c^2}$

$\therefore$ (3) হইতে, $y=a+b-b\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}=a\mp\sqrt{(a+b)^2-c^2}$.

উদা. 9. Solve $x+y=9 \cdots (1),\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \cdots (2).$ (C. U. 1936)

কৌশলে : (1) হইতে, $y=9-x$ এবং (2) হইতে, $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{x-2}{2x}$

$\therefore\ y\cdot\frac{1}{y}=(9-x)\frac{x-2}{2x}$ বা, $(9-x)(x-2)=2x$

বা, $x^2-9x+18=0$ বা, $(x-3)(x-6)=0\ \therefore\ x=3$, বা 6

$\therefore$ (1) হইতে, $x=3$ হইলে $y=6$ এবং $x=6$ হইলে $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=3,\ y=6$; বা, $x=6,\ y=3$.

উদা. 10. Solve $x+y=a+b \cdots (1),\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2 \cdots (2).$ (C. U. 1931)

(1) হইতে, $y=a+b-x \cdots (3)$; $\therefore$ (2) হইতে, $\frac{a}{x}-\frac{b}{x-a-b}=2$

বা, $a(x-a-b)-bx=2x(x-a-b)$

বা, $2x^2-(3a+b)x+a(a+b)=0$

বা, $2x^2-2ax-(a+b)x+a(a+b)=0$

বা, $2x(x-a)-(a+b)(x-a)=0\ \therefore\ x=a$, বা $\frac{1}{2}(a+b)$.

$\therefore$ (3) হইতে, $x=a$ হইলে $y=b$ এবং $x=\frac{1}{2}(a+b)$ হইলে $y=\frac{1}{2}(a+b)$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=a,\ y=b$; বা, $x=y=\frac{1}{2}(a+b)$.

উদা. 11. Solve $x+\frac{4}{y}=1 \cdots (1)$, $y+\frac{4}{x}=25 \cdots (2)$. (C.U. 1940)

(1) হইতে, $xy+4=y \cdots (3)$ এবং (2) হইতে, $xy+4=25x \cdots (4)$

(3) ও (4) হইতে, $y=25x \quad \cdots \quad (5)$

(1)এ $y=25x$ বসাইয়া, $x+\frac{4}{25x}=1$

বা, $25x^2-25x+4=0$ বা, $(5x-1)(5x-4)=0 \therefore x=\frac{1}{5}$, বা $\frac{4}{5}$.

$\therefore$ (5) হইতে, $x=\frac{1}{5}$ হইলে $y=5$ এবং $x=\frac{4}{5}$ হইলে $y=20$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=\frac{1}{5}, y=5$; বা, $x=\frac{4}{5}, y=20$.

. 12. Solve $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2} \cdots (1)$, $x+y=10 \cdots (2)$.

(C. U. 1938)

(1) হইতে, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ [(2) হইতে]

বা, $5\sqrt{xy}=20$ বা, $\sqrt{xy}=4 \quad \therefore \quad xy=16$

$\therefore$ (2) হইতে, $x(10-x)=16$ বা, $x^2-10x+16=0$

বা, $(x-2)(x-8)=0 \quad \therefore \quad x=2$, বা 8

$\therefore$ (2) হইতে, $x=2$ হইলে $y=8$ এবং $x=8$ হইলে $y=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=2, y=8$; বা, $x=8, y=2$.

উদা. 13. Solve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots (1)$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1 \cdots (2)$

(C. U. 1925)

কৌশলে : $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$

$$\therefore \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$$

$$=2.1-1^2=1. \quad \therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1 \cdots (3)$$

$\therefore$ (2) ও (3) যোগ করিয়া, $\frac{2x}{a}=2, 0 \quad \therefore \quad x=a, 0.$

$\therefore$ (2) হইতে, $x=a$ হইলে, $y=0$ এবং $x=0$ হইলে, $y=-b$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=a,\ y=0$; বা, $x=0,\ y=-b$.

উদা. 14. Solve $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=2 \cdots (1)$; $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=2 \cdots (2)$. (C.U. '10)

কৌশলে : $\because \left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\right)^2+\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}\right)^2=2\left(\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}\right)$,

$$\therefore \left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)^2=2\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right)-\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)^2$$

$$=2.2-2^2=0 \quad \therefore \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0 \cdots (3)$$

$\therefore$ (2) ও (3) যোগ করিয়া, $\dfrac{2a}{x}=2 \quad \therefore x=a$

এবং (2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $\dfrac{2b}{y}=2 \quad \therefore y=b$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=a,\ y=b$.

উদা. 15. Solve $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3 \cdots (1)$, $x+y=9 \cdots (2)$.

(1) এর ঘন লইয়া, $x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=27$. $\therefore$ (1) ও (2) হইতে,

$9+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}.3=27$ বা, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=2 \quad \therefore xy=8$.

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=81-32=49 \quad \therefore x-y=\pm 7 \cdots (3)$

$\therefore$ (2) ও (3) হইতে, $x=8,\ 1$.

$\therefore$ (2) হইতে, $x=8$ হইলে $y=1$ এবং $x=1$ হইলে $y=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=8,\ y=1$; বা, $x=1,\ y=8$.

উদা. 16. Solve $x^2+xy+y^2=21 \cdots (1)$, $x-\sqrt{xy}+y=3 \cdots (2)$.

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $x+\sqrt{xy}+y=7 \cdots (3)$

(3)+(2) লইয়া, $x+y=5 \cdots (4)$ এবং (3)−(2) লইয়া, $\sqrt{xy}=2$

$\therefore xy=4 \cdots (5)$

$\therefore$ (4) ও (5) হইতে, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=25-16=9$

$\therefore x-y=\pm 3 \cdots (6)$

$\therefore$ (4) ও (6) যোগ করিয়া, $x=4,\ 1 \quad \therefore$ (4) হইতে, $y=1,\ 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=4,\ y=1$; বা, $x=1,\ y=4$.

184. সূচক সমীকরণ।

উদা. 17. Solve $x^y = y^x \cdots (1)$, $x = 2y \cdots (2)$. (C. U. 1935)

(1) এ $x=2y$ বসাইয়া, $(2y)^y = y^{2y}$ বা, $(2y)^y = (y^2)^y$

$\therefore\ 2y = y^2$ বা, $y^2 - 2y = 0$ বা, $y(y-2) = 0$ $\therefore\ y = 0$, বা 2.

$\therefore$ (2) এ $y=0$ বসাইয়া, $x=0$ এবং $y=2$ বসাইয়া, $x=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=0, y=0$; বা, $x=4, y=2$.

উদা. 18. Solve $x^y = y^2 \cdots (1)$, $y^{2y} = x^4 \cdots (2)$. (C. U. 1941, '45)

(1) হইতে, $(y^2)^y = (x^y)^y$ বা, $y^{2y} = x^{y^2} \cdots (3)$

$\therefore$ (3) ও (2) হইতে, $x^{y^2} = x^4$ $\therefore\ y^2 = 4$ $\therefore\ y = \pm 2$.

$\therefore$ (1) হইতে, $y=2$ হইলে, $x^2 = 2^2 = 4$, $\therefore\ x = \pm 2$

এবং $y = -2$ হইলে, $x^{-2} = (-2)^2$ বা, $\frac{1}{x^2} = 4$ $\therefore\ x = \pm\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x = 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$
$y = 2,\ 2,\ -2,\ -2$.

উদা. 19. Solve $8.2^{xy} = 4^y \cdots (1)$, $9^x.3^{xy} = \frac{1}{27} \cdots (2)$. (C. U. 1942)

(1) হইতে, $2^3.2^{xy} = 2^{2y}$ $\therefore\ 3 + xy = 2y \cdots (3)$

(2) হইতে, $3^{2x}.3^{xy} = 3^{-3}$ $\therefore\ 2x + xy = -3 \cdots (4)$

এখন, (3) ও (4) হইতে x ও y নির্ণয় কর।

$\therefore$ (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $3 - 2x = 2y + 3$ $\therefore\ y = -x \cdots (5)$

(4) এ $y=-x$ বসাইয়া, $2x - x^2 = -3$ বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$

বা, $(x-3)(x+1) = 0$ $\therefore\ x = 3$, বা, -1.

$\therefore$ (5) হইতে, $x=3$ হইলে $y=-3$ এবং $x=-1$ হইলে $y=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=3, y=-3$; বা, $x=-1, y=1$.

Exercise 72

Solve the equations :

1. $x^2 + y^2 = 10, x + y = 4$.
2. $x^2 + y^2 = 20, x - y = 2$.
3. $x^2 - y^2 = 15, x - y = 3$.
4. $x^2 - y^2 = 16, x + y = 8$.
5. $x^2 - y^2 = 7, 2x + 3y = 1$.
6. $x^2 - y^2 = 9, 3x - 2y = 7$.
7. $x^2 + y^2 = 1, 3x + 4y = 5$. (C. U. 1922)
8. $ax^2 + by^2 = a + b, x + y = 1$. (C. U. 1929)

9. $xy=6,\ x+y=5.$

10. $xy=15,\ x-y=2.$

11. $x+y=2,\ xy=-2.$ (C. U. 1915)

12. $x-y=1,\ x^2+xy=15.$ (C. U. 1915)

13. $3x=2y,\ xy=6.$

14. $3x+2y=4,\ 2xy=1.$

15. $x^2-xy+y^2=13,\ x-y=1.$

16 $x^2+xy+y^2=7,\ x+y=3.$

17. $2x^2+3xy+4y^2=24,\ x+3y=7.$ (C. U. 1916)

18. $(x-a)(y-b)=ab,\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0.$ (C. U. 1934)

19. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\frac{1}{2},\ x+y=9.$ (C. U. 1906)

20. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1,\ x+y=\frac{5}{6}.$ (C. U. 1937)

21. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=\frac{5}{6},\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=5.$ (C. U. 1953)

22. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=2,\ x+y=a+b.$ (C. U. 1931)

23. $x+y=4,\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=1.$

24. $x+y=3,\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\frac{5}{2}.$

25. $x-y=2,\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\frac{5}{6}.$ (C. U. 1939)

26. $x+\dfrac{1}{y}=\frac{3}{2},\ y+\dfrac{1}{x}=3.$ (C. U. 1948)

27. $x+xy=8,\ y+xy=9.$

28. $(x+1)(y+2)=15,\ xy=6.$

29. $x+\dfrac{3}{y}=2,\ y+\dfrac{3}{x}=-2.$ (C. U. 1879)

30. $x+\dfrac{4}{y}=1,\ y+\dfrac{4}{x}=25.$ (C. U. 1920, '40, '51, '54)

31. $xy+x+y=27,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\frac{1}{2}.$ (C. U. 1939)

32. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\frac{10}{3},\ x+y=10.$ (C. U. 1918, '47, '52)

33. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2,\ 9x+4y=5xy.$ (C. U. 1895)

34. $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{y^2}=\frac{11}{20},\ 5x-2y=0.$ (C. U. 1950)

35. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5,\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1.$ (U. P. 1947)

36. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$. (C. U. 1959)

37. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18$, $x+y=12$. (C. U. 1919)

38. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}$, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3}$. (C. U. 1952)

39. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=2$, $x+y=3$. (M. U. '60)

40. $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1$, $x-y=7$.

41. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=4$, $x+y=28$.

42. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=3$, $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=9$.

43. $x^2+xy+y^2=133$, $x-\sqrt{xy}+y=7$. (C. U. 1951)

44. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3$, $x+y=9$.

45. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=x-y=7$.

46. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$, $2x-3y=4$. (C. U. 1949)

47. $3^x=9^y$, $2^{xy+1}=8^y$.

48. $8^x.2^{xy}=4$, $3^{xy}=9.27^y$.

49. $3^x=9^y$, $5^{x+y+1}=25^{xy}$. (C. U. 1946)

50. $y^x=4$, $y^2=2^x$. (C. U. 1946)

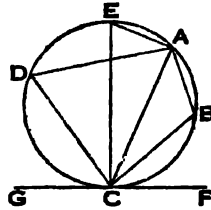
51. $x^y=y^x$, $x^a=y^b$. (C. U. 1950)

জ্যামিতি

[দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

উপপাদ্য 24

The angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle

[কোন বৃত্তের কোন স্পর্শক উহার স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন জ্যার সহিত যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণসমূহের সমান হইবে।]

মনে কর, একটি বৃত্তের C বিন্দুতে GCF একটি স্পর্শক এবং C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত CA জ্যা বৃত্তটিকে ADC ও ABC বৃত্তাংশদ্বয়ে বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(*a*) ∠ACF = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ADC,

(*b*) ∠ACG = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ABC।

C বিন্দু হইতে CE ব্যাস টান।

AB, AD, AE, CB, CD যোগ কর।

প্রমাণ। (*a*) ∵ GCF একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু C হইতে অঙ্কিত CE একটি ব্যাস,

∴ ∠ECF = এক সমকোণ;

∴ ∠ACF + ∠ACE = এক সমকোণ।

আবার, ∵ অর্ধবৃত্তস্থ ∠EAC = এক সমকোণ,

∴ ∠AEC + ∠ACE = এক সমকোণ।

∴ ∠ACF + ∠ACE = ∠AEC + ∠ACE,

∴ উভয় পার্শ্ব হইতে ∠ACE বাদ দিলে,

∠ACF = ∠AEC।

কিন্তু ∠AEC = ∠ADC (এক বৃত্তাংশস্থ কোণ)

∴ ∠ACF = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ADC।

(*b*) $\angle ACG + \angle ACF$ = দুই সমকোণ।

আবার, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া,

$\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ACG + \angle ACF = \angle ABC + \angle ADC$।

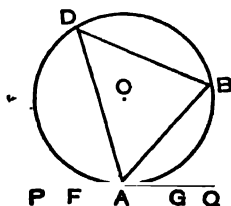
কিন্তু, $\angle ACF = \angle ADC$, (প্রমাণিত)

$\therefore$ $\angle ACG$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABC$।

উপপাদ্য 25

(উপ. 24এর বিপরীত)

If a straight line drawn through one extremity of a chord of a circle makes with the chord an angle equal to the angles in the alternate segment, then the straight line is a tangent to the circle.

[যদি কোন বৃত্তের কোন জ্যার এক প্রান্তবিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা জ্যাটির সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণের সমান হয়, তবে সরলরেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক হইবে।]

মনে কর, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A দিয়া অঙ্কিত FAG সরলরেখা AB জ্যার সহিত $\angle BAG$ উৎপন্ন করিয়াছে এবং উহা একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ADB$র সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বৃত্তটির FAG একটি স্পর্শক।

A বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক PAQ টান।

প্রমাণ। $\because$ A বিন্দুতে PAQ একটি স্পর্শক এবং A বিন্দুগামী AB একটি জ্যা,

$\therefore$ $\angle BAQ$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ADB$

আবার, $\angle BAG = \angle ADB$ (কল্পনা)

$\therefore$ $\angle BAQ = \angle BAG$

$\therefore$ AQ ও AG অর্থাৎ PAQ ও FAG একই সরলরেখা।

কিন্তু PAQ, বৃত্তটির একটি স্পর্শক। $\therefore$ FAG, বৃত্তটির একটি স্পর্শক।

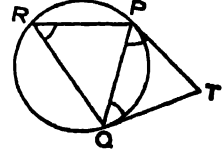
Exercise 13

1. Tangents to a circle from an external point are equal.

[ইঙ্গিত : PQR বৃত্তের বহিঃস্থ T বিন্দু হইতে TP ও TQ দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে, TP = TQ.

PQ, PR, QR যোগ কর।

প্রমাণ। $\angle TPQ$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle PRQ$ এবং $\angle TQP$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle PRQ$

$\therefore \angle TPQ = \angle TQP$; $\therefore TP = TQ$.]

2. The tangents to a circle at the vertices of an inscribed equilateral triangle form an equilateral triangle.

[প্রশ্ন 1এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

3. A tangent is drawn parallel to a chord. Show that the intercepted arc is bisected at the point of contact.

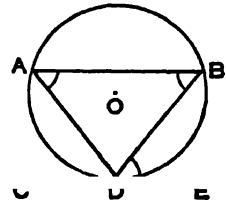
(D. B. 1932 ; C. U. 1945 ; B. C. S. 1946)

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি জ্যা এবং D বিন্দুতে ABর সমান্তরাল CDE স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে, AD চাপ = BD চাপ।

প্রমাণ। $\angle BDE$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle A$ এবং $\angle BDE$ = একান্তর $\angle B$

$\therefore \angle A = \angle B$; $\therefore AD = BD$

$\therefore$ AD চাপ = BD চাপ।]

4. AB and AC are two equal chords of a circle. Prove that the tangent at A is parallel to BC.

5. Two circles touch each other internally at A and chords APQ and AXY are drawn. Show that PX and QY are parallel.

(C. U. 1947)

[ইঙ্গিত : A বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক SAT টান।

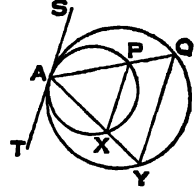
প্রমাণ। SAT, APX বৃত্তের স্পর্শক,

∴ ∠XAT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠APX।

আবার SAT, AQY বৃত্তের স্পর্শক,

∴ ∠XAT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠AQY।

∴ ∠APX = ∠AQY।

কিন্তু উহারা অনুরূপ কোণ ; ∴ PX ॥ QY।]

6. Two circles touch each other externally at A and chords PAQ and XAY are drawn. Show that PX and QY are parallel.

[প্রশ্ন 5এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

7. Two circles intersect at A and B and through P, any point on the circumference of one of them, straight lines PAC, PBD are drawn to cut the other circle at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P. (C. U. 1936)

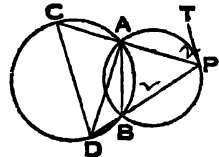
[ইঙ্গিত : P বিন্দুতে PT স্পর্শক টান।

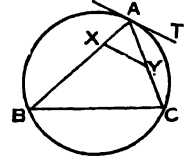
প্রমাণ করিতে হইবে, PT ॥ CD। AB যোগ কর।

এখন, ∵ PT স্পর্শক এবং PA স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা ;

∴ ∠APT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ABP।

আবার, ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃ ∠ABP = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠ACD ; ∴ ∠APT = ∠ACD।

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ ; ∴ PT ॥ CD।]

8. ABC is an inscribed triangle of a circle. A straight line drawn parallel to the tangent at A cuts AB at X and AC at Y. Prove that B, C, X and Y are concyclic.

[ইঙ্গিত : বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজের A বিন্দুতে বৃত্তটির AT একটি স্পর্শক।

এখন, $\angle CAT$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABC$।

আবার, $\angle CAT$ = একান্তর $\angle XYA$ ($\because$ AT ∥ XY),

$\therefore\ \angle XBC = \angle XYA$;

$\therefore\ \angle XBC + \angle XYC = \angle XYA + \angle XYC = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ BXYC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ; $\therefore$ B, C, X ও Y একবৃত্তস্থ।]

9. Show that the two perpendiculars dropped on the tangent and the chord through the point of contact, from the middle point of either arc cut off by the chord, are equal. (C. U. 1915)

[ইঙ্গিত : একটি বৃত্তের A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত AB একটি জ্যা এবং AT স্পর্শক। AB জ্যা দ্বারা ছিন্ন AOB চাপের O মধ্যবিন্দু। AB ও ATর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, OE = OF।

এখন, $\angle OAF$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle OBA$।

আবার, OA চাপ = OB চাপ বলিয়া

OA জ্যা = OB জ্যা ;

$\therefore\ \angle OBA = \angle OAB$ বা $\angle OAE$;

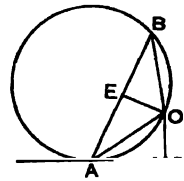
$\therefore\ \angle OAF = \angle OAE$।

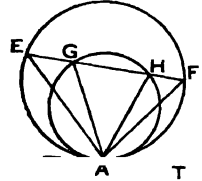
$\therefore$ AOE ও AOF ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle OAE = \angle OAF$ (প্রমাণিত),

$\angle OEA = \angle OFA$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ)

এবং AO = AO ;

$\therefore$ OE = OF।

10. Two circles touch each other internally. Prove that the intercepts made by them on any transversal subtend equal angles at the point of contact. (C. U. 1924)

[ইঙ্গিত : দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। EF সরলরেখা বৃহত্তর বৃত্তটিকে E ও F বিন্দুতে এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক AT টান।

AE, AF, AG ও AH যোগ কর। এখন,

$\angle HAT$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle AGH$ এবং

$\angle FAT$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle AEF$।

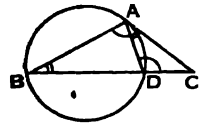
$\therefore \angle HAF = \angle HAT - \angle FAT = \angle AGH - \angle AEF = \angle GAE$।]

11. D is a point on the side BC of the triangle ABC. If $\angle BAC = \angle ADC$, AC is a tangent to the circumcircle of the triangle ABD.

[ইঙ্গিত : ADC ও BAC ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle ADC = \angle BAC$ (কল্পনা) এবং $\angle C$ সাধারণ ;

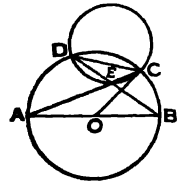
$\therefore \angle DAC = \angle ABD$

$\therefore$ ABD ত্রিভুজের পরিবৃত্তের AC একটি স্পর্শক (উপ. 25)।]

12. AB is a diameter of a circle whose centre is O. Two chords AC and BD, drawn on the same side of AB, intersect at E. Prove that OC is a tangent to the circle passing through C, D and E. (C. U. 1924)

[ইঙ্গিত : CD যোগ কর। এখন,

OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), $\therefore \angle OCE = \angle A$।

আবার, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের BC চাপের উপর পরিধিস্থ $\angle A$ = পরিধিস্থ $\angle EDC$; $\therefore \angle OCA = \angle EDC$।

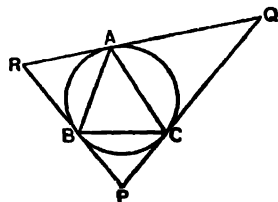
$\therefore$ C, D ও E দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের OC একটি স্পর্শক (উপ. 25)।]

13. Tangents are drawn at A, B, C to the circle circumscribing an acute-angled triangle ABC so as to form another triangle PQR. Show that the angles of this triangle are respectively supplements of twice the opposite angles of the triangle ABC.

(C. U. 1939)

[ইঙ্গিত :

$\angle P = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB$

$= 180^\circ - \angle BAC - \angle BAC$

$= 180^\circ - 2\angle BAC$ ।]

14. The in-circle of the triangle ABC touches BC, CA and AB at D, E and F respectively. Prove that the angles of the triangle DEF are supplements of half the angles of the triangle ABC.

(B. U. 1923 ; B. C. S 1946)

[প্রশ্ন 13 এর ন্যায় প্রমাণ কর ।]

15. A chord AB of a circle bisects the angle between the diameter through A and the perpendicular from A to the tangent at B.

(C. U. 1949)

[ইঙ্গিত : A বিন্দুগামী AC যেন বৃত্তটির ব্যাস এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত BP স্পর্শকের উপর AP লম্ব ।

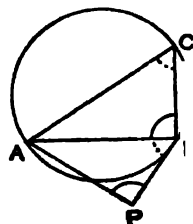
প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle BAP = \angle BAC$ ।

BC যোগ কর ।

এখন, APB ও ABC ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle P$ = অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ABC$ (∵ প্রত্যেকে সমকোণ),

$\angle ABP$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ACB$ ।

∴ তৃতীয় $\angle BAP$ = তৃতীয় $\angle BAC$ ।]

16. Two circles touch internally at A and PQ, a chord of the outer, touches the inner at R. Prove that AR bisects the $\angle PAQ$.

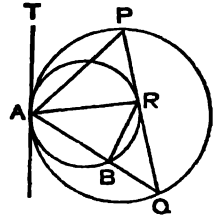
(P. U. 1933)

[ইঙ্গিত: AQ যেন ভিতরের বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। BR যোগ কর। A বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক AT টান।

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle PAR = \angle QAR$।

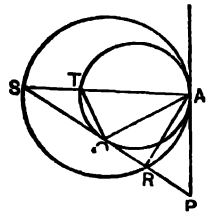
এখন, $\angle PAR = \angle TAR - \angle TAP$

= একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABR$ − একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle AQR$

= $\angle BRQ$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle QAR$।]

17. Two circles touch internally at A. From a point P on the common tangent at A, a straight line is drawn cutting the outer circle at R and S and touching the inner circle at Q. Prove that AQ bisects the $\angle RAS$.

[ইঙ্গিত: AS যোগ কর; ইহা যেন ভিতরের বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করিল। AR, AQ ও QT যোগ কর। এখন,

$\angle QAR = \angle PAQ - \angle PAR$

$= \angle ATQ - \angle QST = \angle SQT = \angle QAS$।]

18. ABC is a triangle inscribed in a circle. If the tangent at A meets BC produced in D, prove that $CD : BD = AC^2 : AB^2$.

(C. U. 1928, '39, '51; G. U. 1951)

[ইঙ্গিত: ACD ও ABD ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle CAD$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle B$ এবং $\angle D$ সাধারণ,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ; ∴ $\triangle ACD : \triangle ABD = AC^2 : AB^2$।

আবার, ∵ ACD ও ABD ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা সমান;

∴ $\triangle ACD : \triangle ABD = CD : BD$। ∴ $CD : BD = AC^2 : AB^2$।]

সম্পাদ্য 6

On a given straight line to describe a segment of a circle which shall contain an angle equal to a given angle.

(S. B. 1953)

[একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এমন একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।]

মনে কর, AB নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C নির্দিষ্ট কোণ।

ABর উপর এমন একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ, $\angle$Cর সমান হয়।

অঙ্কন। ABর A বিন্দুতে $\angle$Cর সমান করিয়া $\angle$BAD অঙ্কিত কর।

A বিন্দু হইতে ADর উপর AG লম্ব টান।

ABর সমদ্বিখণ্ডক লম্ব FG টান ; উহা যেন AG কে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

G কে কেন্দ্র করিয়া এবং GA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তটি A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে ; কারণ, ABর সমদ্বিখণ্ডক লম্বের উপর G অবস্থিত বলিয়া GA = GB। তাহা হইলে AHB উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ হইবে।

প্রমাণ। GB যোগ কর।

বৃত্তটির AB একটি জ্যা এবং AG ব্যাসার্ধের উপর AD লম্ব বলিয়া উহা বৃত্তটির একটি স্পর্শক। $\therefore$ $\angle$C = $\angle$BAD = একান্তর AHB বৃত্তাংশস্থ কোণ ;

$\therefore$ AHB উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশ।

Exercise 14

1. On a given straight line describe a segment of a circle which shall contain an angle of 30°.

2. Divide a given circle into two segments such that an angle in one may be twice an angle in the other.

[বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180° ; সুতরাং একবৃত্তাংশস্থ কোণ $180° \times \frac{1}{3}$ বা 60° হইলে, অপর বৃত্তাংশস্থ কোণ $180° \times \frac{2}{3}$ বা 120° হইবে। সুতরাং বৃত্তটির একটি স্পর্শক টানিয়া উহার সহিত 60° কোণ করিয়া একটি জ্যা আঁক। তাহা হইলে এই জ্যা বৃত্তটিকে উদ্দিষ্ট বৃত্তাংশদ্বয়ে বিভক্ত করিবে।]

3. Divide a given circle into two segments such that an angle in one segment may be thrice an angle in the other.

4. Construct a triangle on a given base having a given vertical angle and having its vertex on a given straight line.

5. Construct an isosceles triangle on a given base having a given vertical angle.

6. Construct a triangle on a given base having given the vertical angle and

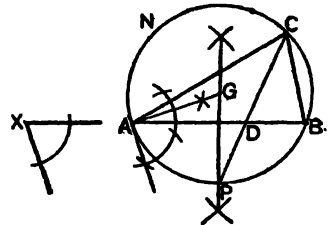
(i) One other side.

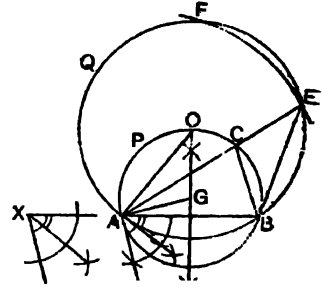
(ii) the altitude.

(iii) The length of the median that bisects the base.,

(iv) The foot of the perpendicular from the vertex to the base.

7. Construct a triangle on a given base having given the vertical angle and the point at which the bisector of the vertical angle cuts the base.

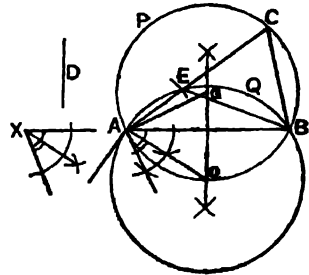
[AB যেন ভূমি, X শিরঃকোণ এবং D ছেদবিন্দু। ABর উপর X কোণবিশিষ্ট G-কেন্দ্রীয় ANB বৃত্তাংশটি অঙ্কিত কর। একটি চাপ আঁকিয়া বৃত্তাংশের বৃত্তটি সম্পূর্ণ কর। এই চাপটিকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। PD যোগ করিয়া বর্ধিত কর ; উহা যেন বৃত্তটিকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।]

8. Construct a triangle on a given base having given the vertical angle and the sum of the remaining sides.

[AB যেন ভূমি, X শিরঃকোণ এবং H সরলরেখা বাহুদ্বয়ের সমষ্টি। ABর উপর X কোণবিশিষ্ট G-কেন্দ্রীয় APB বৃত্তাংশ ও $\frac{1}{2}$X কোণবিশিষ্ট O-কেন্দ্রীয় AQB বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর। A কে কেন্দ্র করিয়া এবং H ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; উহা যেন শেষোক্ত বৃত্তাংশের চাপকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। AE (অথবা AF) যোগ কর ; উহা যেন প্রথমোক্ত বৃত্তাংশের চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। BE যোগ কর।

$\angle CBE = \angle ACB - \angle AEB = \angle X - \frac{1}{2}\angle X = \frac{1}{2}\angle X = \angle CEB$;

$\therefore$ CB = CE। $\therefore$ AC + CB = AC + CE = H, এবং $\angle ACB = \angle X$ ।]

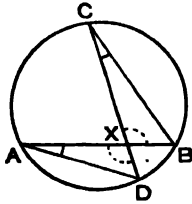
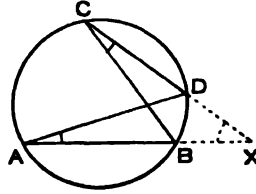
9. Construct a triangle on a given base having given the vertical angle and the difference of the remaining sides.

[AB যেন ভূমি, X শিরঃকোণ এবং D সরলরেখা বাহুদ্বয়ের অন্তর। ABর উপর X কোণবিশিষ্ট G-কেন্দ্রীয় APB বৃত্তাংশ ও $90° + \frac{1}{2}$X কোণবিশিষ্ট O-কেন্দ্রীয় AQB বৃত্তাংশ অঙ্কিত কর। A কে কেন্দ্র করিয়া এবং D ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; উহা যেন শেষোক্ত বৃত্তাংশের চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE যোগ করিয়া বর্ধিত কর। উহা যেন প্রথমোক্ত বৃত্তাংশের চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। BE যোগ কর। $\angle CEB = 180° - \angle AEB = 180° - (90° + \frac{1}{2}\angle X)$ $= 90° - \frac{1}{2}\angle X$, এবং $\angle CBE = \angle AEB - \angle ACB = 90° + \frac{1}{2}\angle X - \angle X$ $= 90° - \frac{1}{2}\angle X$। $\therefore$ CB = CE। $\therefore$ AC − CB = AC − CE = AE = D,

এবং $\angle ACB = \angle X$।]

উপপাদ্য 26

If two chords of a circle intersect internally or externally, the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

[যদি কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে ছেদ করে, তবে একটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত অপরটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।]

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

ABC বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা প্রথম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহিঃস্থভাবে পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX.XB = CX.XD।

AD ও BC যোগ কর।

প্রমাণ। AXD ও CXB ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle AXD$ = বিপ্রতীপ $\angle CXB$ এবং

$\angle A = \angle C$ ($\because$ BD চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ),

$\therefore$ অবশিষ্ট কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ,

$$\therefore \frac{AX}{CX} = \frac{XD}{XB};$$

$\therefore$ AX.XB = CX.XD।

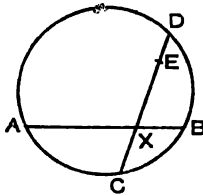
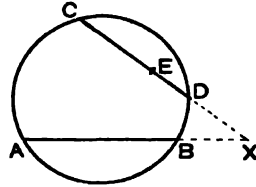
অনুসিদ্ধান্ত। The rectangle contained by the segments of any chord drawn through a given point within a circle is equal to the square on half the shortest chord which may be drawn through that point. (C. U. 1947)

[প্রদত্ত বিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখা ক্ষুদ্রতম জ্যাটির উপর লম্ব বলিয়া জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। কাজেই জ্যাটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত, ঐ ক্ষুদ্রতম জ্যার অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।]

উপপাদ্য 27

(উপ. 26 এর বিপরীত)

If two finite straight lines intersect, or intersect when produced, so that the rectangles contained by their segments are equal, the four extremities of the two lines are concyclic.

[দুইটি সসীম সরলরেখা অথবা বর্ধিত সসীম সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যদি একটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত অপরটির দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দু চারিটি একবৃত্তস্থ হইবে ।]

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর, দুইটি সসীম সরলরেখা AB ও CD প্রথম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং দ্বিতীয় চিত্রে বহিঃস্থভাবে পরস্পরকে X বিন্দুতে ছেদ করায় AX XB = CX.XD হইয়াছে ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D একবৃত্তস্থ ।

প্রমাণ । যদি A, B, C ও D একবৃত্তস্থ না হয়, তবে মনে কর যেন A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত CD (অথবা বর্ধিত CD) কে E বিন্দুতে ছেদ করিবে ।

তাহা হইলে, AX.XB = CX.XE, (উপ. 26)

কিন্তু কল্পনানুসারে, AX.XB = CX.XD ;

∴ CX.XE = CX.XD

∴ XE = XD

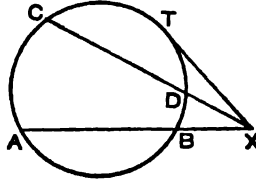
∴ D নির্দিষ্ট বিন্দু বলিয়া E, Dর সহিত মিলিয়া যাইবে ।

∴ A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D দিয়াও যাইবে ;

∴ A, B, C ও D একবৃত্তস্থ ।

উপপাদ্য 28

If from an external point a secant and a tangent are drawn to a circle, the rectangle contained by the whole secant and its part outside the circle is equal to the square on the tangent.

[যদি কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তটির একটি ছেদক ও একটি স্পর্শক টানা যায়, তবে সম্পূর্ণ ছেদক ও বৃত্তের বহিঃস্থ অংশ এই দুইএর অন্তর্গত আয়ত স্পর্শকটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।]

ABC বৃত্তের বহিঃস্থ X বিন্দু হইতে অঙ্কিত XBA একটি ছেদক এবং XT একটি স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $XA.XB = XT^2$ ।

প্রমাণ। মনে কর, বৃত্তটির XDC আর একটি ছেদক;

তাহা হইলে XDCর যে কোন অবস্থানে $XA.XB = XC.XD$ (উপ. 27)

এখন যদি XDC, X বিন্দুতে সংলগ্ন থাকিয়া বৃত্তটির কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ দূরে সরিতে থাকে, তবে C ও D ক্রমশঃ নিকটবর্তী হইবে এবং চরম অবস্থায় C ও D, T বিন্দুর সহিত মিলিয়া গিয়া XC ও XD উভয়েই XTর সমান হইবে।

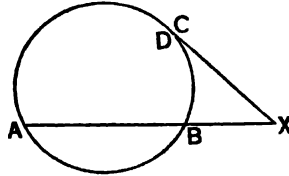
$$\therefore \quad XA.XB = XC.XD = XT.XT = XT^2 \text{ ।}$$

অনুসিদ্ধান্ত। If a chord AB and a tangent TX of a circle intersect at a point X outside the circle, then $XA.XB = XT^2$.

[XDC ছেদক আঁকিয়া উপ. 28 এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

উপপাদ্য 29

If from a point outside a circle two straight lines are drawn one of which cuts the circle and the other meets it, and if the rectangle contained by the whole line that cuts the circle and the part of it outside the circle is equal to the square on the line which meets the circle, then the line that meets the circle is a tangent to the circle.

[যদি কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি সরলরেখার একটি বৃত্তটিকে ছেদ করে এবং অপরটির এক প্রান্ত বৃত্তটির সহিত মিলিত থাকে, এবং যদি প্রথমোক্ত সরলরেখার সমুদয় অংশ এবং বৃত্তটির বাহিরের অংশ এই দুইএর অন্তর্গত আয়ত শেষোক্ত সরলরেখাটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে শেষোক্ত সরলরেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক হইবে ।]

ABC বৃত্তের বহিঃস্থ X বিন্দু হইতে অঙ্কিত XA ও XC সরলরেখাদ্বয়ের প্রথমটি বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করায় এবং দ্বিতীয়টির C প্রান্ত বৃত্তটির সহিত মিলিত হওয়ায় $XA.XB = XC^2$ হইয়াছে ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বৃত্তটির XC একটি স্পর্শক ।

প্রমাণ। যদি XC স্পর্শক না হয়, তবে মনে কর বর্ধিত XC বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল ।

তাহা হইলে, $XA.XB = XC.XD$

কিন্তু কল্পনানুসারে, $XA.XB = XC^2$

$XC.XD = XC^2$

$\therefore \quad XD = XC$

$\therefore$ C ও D সমাপতিত বিন্দু ।

$\therefore$ বৃত্তটির XC একটি স্পর্শক ।

Exercise 15

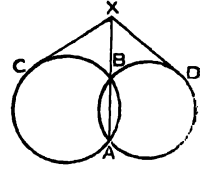
1. If two circles intersect, tangents drawn to them from any point in their common chord are equal.

[ইঙ্গিত : দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা যেন AB। বর্ধিত ABর X বিন্দু হইতে অঙ্কিত XC ও XD দুইটি স্পর্শক।

এখন, ABC বৃত্ত হইতে, $XC^2 = XA.XB$ এবং

ABD বৃত্ত হইতে, $XA.XB = XD^2$

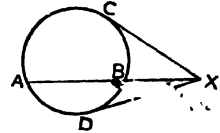
$\therefore \quad XC^2 = XD^2$,

$\therefore \quad XC = XD$ ।]

2. The two tangents to a circle from an external point are equal. (C. U. 1925)

[ইঙ্গিত : একটি বৃত্তের বহিঃস্থ X বিন্দু হইতে অঙ্কিত XC ও XD বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক।

X দিয়া একটি সরলরেখা আঁক ; উহা যেন বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

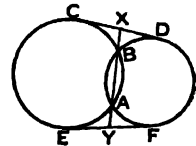
এখন, $XC^2 = XA.XB = XD^2$;

$\therefore \quad XC = XD$ ।]

3. If two circles intersect, their common tangents are bisected by the common chord produced. (C. U. 1919 ; S. B. '55)

[ইঙ্গিত : দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB উভয়দিকে বর্ধিত হওয়ায় সাধারণ স্পর্শক CD ও EF কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, $XC^2 = XA.XB = XD^2$

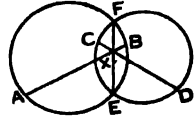
$\therefore \quad XC = XD$ ।

অনুরূপে, $YE = YF$ ।]

4. If two circles intersect and from any point in their common chord two chords are drawn, one in each circle, then (i) the rectangle contained by the segments of one chord is equal to the rectangle contained by the segments of the other and (ii) the four extremities of the two chords are concyclic.

[ইঙ্গিত : দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা EF এর X একটি বিন্দু। X দিয়া অঙ্কিত AB ও CD, বৃত্তদ্বয়ের দুইটি জ্যা।

এখন, (i) AX.XB = EX.XF = CX.XD

∴ AX.XB = CX.XD.

(ii) A, B, C, D একবৃত্তস্থ (উপ. 17)।]

…wo circles intersect and from a point in their common …ced two straight lines are drawn, one in each circle, …es of the chords so formed are concyclic.

ইঙ্গি… দুইটি বৃত্তের EF সাধারণ জ্যা। বর্ধিত E… X… হইতে অঙ্কিত XBA ও XDC দুইটি সরলরেখা।

এখন, …A.XB = XE.XF = XC.XD

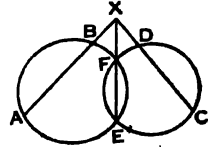
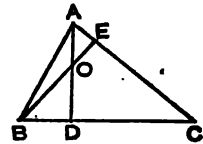
… A, B, C, D একবৃত্তস্থ (উপ. 17)।]

…n the triangle ABC, perpendiculars AD, BE are drawn to the …e sides. If they intersect at O, show that AO.OD = BO.OE।

…ঙ্গিত : ABর একই পার্শ্বে অবস্থিত

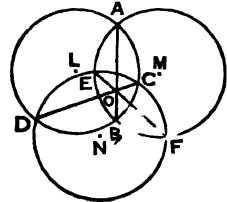
∠AEB = ∠ADB

(∵ প্রত্যেকে সমকোণ),

∴ A, E, D, B একবৃত্তস্থ ;

∴ AO.OD = BO.OE (উপ. 16)।]

7. In the triangle ABC, perpendiculars AD, BE and CF are drawn to the opposite sides. If they intersect at O, show that AO.OD = BO.OE = CO.OF. (G. U. 1948)

[ইঙ্গিত : প্রশ্ন 6 এর প্রমাণ দেখ।

8. If three circles intersect one another, the three common chords are (i) concurrent or (ii) parallel.

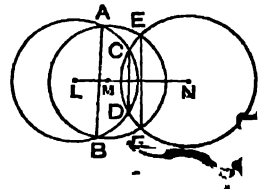
[ইঙ্গিত: (i) L ও M কেন্দ্রীয় দুইটি বৃত্তের AB সাধারণ জ্যা। ABর O দিয়া অঙ্কিত CD ও EF যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের যে কোন দুইটি জ্যা।

এখন, CO.OD = AO.OB = EO.OF (উপ. 16),

∴ CO.OD = EO.OF ;

∴ C, D, E ও F একবৃত্তস্থ (উপ. 17)।

সুতরাং C, D, E ও F দিয়া N কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত আঁকিলে, L ও N কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা CD এবং M ও N কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা EF হইবে।

∴ বৃত্তত্রয়ের AB, CD ও EF সাধারণ জ্যাত্রয় সমবিন্দু। আবার, ∵ O বিন্দুগামী CD ও EF জ্যাদ্বয়ের যে কোন অবস্থানের জন্য ইহা সত্য, ∴ কেন্দ্রত্রয় একরেখীয় না হইলে, যে কোন তিনটি বৃত্তের সাধারণ জ্যাত্রয় সমবিন্দু।

(ii) L, M ও N কেন্দ্রীয় বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রত্রয় একরেখীয়। L ও M কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের AB সাধারণ জ্যা, L ও N কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের CD সাধারণ জ্যা এবং M ও N কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের EF সাধারণ জ্যা। প্রমাণ করিতে হইবে, AB ∥ CD ∥ EF।

এখন, দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব, ∴ AB ⊥ LM, CD ⊥ LN এবং EF ⊥ MN। কিন্তু LMN একটি সরলরেখা,

∴ AB, CD ও EF এর প্রত্যেকে LMN সরলরেখার উপর লম্ব ;

∴ AB ∥ CD ∥ EF।]

9. Through A, a point of intersection of two circles, two straight lines BAC and DAE are drawn, each passing through a centre and terminated by the circumferences. Show that BA.AC = DA.AE.

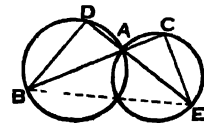
[ইঙ্গিত: BD, BE, CE যোগ কর।

এখন, অর্ধবৃত্তস্থ ∠BDA = 1 সমকোণ ;

তদ্রূপ, ∠ACE = 1 সমকোণ।

∴ BEর একই পার্শ্বে অবস্থিত ∠BDE = ∠BCE ;

B, E, C, D একবৃত্তস্থ।

∴ BA.AC = DA.AE (উপ. 16)।]

10. A, B, C are three points on a straight line. Find the locus of points of contact of tangents from A to the circles passing through B and C. (C. U. 1949)

[ইঙ্গিত : B ও C বিন্দুগামী বৃত্তসমূহের AD, AD_1, AE, AE_1 প্রভৃতি স্পর্শক।

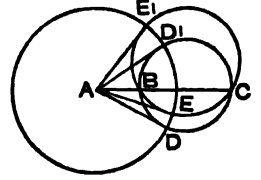
D, D_1, E, E_1 প্রভৃতি স্পর্শবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $AD^2 = AD_1^2$ (∵ একই বৃত্তের স্পর্শক)

$= AC.AB$ (উপ. 18)।

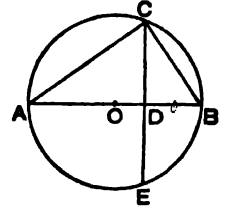
অনুরূপে, $AE^2 = AE_1^2 = AC.AB$ ।

∴ $AD^2 = AD_1^2 = AE^2 = AE_1^2$ = ইত্যাদি,

∴ $AD = AD_1 = AE = AE_1$ = ইত্যাদি ; ∴ A কে কেন্দ্র এবং AD কে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত নির্ণেয় সঞ্চারপথ।]

11. ABC is a triangle right-angled at C and CD is perpendicular to AB. Prove that $AD.DB = CD^2$. (C. U. 1900, '20, '35, '44, '47)

[ইঙ্গিত : AB কে ব্যাস লইয়া O-কেন্দ্রীয় বৃত্ত ACB আঁক। CD কে বর্ধিত কর ; উহা যেন বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

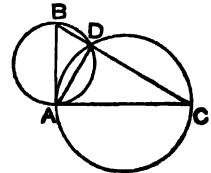
এখন, ∵ কেন্দ্রগামী OD সরলরেখা, CE জ্যার লম্ব,

∴ CD = DE । ∴ $AD.DB = CD.DE = CD^2$ ।]

12. ABC is a triangle right-angled at A and AD is perpendicular to BC. Prove that $BC.BD = BA^2$ and $CB.CD = CA^2$.

[ইঙ্গিত : AC কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ; ADC সমকোণ বলিয়া, বৃত্তটি D দিয়া যাইবে এবং

∵ AC ব্যাসের উপর AB লম্ব,

∴ বৃত্তটির A বিন্দুতে AB একটি স্পর্শক ;

∴ $BC.BD = BA^2$ ।

আবার, AB কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ; উহা D দিয়া যাইবে এবং বৃত্তটির A বিন্দুতে AC একটি স্পর্শক হইবে ;

∴ $CB.CD = CA^2$ ।]

13. If from an external point P, two tangents PA and PB are drawn to a given circle whose centre is O and radius r and if OP meets the chord of contact at Q, then $OP.OQ = r^2$.

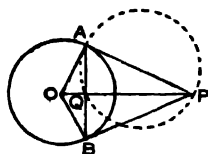
[ইঙ্গিত : OA ও OB যোগ কর ।

এখন, OAQ ও OBQ ত্রিভুজদ্বয়ের OA = OB, OQ = OQ এবং স্পর্শক PA ও PBর সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ $\angle AOQ = \angle BOQ$; $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ।

$\therefore$ $\angle AQO = \angle BQO = 1$ সমকোণ,

$\therefore$ $\angle AQP = 1$ সমকোণ ;

$\therefore$ AP কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত Q দিয়া যাইবে এবং ব্যাস APর উপর AO লম্ব বলিয়া বৃত্তটির AO একটি স্পর্শক ।

$\therefore$ $OP.OQ = AO^2 = r^2$ ।]

14. A semi-circle is described on AB as diameter, and any two chords AC, BD are drawn intersecting at P. Show that $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. (C. U. 1937)

[ইঙ্গিত : BC যোগ কর ।

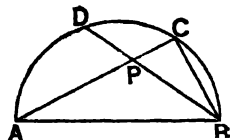
এখন, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ($\because \angle C$ সমকোণ)

$= (AP + PC)^2 + (BP^2 - PC^2)$

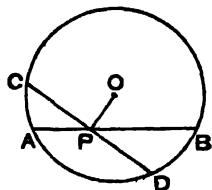
$= AP^2 + PC^2 + AP.PC + AP.PC + BP^2 - PC^2$

$= AP^2 + AP.PC + BP.PD + BP^2$

$= (AP + PC)AP + (PD + BP)BP$

$= AC.AP + BD.BP$ ।]

15. P is any point in AB, a chord of a circle. Show how to draw a line PC from P to the circumference of the circle so that PC^2 may be equal to PA.PB. (C. U. 1940)

[ইঙ্গিত : বৃত্তটির কেন্দ্র যেন O । OP যোগ কর । OPর উপর PC লম্ব টান ; উহা যেন বৃত্তটিকে C বিন্দুতে ছেদ করিল । তাহা হইলে, $PC^2 = PA.PB$ হইবে ।

প্রমাণ । CP কে বর্ধিত কর ; উহা যেন বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল ।

$\because$ কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত OP, CD জ্যার উপর লম্ব, $\therefore$ PC = PD ;

$\therefore$ $PC^2 = PC.PD = PA.PB$ ।]

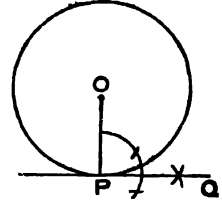
সম্পাদ্য 7

To draw a tangent to a given circle at a given point on its circumference.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক টানিতে হইবে।]

মনে কর, নির্দিষ্ট বৃত্তটির O কেন্দ্র এবং বৃত্তটির পরিধির উপর অবস্থিত P একটি বিন্দু।

P বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক টানিতে হইবে।

অঙ্কন। OP যোগ কর। P বিন্দুতে OPর উপর PQ লম্ব টান।

তাহা হইলে PQ উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। ∵ OP একটি ব্যাসার্ধ এবং P বিন্দুতে OPর উপর PQ লম্ব,

∴ P বিন্দুতে PQ বৃত্তটিকে স্পর্শ করিয়াছে ; ∴ PQ উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

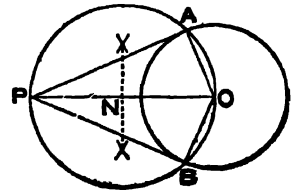
সম্পাদ্য 8

To draw tangents to a given circle from a given external point.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বৃত্তটির স্পর্শক টানিতে হইবে।]

মনে কর, নির্দিষ্ট বৃত্তটির O কেন্দ্র এবং P একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু।

P বিন্দু হইতে বৃত্তটির স্পর্শক টানিতে হইবে।

অঙ্কন। PO যোগ কর। PO কে N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। N কে কেন্দ্র এবং NO কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক ; উহা যেন O-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। PA, PB যোগ কর।

তাহা হইলে, PA ও PB উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। OA, OB যোগ কর।

$\angle PAO = 1$ সমকোণ, (∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)

∴ OA ব্যাসার্ধের উপর AP লম্ব ;

∴ A বিন্দুতে PA, বৃত্তটির একটি স্পর্শক।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, B বিন্দুতে PB, বৃত্তটির আর একটি স্পর্শক।

6. যে সরলরেখা দুইটি বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহাকে বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক** (Common tangent) বলে।

7. সাধারণ স্পর্শক দুই প্রকার—**সরল** ও **তির্যক**।

দুইটি বৃত্তের কোণ সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি যদি কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার একই পার্শ্বে থাকে, তবে ঐ সাধারণ স্পর্শককে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct common tangent) বলে।

দুইটি বৃত্তের কোন সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি যদি কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে ঐ সাধারণ স্পর্শককে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse common tangent) বলে।

8. (1) কোন বৃত্তের (i) পরিধির উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক টানা যায়।

(ii) বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

(iii) অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোনও স্পর্শক টানা যায় না।

(2) দুইটি বৃত্ত (i) অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিলে একটি সাধারণ স্পর্শক টানা যায়।

(ii) বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিলে একটি সাধারণ স্পর্শক এবং দুইটি সরল সাধারণ স্পর্শক টানা যায়।

(iii) পরস্পরকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিলে দুইটি সরল সাধারণ স্পর্শক টানা যায়।

(iv) যদি একটি বৃত্ত অপরটির বাহিরে থাকিয়া পরস্পরকে স্পর্শ না করে, তবে দুইটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং দুইটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানা যায়।

সম্পাদ্য 9

To draw a direct common tangent to two given circles.

[দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক টানিতে হইবে।]

বৃহত্তর বৃত্তটির কেন্দ্র যেন A ও ব্যাসার্ধ a এবং ক্ষুদ্রতরটির কেন্দ্র B ও ব্যাসার্ধ b. এই বৃত্ত দুইটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB যোগ কর। বৃহত্তর বৃত্তের AQ একটি ব্যাসার্ধ টানিয়া উহা হইতে bর সমান করিয়া QP অংশ কাটিয়া লও।

A কে কেন্দ্র করিয়া এবং উভয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান AP কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং এই বৃত্তটির একটি স্পর্শক BC টান।

AC যোগ করিয়া বর্ধিত কর ; ইহা যেন বৃহত্তর বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

B হইতে ADর সমান্তরাল করিয়া BE ব্যাসার্ধ এরূপে টান যেন D ও E বিন্দু, ABর একই পার্শ্বে থাকে। DE যোগ কর।

তাহা হইলে DE উভয় বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। AD = AQ এবং AC = AP ; (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ অন্তর লইয়া, CD = PQ = BE ; (অঙ্কন)

∴ CD ও BE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল ; (অঙ্কন)

∴ CDEB একটি সামান্তরিক।

কিন্তু ব্যাসার্ধ ACর উপর স্পর্শক CB লম্ব বলিয়া ∠DCB = 1 সমকোণ ;

∴ CDEB একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ CDE ও BED কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে সমকোণ।

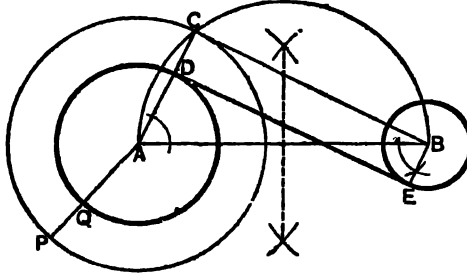
∴ DE উভয় বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

মন্তব্য। B হইতে BCর অনুরূপ আর একটি স্পর্শক টানা যায়। সুতরাং ABর অপর পার্শ্বে DEর অনুরূপ আর একটি স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

টীকা। যদি A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় সমান হয়, তবে ACB সমকোণী ত্রিভুজের AC অর্থাৎ ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর শূন্য হইবে। সুতরাং বৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক টানিতে হইলে, ABর সহিত সমকোণ করিয়া AD ব্যাসার্ধ টান, ADর সমান্তরাল করিয়া একই দিকে BE ব্যাসার্ধ টান এবং DE যোগ কর। DE উদ্দিষ্ট স্পর্শক হইবে।

সম্পাদ্য 10

To draw a transverse common tangent to two given circles.

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানিতে হইবে।]

মনে কর, বৃহত্তর বৃত্তটির কেন্দ্র A ও ব্যাসার্ধ a এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটির কেন্দ্র B ও ব্যাসার্ধ b.

এই বৃত্ত দুইটির একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB যোগ কর। বৃহত্তর বৃত্তের AQ একটি ব্যাসার্ধ টানিয়া উহাকে বর্ধিত কর এবং বর্ধিত অংশ হইতে bর সমান করিয়া PQ অংশ কাটিয়া লও।

A কে কেন্দ্র করিয়া এবং উভয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান AP কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং B হইতে এই বৃত্তটির একটি স্পর্শক BC টান।

AC যোগ কর ; উহা যেন বৃহত্তর বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

B হইতে DAর সমান্তরাল BE ব্যাসার্ধ এরূপে টান যেন D ও E বিন্দু ABর বিপরীত পার্শ্বে থাকে। DE যোগ কর।

তাহা হইলে DE উভয় বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। AD = AQ এবং AC = AP, (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

∴ অন্তর লইয়া, CD = PQ = BE ; (অঙ্কন)

∴ CD ও BE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল ; (অঙ্কন)

∴ CDEB একটি সামান্তরিক।

কিন্তু ব্যাসার্ধ ACর উপর স্পর্শক CB লম্ব বলিয়া ∠DCB = 1 সমকোণ ;

∴ CDEB একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ ADE ও BED কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে সমকোণ ;

DE উভয় বৃত্তের একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

মন্তব্য। B হইতে BCর অনুরূপ আর একটি স্পর্শক টানা যায়। সুতরাং DEর অনুরূপ আর একটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানা যাইতে পারে।

টীকা। যদি A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় সমান হয়, তবে তির্যক সাধারণ স্পর্শক টানিবার প্রণালীর কোনরূপ পার্থক্য হইবে না।

Exercise 16

1. (*a*) **Draw a circle of radius 2" and draw two tangents to it from a point 4" away from the centre.**

(*b*) **Find by measurement the length of the chord of contact.**

(C. U. 1913)

2. How many common tangents can be drawn

(*i*) **when the given circles intersect,**

(*ii*) **when they touch internally,**

(*iii*) **when they touch externally,**

(*iv*) **when one is within the other and**

(*v*) **when one is outside the other.** **(C. U. 1913)**

3. Draw the direct common tangents to two equal circles.

4. If the two direct common tangents or the two transverse common tangents are drawn to two circles, show that the parts of the tangents intercepted between the points of contact are equal.

[ইঙ্গিত : P ও Q কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের বর্ধিত AB ও CD সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় X বিন্দুতে এবং EF ও GH তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, P কেন্দ্রীয় বৃত্তের XA ও XC স্পর্শক ;

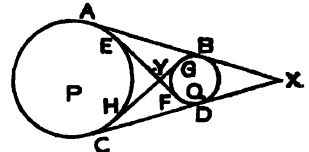
∴ XA = XC। অনুরূপে, XB = XD।

∴ XA − XB = XC − XD ; ∴ AB = CD।

আবার, P কেন্দ্রীয় বৃত্তের YE ও YH স্পর্শক ;

∴ YE = YH. অনুরূপে, YF = YG।

∴ YE + YF = YH + YG ;

∴ EF = GH।]

5. The two direct common tangents and the two transverse common tangents to two circles, external to one another, intersect on the line of centres.

[ইঙ্গিত : প্রশ্ন 4 এর চিত্র লইয়া PE, PH, QF, QG, PY ও QY যোগ কর।

এখন, PEY ও PHY ত্রিভুজদ্বয়ের

$PE = PH$ ($\therefore$ ব্যাসার্ধ),

$YE = YH$ ($\because$ স্পর্শক)

এবং $PY = PY$;

$\therefore \angle PYE = \angle PYH$ ।

অনুরূপে, $\angle QYG = \angle QYF$ ।

কিন্তু $\angle EYH =$ বিপ্রতীপ $\angle GYF$;

$\therefore \angle PYE = \angle QYF$ । কিন্তু EYF একটি সরলরেখা;

$\therefore$ PYQ একটি সরলরেখা;

$\therefore$ Y, কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক PQর উপর অবস্থিত।

আবার, PA, PC, QB, QD, PX, QY যোগ কর। এখন,

$\triangle AXP \equiv \triangle CXP$, $\therefore \angle AXP = \angle CXP$;

$\therefore \angle AXP = \frac{1}{2} \angle AXC$ ।

অনুরূপে, $\because \triangle BXQ \equiv \triangle DXQ$, $\therefore \angle BXQ = \frac{1}{2} \angle BXD = \angle \frac{1}{2} AXC$;

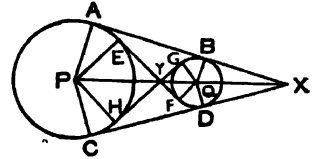
$\therefore \angle AXP = \angle BXQ$ ।

কিন্তু AX ও BX একই সরলরেখা,

$\therefore$ XP ও XQ একই সরলরেখা।

$\therefore$ X, বর্ধিত PQর উপর অবস্থিত।

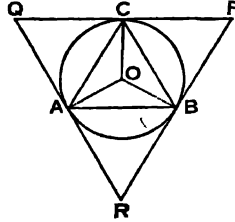
$\therefore$ Y ও X, PQ ও বর্ধিত PQর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।]

6. Two circles touch externally at A and a direct common tangent is drawn to touch them at P and Q. Show that PQ subtends a right angle at A and the circle drawn with PQ as diameter touches the line of centres.

[ইঙ্গিত : সাধারণ স্পর্শকটি টানিয়া প্রমাণ কর।]

সম্পাদ্য 11

To draw a regular triangle (i) in and (ii) about a given circle.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে (i) একটি সুষম ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।]

O, নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র।

নির্দিষ্ট বৃত্তটিতে (i) একটি সুষম ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। (i) OA একটি ব্যাসার্ধ আঁক। $\frac{1}{3} \times 360°$ বা $120°$ এর সমান করিয়া AOB এবং BOC কোণ দুইটি আঁক। তাহা হইলে COA কোণটিও $120°$ হইবে। OB ও OC যেন বৃত্তটির পরিধির সহিত B ও C বিন্দুতে মিলিত হইল।

AB, BC ও AC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম ত্রিভুজ হইবে।

(ii) উল্লিখিত প্রণালী অবলম্বন করিয়া বৃত্তটির পরিধিতে A, B ও C লও। বিন্দু তিনটিতে বৃত্তটির তিনটি স্পর্শক আঁক। উহারা যেন পরস্পরের সহিত P, Q ও R বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে PQR উদ্দিষ্ট পরিলিখিত সুষম ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। (i) AOB, BOC এবং AOC ত্রিভুজত্রয়ে

AO = OB = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$ ($\because$ প্রত্যেকে $120°$)

$\therefore$ ত্রিভুজত্রয় সর্বসম।

$\therefore$ AB = BC = AC

$\therefore$ ABC ত্রিভুজ সমবাহু, এবং কাজেই সদৃশকোণী ;

$\therefore$ ABC উদ্দিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম ত্রিভুজ।

(ii) AR একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু A দিয়া অঙ্কিত OA একটি ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ $\angle OAR = 1$ সমকোণ। অনুরূপে, $\angle OBR = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ OARB চতুর্ভুজের চারি কোণ একত্রে 4 সমকোণ বলিয়া,

$\angle AOB + \angle R = 2$ সমকোণ বা $180°$;

কিন্তু অঙ্কনানুসারে, $\angle AOB = 120°$, $\therefore$ $\angle R = 60°$

অনুরূপে, $\angle P = 60°$ এবং $\angle Q = 60°$

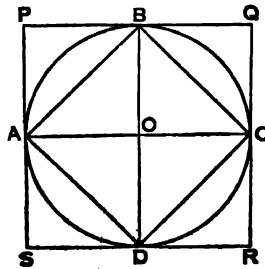
$\therefore$ PQR ত্রিভুজ সদৃশকোণী, এবং কাজেই সমবাহু।

$\therefore$ PQR উদ্দিষ্ট পরিলিখিত সুষম ত্রিভুজ।

মন্তব্য। যে ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান এবং কোণগুলি সমান, তাহাকে সুষম (Regular) ত্রিভুজ বলে। আবার, ত্রিভুজ সমবাহু হইলেই সদৃশকোণী হয় এবং সদৃশকোণী হইলেই সমবাহু হয়। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজ বা সদৃশকোণী ত্রিভুজ আঁকিলেই সুষম ত্রিভুজ আঁকা হইবে।

সম্পাদ্য 12

To draw a regular quadrilateral (i) in and (ii) about a given circle.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে (i) একটি সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র পরিলিখিত করিতে হইবে।]

O, নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র।

নির্দিষ্ট বৃত্তটিতে (i) একটি সুষম চতুর্ভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম চতুর্ভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। (i) AC একটি ব্যাস আঁক। $\frac{1}{4} \times 360°$ বা $90°$ এর সমান করিয়া $\angle COB$ আঁক ; OB যেন বৃত্তটির পরিধির সহিত B বিন্দুতে মিলিত হইল।

BO কে বর্ধিত কর ; উহা যেন বৃত্তটির পরিধির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল।
AB, BC, CD ও AD যোগ কর।
তাহা হইলে ABCD উদ্দিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইবে।

(ii) উল্লিখিত প্রণালী অবলম্বন করিয়া বৃত্তটির পরিধিতে A, B, C ও D লও। বিন্দু চারিটিতে বৃত্তটির চারিটি স্পর্শক আঁক। উহারা যেন পরস্পরের সহিত P, Q, R ও S বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে PQRS উদ্দিষ্ট পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ হইবে।

প্রমাণ। (i) AOB, BOC, COD এবং DOA ত্রিভুজ চারিটির

OA = OB = OC = OD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\angle$AOB = $\angle$BOC = $\angle$COD = $\angle$DOA ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ ত্রিভুজ চারিটি সর্বসম।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের AB = BC = CD = DA এবং

$\angle$A = $\angle$B = $\angle$C = $\angle$D ($\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ ABCD উদ্দিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম চতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র।

(ii) AP একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু A দিয়া অঙ্কিত OA একটি ব্যাসার্ধ ;

$\therefore$ $\angle$OAP = 1 সমকোণ। অনুরূপে, $\angle$OBP = 1 সমকোণ ;

$\therefore$ $\angle P = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$।

অনুরূপে, $\angle$Q, $\angle$R এবং $\angle$S এর প্রত্যেকে 90°।

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজটি সদৃশকোণী।

আবার, APB, BQC, CRD এবং DSA ত্রিভুজগুলির P, Q, R এবং S কোণগুলি সমকোণ (প্রমাণিত) এবং PA = PB, QB = QC, RC = RD ও SD = SA ($\because$ বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শক) বলিয়া, ত্রিভুজগুলির প্রত্যেকটির অপর দুই কোণের প্রত্যেকে 45°।

$\therefore$ ত্রিভুজগুলির AB = BC = CD = DA (প্রমাণিত)

এবং এই বাহুগুলি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ 45° ;

$\therefore$ ত্রিভুজগুলি সর্বসম।

$\therefore$ PA = PB = QB = QC = RC = RD = SD = SA,

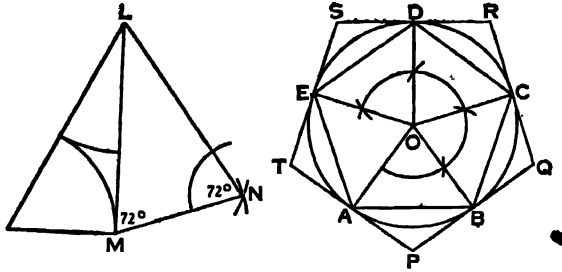
$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজের PQ = QR = RS = SP ;

$\therefore$ PQRS চতুর্ভুজটি সমবাহু, এবং সদৃশকোণী (প্রমাণিত) ;

$\therefore$ PQRS উদ্দিষ্ট পরিলিখিত সুষম চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য 13

To draw a regular pentagon (i) in and (ii) about a given circle.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে (i) একটি সুষম পঞ্চভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম পঞ্চভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।]

O, নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র।

নির্দিষ্ট বৃত্তটিতে (i) একটি সুষম পঞ্চভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম পঞ্চভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

(i) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ LMN আঁক যেন উহার M ও N কোণের প্রত্যেকটি L কোণের দ্বিগুণ হয়, অর্থাৎ প্রত্যেকটি 72° হয়।

OA একটি ব্যাসার্ধ আঁক। $\frac{1}{5} \times 360°$ বা 72° পরিমিত N কোণের সমান করিয়া AOB, BOC, COD এবং DOE কোণগুলি আঁক। তাহা হইলে EOA কোণও 72° হইবে। OB, OC, OD এবং OE যেন বৃত্তটির পরিধির সহিত যথাক্রমে B, C, D এবং E বিন্দুতে মিলিত হইল। AB, BC, CD, DE এবং EA যোগ কর।

তাহা হইলে ABCDE উদ্দিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইবে।

(ii) উল্লিখিত প্রণালী অবলম্বন করিয়া বৃত্তটির পরিধিতে A, B, C, D এবং E লও। বিন্দু পাঁচটিতে বৃত্তটির পাঁচটি স্পর্শক টান। উহারা যেন পরস্পরের সহিত P, Q, R, S এবং T বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে PQRST উদ্দিষ্ট পরিলিখিত সুষম পঞ্চভুজ হইবে।

প্রমাণ। (i) AOB, BOC, COD, DOE এবং EOA ত্রিভুজ পাঁচটির

OA = OB = OC = OD = OE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠DOE = ∠EOA (∵ প্রত্যেকে 72°)

∴ ত্রিভুজ পাঁচটি সর্বসম।

$\therefore$ AB = BC = CD = DE = EA ;

$\therefore$ ABCDE পঞ্চভুজটি সমবাহু।

আবার, সর্বসম ত্রিভুজ পাঁচটির OA = OB = OC = OD = OE বলিয়া, উহাদের A, B, C, D ও E বিন্দুস্থ দশটি কোণ পরস্পর সমান ;

$\therefore$ পঞ্চভুজটির পাঁচটি কোণ পরস্পর সমান।

$\therefore$ ABCDE পঞ্চভুজটি সদৃশকোণী, এবং সমবাহু (প্রমাণিত) ;

$\therefore$ ABCDE পঞ্চভুজটি সুষম।

(ii) AP একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু A দিয়া অঙ্কিত OA একটি ব্যাসার্ধ ;

$\therefore$ $\angle OAP = 1$ সমকোণ। অনুরূপে, $\angle OBP = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle P = 180° - \angle AOB = 180° - 72° = 108°$।

অনুরূপে, Q, R, S ও T কোণের প্রত্যেকে 108° ;

$\therefore$ PQRST পঞ্চভুজটি সদৃশকোণী।

আবার, APB, BQC, CRD, DSE এবং ETA ত্রিভুজ পাঁচটির P, Q, R, S এবং T কোণগুলির প্রত্যেকে 108° (প্রমাণিত) এবং PA = PB, QB = QC, RC = RD, SD = SE এবং TE = TA ($\because$ বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শক) বলিয়া, ত্রিভুজ পাঁচটির প্রত্যেকটির অপর দুই কোণের প্রত্যেকের $\frac{1}{2}(180° - 108°)$ বা 36° ;

$\therefore$ ত্রিভুজ পাঁচটির AB = BC = CD = DE = EA (প্রমাণিত) এবং এই বাহুগুলি-সংলগ্ন কোণগুলি 36° ;

$\therefore$ ত্রিভুজ পাঁচটি সর্বসম।

$\therefore$ PA = PB = QB = QC = RC = RD = SD = SE = TE = TA,

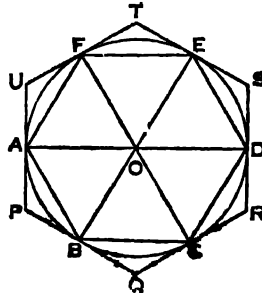
$\therefore$ PQRST পঞ্চভুজের PQ = QR = RS = ST = TP ;

$\therefore$ PQRST পঞ্চভুজটি সমবাহু, এবং সদৃশকোণী (প্রমাণিত) ;

$\therefore$ PQRST পঞ্চভুজটি সুষম।

সম্পাদ্য 14

To draw a regular hexagon (i) in and (ii) about a given circle.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে (i) একটি সুষম ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম ষড়ভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।]

O, নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র।

নির্দিষ্ট বৃত্তটিতে (i) একটি সুষম ষড়ভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে এবং (ii) একটি সুষম ষড়ভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। (i) AD একটি ব্যাস আঁক। $\frac{1}{6} \times 360°$ বা 60°র সমান করিয়া ∠AOB এবং ∠BOC আঁক। তাহা হইলে, সরলকোণ AOD = 180° বলিয়া, ∠COD = 60°। BO এবং CO কে যথাক্রমে পরিধিস্থ E ও F পর্যন্ত বর্ধিত কর। তাহা হইলে O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ তিনটির প্রত্যেকটি 60° হইবে।

AB, BC, CD, DE, EF এবং FA যোগ কর।

তাহা হইলে ABCDEF উদ্দিষ্ট অন্তর্লিখিত সুষম ষড়ভুজ হইবে।

(ii) উল্লিখিত প্রণালী অবলম্বন করিয়া বৃত্তটির পরিধিতে A, B, C, D, E এবং F বিন্দু লও। বিন্দু ছয়টিতে বৃত্তটির ছয়টি স্পর্শক টান। উহারা যেন পরস্পরের সহিত P, Q, R, S, T এবং U বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে PQRSTU উদ্দিষ্ট পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ হইবে।

প্রমাণ। (i) AOB, BOC, COD, DOE, EOF এবং FOA ত্রিভুজ ছয়টির

OA = OB = OC = OD = OE = OF (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) এবং

∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠DOE = ∠EOF = ∠FOA

(∵ প্রত্যেকে 60°)

∴ ত্রিভুজ ছয়টি সর্বসম।

∴ AB = BC = CD = DE = EF = FA ;

∴ ABCDEF ষড়ভুজটি সমবাহু।

আবার, সর্বসম ত্রিভুজ ছয়টির OA = OB = OC = OD = OE = OF বলিয়া, ত্রিভুজগুলির A, B, C, D, E ও F বিন্দুস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান ;

∴ ষড়ভুজটির ছয়টি কোণ পরস্পর সমান অর্থাৎ ষড়ভুজটি সদৃশকোণী ;

∴ ABCDEF ষড়ভুজটি সদৃশকোণী ও সমবাহু (প্রমাণিত), অর্থাৎ সুষম ।

(ii) AP একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু A দিয়া অঙ্কিত AO একটি ব্যাসার্ধ ;

∴ $\angle OAP = 1$ সমকোণ ।

অনুরূপে, $\angle OBP = 1$ সমকোণ ।

∴ $\angle P = 180^\circ - \angle AOB = 120^\circ$ ।

অনুরূপে, Q, R, S, T এবং U কোণের প্রত্যেকে 120° ;

∴ ABCDEF ষড়ভুজটি সদৃশকোণী ।

আবার, APB, BQC, CRD, DSE, ETF এবং FUA ত্রিভুজ ছয়টির

P, Q, R, S, T এবং U কোণগুলির প্রত্যেকে 120° (প্রমাণিত) এবং PA = PB, QB = QC, RC = RD, SD = SE, TE = TF এবং UF = UA (∵ বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শক) বলিয়া, ত্রিভুজ ছয়টির প্রত্যেকটির অপর দুই কোণের প্রত্যেকে $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ)$ বা 30° ;

∴ ত্রিভুজ ছয়টির AB = BC = CD = DE = EF = FA (প্রমাণিত), এবং

এই বাহুগুলি সংলগ্ন কোণগুলি 30° ;

∴ ত্রিভুজ ছয়টি সর্বসম ।

∴ PA = PB = QB = QC = RC = RD = SD = SE = TE = TF = UF = UA ;

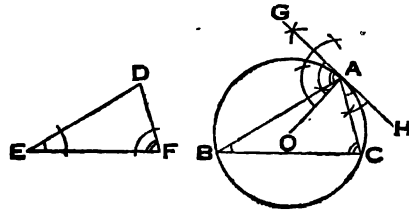
∴ PQRSTU ষড়ভুজটির PQ = QR = RS = ST = TU = UP,

∴ PQRSTU ষড়ভুজটি সমবাহু ;

∴ PQRSTU ষড়ভুজটি সমবাহু ও সদৃশকোণী (প্রমাণিত), অর্থাৎ সুষম ।

সম্পাদ্য 15

In a given circle to inscribe a triangle equiangular to a given triangle.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।]

নির্দিষ্ট বৃত্তটির O যেন কেন্দ্র এবং DEF যেন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বৃত্তটিতে DEF ত্রিভুজটির সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। বৃত্তটির পরিধিতে যে কোন বিন্দু A লও। A বিন্দুতে বৃত্তটির GAH স্পর্শক টান। A বিন্দুতে ∠Eর সমান করিয়া ∠HAC আঁক এবং ∠F এর সমান করিয়া ∠GAB আঁক। AB ও AC যেন বৃত্তটির পরিধির সহিত B ও C বিন্দুতে মিলিত হইল। BC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। A বিন্দুতে GAH স্পর্শক এবং AC একটি জ্যা,

∴ ∠HAC = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠ABC

কিন্তু ∠HAC = ∠E; (অঙ্কন)

∴ ∠ABC = ∠E

অনুরূপে, ∠ACB = ∠F

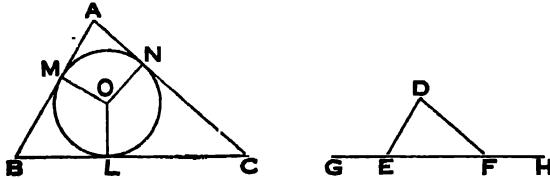
∴ অবশিষ্ট ∠BAC = অবশিষ্ট ∠D

∴ বৃত্তটিতে অন্তর্লিখিত ABC ত্রিভুজ, DEF ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী;

∴ উহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য 16

About a given circle to circumscribe a triangle equi-angular to a given triangle.

[একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।]

নির্দিষ্ট বৃত্তটির O যেন কেন্দ্র এবং DEF যেন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বৃত্তটিতে DEF ত্রিভুজটির সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। EF কে উভয়দিকে G ও H পর্যন্ত বর্ধিত কর।

বৃত্তটির যে কোন একটি ব্যাসার্ধ OL আঁক।

O বিন্দুতে $\angle$DEGর সমান করিয়া $\angle$LOM আঁক এবং $\angle$DFH এর সমান করিয়া $\angle$LON আঁক। OM ও ON যেন বৃত্তটির পরিধির সহিত M ও N বিন্দুতে মিলিত হইল। L, M ও N বিন্দুতে বৃত্তটির তিনটি স্পর্শক টান। উহারা যেন পরস্পরের সহিত মিলিত হইয়া ABC ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। OL ব্যাসার্ধের L বিন্দুতে BLC স্পর্শক,

$\therefore$ OLBM চতুর্ভুজের $\angle OLB = 1$ সমকোণ।

অনুরূপে, চতুর্ভুজটির $\angle OMB = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle LBM + \angle LOM = 2$ সমকোণ।

আবার, $\angle DEF + \angle DEG = 2$ সমকোণ;

$\therefore$ $\angle LBM + \angle LOM = \angle DEF + \angle DEG$

কিন্তু অঙ্কনানুসারে, $\angle LOM = \angle DEG$

$\therefore$ $\angle LBM$ অর্থাৎ $\angle ABC = \angle DEF$।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle ACB = \angle DFE$;

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAC$ = অবশিষ্ট $\angle EDF$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজ, DEF ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী।

আবার, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি বৃত্তটিকে স্পর্শ করে;

$\therefore$ ABC উদ্দিষ্ট পরিলিখিত ত্রিভুজ।

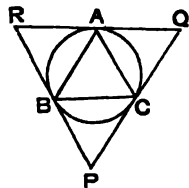
Exercise 17

1. Inscribe an equilateral triangle in a circle.

2. In a circle inscribe a triangle whose angles are 30° and 90°.

3. About a circle circumscribe a triangle whose two angles are 45° and 60°.

4. The area of an equilateral triangle inscribed in a circle is one quarter of the circumscribed equilateral triangle.

[ইঙ্গিত : নির্দিষ্ট বৃত্তে ABC অন্তর্লিখিত এবং PQR পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ। এখন, PBC ত্রিভুজের $\angle P = 60°$ (কল্পনা) এবং PB = PC ($\because$ স্পর্শক), $\therefore$ PBC ও PCB কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে 60°। ABC ও PBC ত্রিভুজদ্বয়ের BC সাধারণ এবং BC সংলগ্ন কোণগুলির প্রত্যেকে 60°। $\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle PBC$।

অনুরূপে, $\triangle ABC \equiv \triangle QCA$, $\triangle ABC \equiv \triangle RAB$;

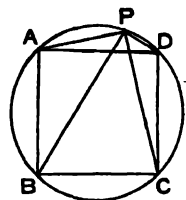
$\therefore$ $\triangle ABC = \frac{1}{4} \triangle PQR$।]

5. ABCD is a square inscribed in a circle and P is any point on the arc AD. Prove that the angle subtended at P by AD is thrice the angle subtended at P by each of the other three sides of the square.

[ইঙ্গিত : AB = BC = CD ($\because$ বর্গক্ষেত্রটির বাহু),

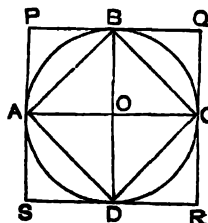
$\therefore$ পরিধিস্থ $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$

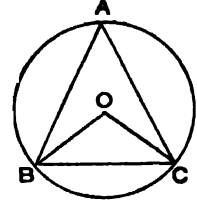
$= \frac{1}{3}(\angle APB + \angle BPC + \angle CPD) = \frac{1}{3} \angle APD$।

$\therefore$ $\angle APD = 3\angle APB = 3\angle BPC = 3\angle CPD$।]

6. The area of a square circumscribed about a circle is double that of the inscribed square.

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে ABCD অন্তর্লিখিত এবং PQRS পরিলিখিত বর্গক্ষেত্র এবং AC ও BD দুইটি ব্যাস (সম্পাদ্য 12 এর অঙ্কন দেখ।)। এখন, APQC এবং ASRC প্রত্যেকে আয়তক্ষেত্র (সম্পাদ্য 12 এর প্রমাণ দেখ।)। $\therefore$ $\square APQC = 2\triangle ABC$

এবং $\square ASRC = 2\triangle ADC$;

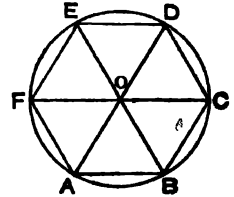
$\therefore$ PQRS বর্গক্ষেত্র = 2.ABCD বর্গক্ষেত্র।]

7. If each of the angles at the base of an isosceles triangle inscribed in a circle is double of the vertical angle, show that the base will be a side of the regular pentagon inscribed in the circle.

[ইঙ্গিত: O কেন্দ্রীয় বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের B ও C কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে A কোণের দ্বিগুণ।

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{5} \times 180° = 36°$। OB, OC যোগ কর।

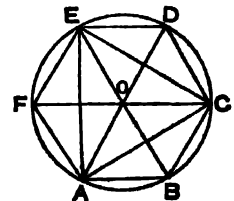
এখন, BCর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ $= 2 \times$ পরিধিস্থ $\angle BAC = 2 \times 36° = 72° = \frac{1}{5} \times 360° = \frac{1}{5} \times$ কেন্দ্রস্থ কোণ;

$\therefore$ অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের BC একটি বাহু হইবে।]

8. Each side of a regular hexagon inscribed in a circle is equal to the radius of the circle.

[ইঙ্গিত: O কেন্দ্রীয় বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। OA, OB, OC, OD, OE, OF যোগ কর। এখন, ষড়ভুজটির বাহুগুলি সমান বলিয়া O বিন্দুস্থ কোণগুলি সমান; $\therefore \triangle AOB$র $\angle O = 60°$ এবং OA = OB বলিয়া $\angle A = \angle B = 60°$. $\therefore \triangle AOB$ সমবাহু।

$\therefore$ AB = OA অর্থাৎ ষড়ভুজটির বাহু = বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।]

9. If the alternate angular points of a regular hexagon are joined, the area of the equilateral triangle so formed is half the area of the hexagon.

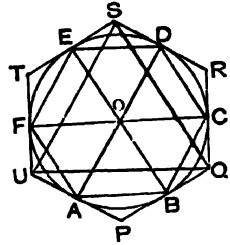
[ইঙ্গিত: সুষম ষড়ভুজটি যেন ABCDEF এবং ত্রিভুজটি যেন ACE. এখন, ABC, CDE ও EFA ত্রিভুজত্রয়ের $\angle B = \angle D = \angle F$ এবং এই কোণগুলির বাহুগুলি সমান, $\therefore$ AC = CE = EA; $\therefore \triangle ACE$ সমবাহু। আবার, AOC ও ABC ত্রিভুজদ্বয়ের AO = AB ও CO = CB (প্রশ্ন 7) এবং AC সাধারণ,

$\therefore \triangle AOC = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ AOCB, ইত্যাদি।]

10. The area of a regular hexagon inscribed in a circle is three-fourths that of the circumscribed regular hexagon.

[ইঙ্গিত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে ABCDEF অন্তর্লিখিত এবং PQRSTU পরিলিখিত সুষম ষড়ভুজ। OA, OB, OC, OD, OE, OF, SQ, SU ও UQ যোগ কর।

এখন, $\triangle$OAB এবং $\triangle$SUQ সমবাহু (প্রশ্ন 8 ও 9), কাজেই সদৃশ এবং PUQ ত্রিভুজের A, PUর এবং B, PQর মধ্যবিন্দু ; $\therefore$ UQ = 2AB।

$\therefore \frac{\triangle OAB}{\triangle SUQ} = \frac{AB^2}{UQ^2} = \frac{AB^2}{4AB^2} = \frac{1}{4}$, $\therefore \triangle OAB = \frac{1}{4}\triangle SUQ$,

$\therefore$ ষড়ভুজ ABCDEF $= 6.\triangle OAB = 6\cdot\frac{1}{4}\triangle SUQ = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$ ষড়ভুজ PQRSTU (প্রশ্ন 6) $= \frac{3}{4}$ ষড়ভুজ PQRSTU।]

সম্পাদ্য 17

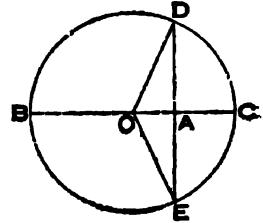
To find the *mean proportional* between two given straight lines.

[দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।]

AB ও AC দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। উহাদের মধ্যে সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

অঙ্কন। AB ও AC কে পরস্পরের বিপরীত দিকে একই সরলরেখায় স্থাপন কর। BC কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB বা OC কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। BCর উপর AD লম্ব আঁক ; উহা যেন বৃত্তটির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে AD সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

প্রমাণ। DA কে বর্ধিত কর ; উহা যেন বৃত্তটির সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল।

OD ও OE যোগ কর।

এখন, OAD এবং OAE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

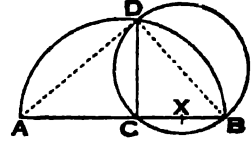
অতিভুজ OD = অতিভুজ OE এবং OA = OA ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; ∴ AD = AE ।

$$\therefore AB.AC = AD.AE$$
$$= AD.AD = AD^2 ।$$

∴ AD সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী ।

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB ও AC কে একই দিকে একই সরলরেখায় স্থাপন কর। AB কে ব্যাস লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত আঁক। ABর উপর CD লম্ব টান; উহা যেন অর্ধপরিধির সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। AD যোগ কর। AB হইতে ADর সমান করিয়া AX লও।

তাহা হইলে AX সরলরেখা, AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

প্রমাণ। BD যোগ কর। BD কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত আঁক।

এখন, BCD সমকোণ বলিয়া, BD কে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত C দিয়া যাইবে।

আবার, অর্ধবৃত্তস্থ ∠ADB সমকোণ বলিয়া, BD ব্যাসবিশিষ্ট BCD বৃত্তের D বিন্দুতে AD স্পর্শক।

$$\therefore AB.AC = AD^2$$
$$= AX^2 ।$$

টীকা। ∵ AB : AD = AD : DC, ∴ AB.AC = AD^2 ; ∴ AB.ACর বর্গমূল = AD। ∴ AB = 2 এবং AC = 3 হইলে, 2.3 বা 6 এর বর্গমূল হইবে ADর সাংখ্যমান ; সুতরাং AD কে মাপিয়া $\sqrt{6}$ এর সাংখ্যমান পাওয়া যাইবে। 6 এর উৎপাদক 1 ও 6 লইয়াও 6 এর বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। কিন্তু উৎপাদক দুইটিকে কাছাকাছি সংখ্যা লইলে অঙ্কনকার্যে সুবিধা হয়। যেমন, 18 এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে 4 ও 4·5 লওয়া সুবিধাজনক। ছক-কাগজের 1 ইঞ্চিকে 1 ধরিয়া অঙ্কন করিলে, স্কেলার দ্বারা মাপিয়া প্রথম দশমিক স্থান পর্যন্ত এবং কর্ণমাপনী দ্বারা মাপিয়া দ্বিতীয় দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল সঠিকভাবে পাওয়া যায়।

সম্পাদ্য 18

To draw a figure similar to a given figure, and equal to a given fraction of it in area.

[একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সহিত সদৃশ করিয়া এমন একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উহার ক্ষেত্রফল প্রথমটির ক্ষেত্রফলের কোন নির্দিষ্ট অংশের সমান হয়।]

ABCDE যেন একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র, যাহার সদৃশ আর একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে যেন উহার ক্ষেত্রফল প্রথমটির ক্ষেত্রফলের কোন নির্দিষ্ট অংশের (ধর যেন দুই-তৃতীয়াংশের) সমান হয়।

অঙ্কন। AB হইতে উহার দুই-তৃতীয়াংশ AP লও। AP এবং ABর মধ্য সমানুপাতী AB′ লও। ABCDE ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সহিত সদৃশ করিয়া AB′ এর উপর AB′C′D′E′ ঋজুরেখ ক্ষেত্রটি আঁক।

তাহা হইলে AB′C′D′E′ উদ্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ। অঙ্কনানুসারে, AB′C′D′E′ ও ABCDE ক্ষেত্রদ্বয় সদৃশ, AB′ ও AB উহাদের অনুরূপ বাহু এবং $AB'^2 = AP.AB$।

$$\therefore \frac{\text{ক্ষেত্র } AB'C'D'E'}{\text{ক্ষেত্র } ABCDE} = \frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{AP.AB}{AB^2} = \frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$$

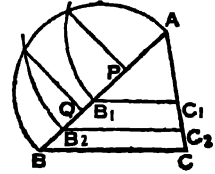
$\therefore$ ক্ষেত্র AB′C′D′E′ = ক্ষেত্র ABCDE এর $\frac{2}{3}$।

Exercise 18

1. Bisect a triangle by drawing a straight line parallel to the base. (C. U. 1916, '32, '50)

2. Trisect a triangle by drawing two straight lines parallel to the base.

মনে কর, ABC ত্রিভুজকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB কে P ও Q বিন্দুতে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর। AP ও ABর মধ্য সমানুপাতী AB_1 লও এবং AQ ও ABর মধ্য সমানুপাতী AB_2 লও। BCর সমান্তরাল B_1C_1 এবং B_2C_2 টান; উহারা যেন AC কে যথাক্রমে C_1 ও C_2 বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে ABC ত্রিভুজ B_1C_1 এবং B_2C_2 দ্বারা সমান তিন অংশে বিভক্ত হইবে। সম্পাদ্য 18 এর ন্যায় প্রমাণ কর।

টীকা। $AB_1{}^2 = AP.AB = \frac{1}{3}AB.AB$, $\therefore$ $AB_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}AB$;

$AB_2{}^2 = AQ.AB = \frac{2}{3}AB.AB$, $\therefore$ $AB_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}AB$.

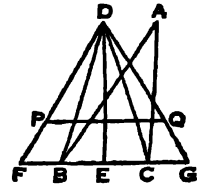
ইহা হইতে একটি ত্রিভুজের এক বাহুর সহিত সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে যে কোনও সংখ্যক সমান অংশে কিরূপে বিভক্ত করা যায় বলা চলে।

3. Trisect a circle by drawing two concentric circles.

4. Draw an equilateral triangle equal to a given triangle. (C. U. 1939)

মনে কর, ABC নির্দিষ্ট ত্রিভুজটির সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন। BCর সমদ্বিখণ্ডক লম্ব ED আঁক। ABC ত্রিভুজের সমান করিয়া DBC ত্রিভুজ আঁক। EDর দুই পার্শ্বে 30° পরিমিত EDF ও EDG কোণদ্বয় আঁক; বর্ধিত BC যেন DF ও DG কে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে DFG একটি সমবাহু ত্রিভুজ হইল। DF হইতে DF ও BCর মধ্য সমানুপাতী DP লও। BCর সমান্তরাল PQ টান; উহা যেন DG কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে DPQ উদ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। $\frac{\Delta DFG}{\Delta DPQ} = \frac{DF^2}{DP^2} = \frac{DF^2}{DF.BC} = \frac{DF}{BC} = \frac{FG}{BC}$

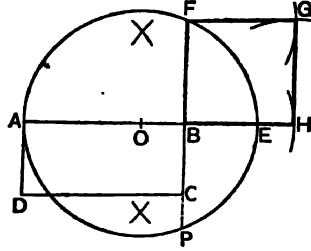
$= \frac{\Delta DFG}{\Delta DBC} = \frac{\Delta DFG}{\Delta ABC}$

$\therefore$ $\Delta ABC =$ সমবাহু ΔDPQ.

ক্ষেত্রফল বিষয়ক অঙ্কন

সম্পাদ্য 19

To construct a square equal in area to a given rectangle.

[একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।]

ABCD একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র। উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে BCর সমান করিয়া BE লও। AE কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন বর্ধিত CB কে F বিন্দুতে ছেদ করিল। BF এর উপর BFGH বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে BFGH উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ। BC কে বর্ধিত কর। উহা যেন বৃত্তটিকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

ABCD আয়তক্ষেত্র = AB.BC = AB.BE

= BF.BP

= BF^2 (∵ OB, FP জ্যা এর উপর লম্ব)

= BFGH বর্গক্ষেত্র।

অনুসিদ্ধান্ত। Construct a square equal in area to a given rectilineal figure.

[একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।]

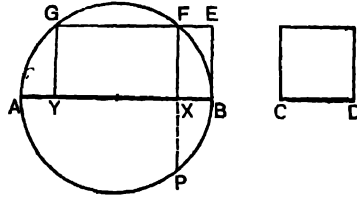
(C. U. 1860, 1907)

[**ইঙ্গিত :** প্রথমে ত্রিভুজে এবং তৎপর ত্রিভুজকে আয়তে পরিণত করিয়া লও।]

বর্গমূল নির্ণয়। সম্পাদ্য 19 এর সাহায্যে যে কোন সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। মনে কর, 3 এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। 3 = 3.1 ; সুতরাং সম্পাদ্য 19 এর চিত্রে AB = 3 এবং BE = 1 লইলে BF = $\sqrt{3}$ হইবে। BF কে মাপিয়া $\sqrt{3}$ এর মান পাওয়া যাইবে।

সম্পাদ্য 20

To divide a straight line *internally* into two segments so that the rectangle contained by them may be equal to a given square.

[একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।]

AB একটি সরলরেখা এবং CD নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহু। AB কে এমন দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র CDর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

অঙ্কন। AB কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। B বিন্দুতে ABর উপর CDর সমান করিয়া BE লম্ব টান।

E হইতে ABর সমান্তরাল EFG সরলরেখা টান। উহা যেন বৃত্তটিকে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল। F ও G হইতে ABর উপর FX ও GY লম্ব টান।

তাহা হইলে AB সরলরেখা X ও Y বিন্দুদ্বয়ের প্রত্যেকটিতে উদ্দিষ্ট দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইবে।

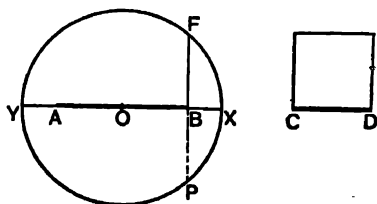
প্রমাণ। FX কে বর্ধিত কর। উহা যেন বৃত্তটিকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

$$AX.XB = FX.XP = FX^2 = BE^2 = CD^2 \text{।}$$

অনুরূপে, $AY.YB = CD^2$ ।

সম্পাদ্য 21

To divide a straight line *externally* into two segments so that the rectangle contained by them may be equal to a given square.

[একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।]

AB একটি সরলরেখা এবং CD নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহু। AB কে এমন দুই অংশে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র CDর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABর উপর CDর সমান করিয়া BF লম্ব টান। AB কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OF ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন বর্ধিত AB কে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB সরলরেখা X ও Y বিন্দুদ্বয়ের প্রত্যেকটিতে উদ্দিষ্ট দুই অংশে বহির্বিভক্ত হইবে।

প্রমাণ। FB কে বর্ধিত কর। উহা যেন বৃত্তটিকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

$$AX.XB = YB.BX = FB.BP = FB^2 = CD^2 \text{ ।}$$

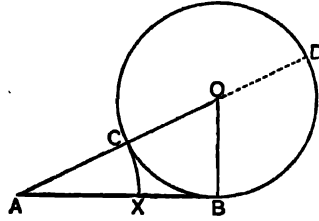
অনুরূপে, $AY.YB = CD^2$ ।

Exercise 19

1. Construct a square equal in area to a rectangle whose two adjacent sides are 1·2" and 2·7". Find a side of the square.
2. Construct a square equal in area to a given parallelogram.
3. Construct a square equal in area to a given triangle.
4. Find the square root of 6 to the first decimal place.
5. Divide a straight line externally into two segments such that the rectangle contained by them may be equal to the sum of two given squares.
6. Divide a straight line internally into two segments so that the rectangle contained by them may be equal to the difference of two given squares.

সম্পাদ্য 22

To divide a straight line *internally* into two parts so that the rectangle contained by the whole and one part may be equal to the square on the other part.

[একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন ঐ সরলরেখা ও উহার এক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।]

AB একটি সরলরেখা। ইহাকে এমন একটি বিন্দু Xএ অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AB.XB = AX^2$ হয়।

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABর উপর $\frac{1}{2}$ABর সমান করিয়া BO লম্ব টান। AO যোগ কর।

O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন AO কে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB হইতে ACর সমান করিয়া AX লও।

তাহা হইলে AB, X বিন্দুতে উদ্দিষ্ট দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত হইবে।

প্রমাণ। বর্ধিত AO যেন বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

$$AB.XB = AB(AB - AX)$$
$$= AB^2 - AB.AX$$
$$= AD.AC - AB.AX$$
$$= (AC + CD)AC - AB.AX$$
$$= (AX + AB)AX - AB.AX \quad \text{(অঙ্কন)}$$
$$= AX^2 ।$$

সম্পাদ্য 23

To divide a straight line *externally* into two parts so that the rectangle contained by the whole and one part may be equal to the square on the other part.

[একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন ঐ সরলরেখা ও উহার এক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।]

AB একটি সরলরেখা। ইহাকে এমন একটি বিন্দু Xএ বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AB.XB = AX^2$ হয়।

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABর উপর $\frac{1}{2}$ABর সমান করিয়া BO লম্ব টান।

AO যোগ কর।

O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; উহা যেন বর্ধিত AO কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। বর্ধিত BA হইতে ACর সমান করিয়া AX লও।

তাহা হইলে AB, X বিন্দুতে উদ্দিষ্ট দুই অংশে বহির্বিভক্ত হইবে।

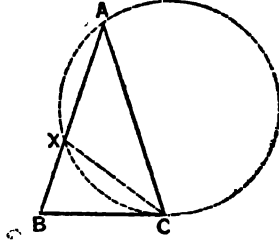
প্রমাণ। AO যেন বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

$$\begin{aligned} AB.XB &= AB(AB+AX) \\ &= AB^2 + AB.AX \\ &= AD.AC + AB.AX \\ &= (AC-CD)AC + AB.AX \\ &= (AX-AB)AX + AB.AX \qquad \text{(অঙ্কন)} \\ &= AX^2 \text{।} \end{aligned}$$

সংজ্ঞা। যদি একটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে এইরূপে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হয় যে, সমগ্র রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে সরলরেখাটি ঐ বিন্দুতে মাধ্যমিক ছেদে বিভক্ত (divided in medial or golden section) হইয়াছে বলা হয় এবং ঐ বিন্দুকে মাধ্যমিক ছেদবিন্দু (Point of medial section) বলে।

সম্পাদ্য 24

To construct an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the vertical angle.

[এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি শিরঃকোণের দ্বিগুণ হইবে।]

অঙ্কন। AB একটি সরলরেখা লও এবং উহাকে X বিন্দুতে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন $AB.XB = AX^2$ হয় (সম্পাদ্য 22)। B ও X কে কেন্দ্র করিয়া এবং AX ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। উহারা যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC যোগ কর।

তাহা হইলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। XC যোগ কর এবং A, X ও C দিয়া একটি বৃত্ত কল্পনা কর।

$\angle ABC = \angle CXB$ ($\because$ CB = CX)

$= \angle A + \angle ACX$ ($\because$ উহারা দূরবর্তী অন্তঃকোণ)

$= 2\angle A$ ($\because$ XC = XA)

আবার, $\because$ $AB.XB = AX^2 = BC^2$, (অঙ্কন)

$\therefore$ BC সরলরেখা AXC বৃত্তকে C বিন্দুতে স্পর্শ করে,

$\therefore$ $\angle BCX =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle A$।

$\therefore$ $\angle ACB = \angle BCX + \angle ACX$

$= \angle A + \angle A = 2\angle A$।

$\therefore$ ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য। $\because$ ABC ত্রিভুজের $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 2\angle A + 2\angle A = 5\angle A$, $\therefore$ $5\angle A = 180°$; $\therefore$ $\angle A = 36°$ এবং $\angle B = \angle C = 36° \times 2 = 72°$। সুতরাং 36° বা 72° পরিমিত কোণ অঙ্কন করিতে হইলে, এই সম্পাদ্যের অঙ্কন প্রণালী গ্রহণ করিতে হয়।

Exercise 20

1. Divide a right angle into five equal parts.
2. Construct angles of 18° and 9°.

ঘন জ্যামিতি

সংজ্ঞা

1. যাহার অবস্থিতি আছে কিন্তু দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নাই, তাহাকে **বিন্দু** (Point) বলে।

2. যাহার দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও বেধ নাই, তাহাকে **রেখা** (Line) বলে।

3. যাহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই, তাহাকে **তল** (Surface) বলে।

4. যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে, তাহাকে **ঘনবস্তু** (Solid) বলে। বৃক্ষ, জল, বায়ু প্রভৃতি যে সকল পদার্থ স্থান (Space) জুড়িয়া থাকে, তাহারাই ঘনবস্তু।

ঘনবস্তুর উপরিভাগ উহার তল। দুইটি ঘনবস্তুর সাধারণ সীমা উহাদের সাধারণ তল। যেমন, জল ও বায়ুর সাধারণ সীমা উহাদের সাধারণ তল।

5. কোনও ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের প্রত্যেকটিকে উহার **আয়তন** বা **মাত্রা** (Dimension) বলে।

বিন্দুর কোনও মাত্রা নাই এবং রেখার একটি, তলের দুইটি ও ঘনবস্তুর তিনটি মাত্রা।

6. ঘনবস্তুর সীমা তল, তলের সীমা রেখা এবং রেখার সীমা বিন্দু। দুইটি ঘনবস্তুর সাধারণ সীমা হইতে তলের উৎপত্তি, দুইটি তলের মিলন হইতে রেখার উৎপত্তি এবং দুইটি রেখার মিলন হইতে বিন্দুর উৎপত্তি।

পক্ষান্তরে, অসংখ্য বিন্দুর যোজনায় রেখার উৎপত্তি, অসংখ্য রেখার যোজনায় তলের উৎপত্তি এবং অসংখ্য তলের যোজনায় ঘনবস্তুর উৎপত্তি মনে করা যায়।

7. যে জ্যামিতিতে ঘনবস্তু ও উহার তল এবং দেশে (in space) অবস্থিত রেখা ও বিন্দুর ধর্ম সম্বন্ধে আলোচিত হয়, তাহাকে **ঘন জ্যামিতি** (Solid Geometry) বলে। ঘন জ্যামিতির আর এক নাম **তিন মাত্রাবিশিষ্ট জ্যামিতি** (Geometry of Three Dimensions)।

8. কোনও তলের যে কোনও দুই বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি ঐ তলের সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায়, তবে ঐ তলকে **সমতল** (Plane বা Plane surface) বলে।

সরলরেখাকে উভয় দিকে এবং সমতলকে সকলদিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত বলিয়া মনে করা হয়।

9. সমতলের সংজ্ঞা হইতে দেখা যায়,

(i) একটি সরলরেখা কোন সমতলের সহিত দুই বিন্দুতে মিলিত হইলে, উহা সমতলটির সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

(ii) একটি সরলরেখার এক অংশ এক সমতলে এবং অপর অংশ সমতলটির বাহিরে থাকিতে পারে না।

10. দুই বা ততোধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত থাকিলে অথবা উহাদের ভিতর দিয়া কোনও সমতল অঙ্কিত করিতে পারিলে, উহাদিগকে **একতলীয়** (Coplanar) সরলরেখা বলে।

11. দুইটি সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত না থাকিলে, অথবা দুইটি সরলরেখার ভিতর দিয়া কোনও সমতল অঙ্কিত করিতে না পারিলে, উহাদিগকে **অসমতলীয়** (Non-coplanar) বা **নৈকতলীয়** (Skew) সরলরেখা বলে।

দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা অসমান্তরাল এবং উহারা পরস্পরকে ছেদ করে না।

12. যদি একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু এক সমতলে এবং অপর দুইটি বাহু অপর এক সমতলে অবস্থিত থাকে, তবে উহাকে **নৈকতলীয় চতুর্ভুজ** বলে।

13. একটি সরলরেখা উভয়দিকে এবং একটি সমতল সকলদিকে উত্তরোত্তর বর্ধিত হইলেও যদি উহারা মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে **সমান্তরাল** (Parallel) বলে।

14. দুইটি সমতল সকলদিকে উত্তরোত্তর বর্ধিত হইলেও যদি উহারা মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে **সমান্তরাল** বলে।

15. কোন সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা যদি ঐ বিন্দু দিয়া ঐ সমতলে অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে প্রথমোক্ত সরলরেখাকে সমতলটির উপর **লম্ব** (Perpendicular) বলে।

16. কোন ওলন-সূতা অবাধে এবং নিশ্চলভাবে ঝুলিয়া থাকিলে উহার দিক বরাবরে অঙ্কিত সরলরেখাকে **উল্লম্ব রেখা** (Vertical line) বলে এবং উলম্ব রেখার সহিত লম্বভাবে অঙ্কিত সমতলকে **অনুভূম সমতল** (Horizontal plane) বলে।

অনুভূম সমতলে অঙ্কিত সরলরেখাকে **অনুভূম সরলরেখা** বলে।

17. সরলরেখা এবং সমতল বিষয়ক নিম্নলিখিত ধর্মগুলি মনে রাখিবে।

(1) একটি সরলরেখা একটি সমতলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

(2) কোন সমতলের উপর অবস্থিত যে কোন দুই বিন্দু সংযোজক সরলরেখা সমতলটির সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

(3) দুইটি বিন্দুর অথবা একটি সরলরেখার ভিতর দিয়া অসীম সংখ্যক সমতল অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

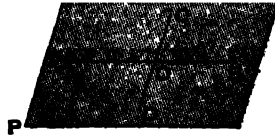
(4) দুইটি সমতলের একটি বিন্দু সাধারণ থাকিলে উহাদের অপর একটি বিন্দুও সাধারণ থাকিবে এবং উহারা পরস্পরকে ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখায় ছেদ করিবে।

(5) দুইটি সমতলের দুইএর অধিক বিন্দু সাধারণ থাকিলে এবং ঐ বিন্দুগুলি একরেখীয় না হইলে, সমতল দুইটি পরস্পরের সহিত মিলিয়া যাইবে।

(6) তিনটি বিন্দু একরেখীয় না হইলে উহাদের ভিতর দিয়া একটিমাত্র সমতল অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

স্বতঃসিদ্ধ 1

One and only one plane may be made to pass through any two intersecting straight lines.

[দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ভিতর দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল চালিত (বা অঙ্কিত) করা যাইতে পারে।]

মনে কর, AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

তাহা হইলে, স্বতঃসিদ্ধটি অনুসারে AB ও CD দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল PQ অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. One and only one plane may be made to pass **through a straight line and a point outside it.**

[একটি সরলরেখা ও উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল চালিত করা যায়।]

[কারণ, সরলরেখাটির ভিতর দিয়া চালিত একটি সমতলকে প্রয়োজন মত ঘুরাইয়া উহাকে বহিঃস্থ বিন্দুটির ভিতর দিয়া চালিত করা যায়।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. One and only one plane may be made to pass through three points not lying in a straight line.

[একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়, এরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল চালিত করা যায়।]

[কারণ, বিন্দুত্রয়ের যে কোন দুইটির ভিতর দিয়া চালিত একটি সমতলকে প্রয়োজন মত ঘুরাইয়া উহাকে তৃতীয় বিন্দুটির ভিতর দিয়া চালিত করা যায়।]

অনুসিদ্ধান্ত 3. One and only one plane may be made to pass through two parallel straight lines.

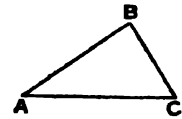
[দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ভিতর দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল চালিত করা যায়।]

[সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের একটির ভিতর দিয়া চালিত একটি সমতলকে প্রয়োজন মত ঘুরাইয়া উহাকে অপরটির ভিতর দিয়া চালিত করা যায়, কারণ সংজ্ঞানুসারে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত।]

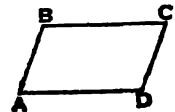
Exercise 1

1. The three sides of a triangle are co-planar.

[ত্রিভুজের তিন বাহু একতলীয়।] (C. U. Int. 1911)

[ABC একটি ত্রিভুজ। AB এবং ACর ভিতর দিয়া একটি সমতল আঁক (স্বতঃসিদ্ধ 1)। এখন B এবং C, এই সমতলের উপর অবস্থিত বলিয়া BC বাহু সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। ∴ ত্রিভুজটির তিন বাহু একতলীয়।]

2. The sides of a parallelogram are co-planar.

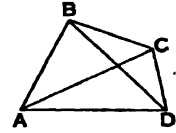
[সামান্তরিকের বাহুগুলি একতলীয়।]

[ABCD একটি সামান্তরিক। AB ও CD সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের ভিতর দিয়া একটি সমতল আঁক (অনুসিদ্ধান্ত 3)। এখন, সমতলটির উপর A ও D এবং B ও C অবস্থিত বলিয়া, AD এবং BC ঐ সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। ∴ সামান্তরিকটির বাহুগুলি একতলীয়।]

3. The sides of a trapezium are co-planar.

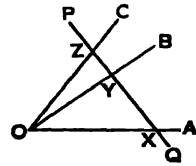
[ট্রাপিজিয়মের বাহুগুলি একতলীয়।]

4. If the diagonals of a quadrilateral intersect one another, then the sides of the quadrilateral are co-planar with the diagonals.

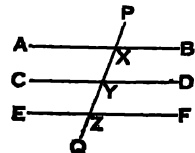
[কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করিলে চতুর্ভুজটির বাহুগুলি কর্ণদ্বয়ের সহিত একতলীয় হইবে।]

[পরস্পরচ্ছেদী AC ও BD দিয়া একটি সমতল আঁক (স্বতঃসিদ্ধ 1)। এখন, A, B, C এবং D এই সমতলের উপর অবস্থিত বলিয়া, AB, BC, CD এবং AD ঐ সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। ∴ চতুর্ভুজটির বাহুগুলি এবং কর্ণদ্বয় একতলীয়।]

5. Any number of concurrent straight lines having a transversal are co-planar. (C. U. Int. 1954)

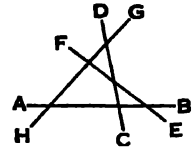
[কতকগুলি সমবিন্দু সরলরেখার একটি ছেদক থাকিলে উহারা একতলীয়।]

[PQ ছেদক সমবিন্দু OA, OB এবং OC সরলরেখাকে যথাক্রমে X, Y এবং Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ এবং O দিয়া একটি সমতল আঁক (অনুসিদ্ধান্ত 1)। এখন, OA-র O এবং X ঐ সমতলটির উপর অবস্থিত; ∴ OA, সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। অনুরূপে, OB এবং OC ঐ সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। ∴ সরলরেখাগুলি একতলীয়।]

6. Three or more parallel straight lines having a common transversal are co-planar. (C. U. Int. 1915, '21, '27)

[তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখার একটি সাধারণ ছেদক থাকিলে, উহারা একতলীয়।]

[PQ ছেদক AB, CD ও EF সমান্তরাল সরলরেখাত্রয়কে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB ও PQ দিয়া একটি সমতল আঁক (স্বতঃসিদ্ধ 1)। এখন, ∵ CD ∥ AB এবং CD-র উপর অবস্থিত Y বিন্দু, অঙ্কিত সমতলটির উপর অবস্থিত, ∴ CD, ঐ সমতলের সহিত মিলিয়া যাইবে। অনুরূপে EF, ঐ সমতলের সহিত মিলিয়া যাইবে। ∴ সমান্তরাল সরলরেখাত্রয় একতলীয়।]

7. If each of four or more straight lines intersect each of the other, then the straight lines are co-planar. (C. U. Int. 1912)

[চারি বা ততোধিক সরলরেখার প্রত্যেকটি অপরগুলিকে ছেদ করিলে, সরলরেখাগুলি একতলীয়।]

[AB, CD, EF এবং GH সরলরেখা চতুষ্টয়ের প্রত্যেকটি অপর তিনটিকে ছেদ করিয়াছে। AB এবং CD দিয়া একটি সমতল আঁক (স্বতঃসিদ্ধ 1)। এখন, EF সরলরেখা AB এবং CD এর প্রত্যেককে ছেদ করে বলিয়া, EF এর উপর অবস্থিত ঐ ছেদবিন্দুদ্বয় সমতলটির উপর অবস্থিত ; ∴ EF, সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। অনুরূপে GH, ঐ সমতলটির সহিত মিলিয়া যাইবে। ∴ সরলরেখাগুলি একতলীয়।]

8. Through a given point draw a straight line intersecting two given skew lines. (C. U. Int. 1912)

[একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুইটি নির্দিষ্ট নৈকতলীয় সরলরেখার একটি ছেদক অঙ্কিত কর।]

[O যেন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB ও CD যেন দুইটি নির্দিষ্ট নৈকতলীয় সরলরেখা। O এবং AB দিয়া একটি সমতল আঁক (অনুসিদ্ধান্ত 1); উহা যেন CD কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে O, AB এবং E ঐ সমতলে অবস্থিত। ∴ O এবং E বিন্দুদ্বয় সংযোজক OE সরলরেখা AB কে কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিবে। ∴ OE উদ্দিষ্ট সরলরেখা।]

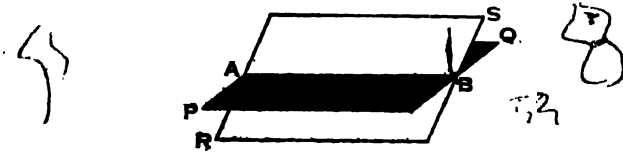
9. Draw a straight line intersecting three given skew lines. (C. U. Int. 1911, '13)

[তিনটি নির্দিষ্ট নৈকতলীয় সরলরেখার একটি ছেদক অঙ্কিত কর।]

[AB, CD এবং EF যেন তিনটি নৈকতলীয় সরলরেখা। AB দিয়া একটি সমতল আঁক। সমতলটিকে ABর চারিদিকে এরূপে ঘুরাও যেন উহা CD ও EF কে P ও Q এমন দুই বিন্দুতে ছেদ করে যেন PQ, ABর সমান্তরাল না হয়। তাহা হইলে AB, P এবং Q একতলীয় বলিয়া বর্ধিত PQ, AB কে কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিবে। ∴ PQ উদ্দিষ্ট সরলরেখা।]

স্বতঃসিদ্ধ 2

Two intersecting planes cut one another in a straight line and in no point outside it.

[দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল পরস্পরকে একটি সরলরেখায় ছেদ করে এবং সরলরেখাটির বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে ছেদ করে না।]

মনে কর, PQ এবং RS দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল।

তাহা হইলে স্বতঃসিদ্ধটি অনুসারে উহারা পরস্পরকে AB সরলরেখায় ছেদ করিবে এবং ABর বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না।

Exercise 2

1. Planes passing through a point intersect one another in concurrent straight lines.

[একবিন্দুগামী সমতলসমূহ পরস্পরকে একবিন্দুগামী সরলরেখাসমূহে ছেদ করে।]

[মনে কর, AB, CD এবং EF সমতলত্রয় O বিন্দুগামী। এখন, AB ও CDর O সাধারণ বিন্দু। সুতরাং AB ও CD পরস্পরকে যে সরলরেখায় ছেদ করে, তাহা O বিন্দুগামী। অনুরূপে AB ও EF এবং CD ও EF পরস্পরকে যে সরলরেখাদ্বয়ে ছেদ করে, তাহারাও O বিন্দুগামী। ∴ ছেদক সরলরেখাত্রয় O বিন্দুগামী।]

2. Common sections of three planes meet at a point.

(C. U. Int. 1911)

[যদি তিনটি সমতল, দুই দুইটি করিয়া, পরস্পরকে তিন সরলরেখায় ছেদ করে, তবে সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু।]

[মনে কর, AB, CD ও EF তিনটি সমতল এবং উহাদের AB ও CD সমতলদ্বয় পরস্পরকে XY সরলরেখায় ছেদ করে। এখন, যদি EF সমতল এবং XY সরলরেখায়

সমান্তরাল না হয়, তবে EF সমতল XY সরলরেখাকে কোন এক বিন্দু O তে ছেদ করিবে এবং সমতল তিনটিই O বিন্দুগামী হইবে। ∴ সমতল তিনটি পরস্পরকে O বিন্দুগামী তিনটি সরলরেখায় ছেদ করিবে (প্রশ্ন 1)।]

3. A plane intersects two other parallel planes in parallel straight lines.

[একটি সমতল অপর দুইটি সমান্তরাল সমতলকে যে দুই সরলরেখায় ছেদ করে, তাহারা সমান্তরাল।]

[মনে কর, AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সমতল এবং EF সমতল AB কে PQ সরলরেখায় এবং CD কে RS সরলরেখায় ছেদ করে। এখন, AB ও CD সমতলদ্বয় সমান্তরাল ; কাজেই AB সমতলের উপর অবস্থিত PQ সরলরেখার এবং CD সমতলের উপর অবস্থিত RS সরলরেখার কোন সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে না। ∴ PQ এবং RS পরস্পরের সহিত মিলিত হইতে পারে না। অধিকন্তু PQ এবং RS একই EF সমতলের উপর অবস্থিত ; ∴ PQ ∥ RS.]

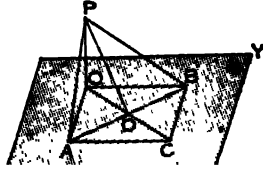
4. Two planes, drawn one through each of two parallel straight lines, cut one another in a straight line parallel to the two parallel lines.

[দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার প্রত্যেকটির ভিতর দিয়া একটি করিয়া দুইটি সমতল আঁকিলে উহারা যে সরলরেখায় ছেদ করে, তাহা সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির সহিত সমান্তরাল।] (C. U. Int. 1922)

[মনে কর, AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং AB ও CD দিয়া যথাক্রমে অঙ্কিত EF ও GH সমতলদ্বয় পরস্পরকে PQ সরলরেখায় ছেদ করে। এখন, AB ∥ CD, ∴ AB দিয়া অঙ্কিত EF সমতল ∥ CD. আবার, EF সমতলের উপর PQ অবস্থিত, ∴ PQ এবং CD পরস্পরের সহিত মিলিত হইতে পারে না। অধিকন্তু PQ এবং CD একই GH সমতলের উপর অবস্থিত ; ∴ PQ ∥ CD. অনুরূপে PQ ∥ AB.]

উপপাদ্য 1

If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, it is also perpendicular to the plane in which they lie.

[যদি কোন সরলরেখা দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদ বিন্দুতে প্রত্যেকটির উপর লম্ব হয়, তবে উহাদের সমতলের উপরও লম্ব হইবে ।]

মনে কর, OP সরলরেখা OA ও OB সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটির উপর লম্ব ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OP সরলরেখা, OA এবং OBর সমতলের উপর লম্ব ।

OA ও OB যেন XY সমতলে অবস্থিত। XY সমতলে যে কোন সরলরেখা OC টান এবং ঐ সমতলে OAর সমান্তরাল CB এবং OBর সমান্তরাল CA টান। AB যোগ কর; উহা যেন OC কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। PA, PD ও PB যোগ কর।

প্রমাণ। OACB একটি সামান্তরিক (অঙ্কন); ∴ উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু D, ABর মধ্যবিন্দু;

∴ PD, PAB ত্রিভুজের একটি মধ্যমা,

∴ $PA^2+PB^2=2(PD^2+AD^2)$ ··· (i)

আবার, OD, OAB ত্রিভুজের একটি মধ্যমা,

∴ $OA^2+OB^2=2(OD^2+AD^2)$ ··· (ii)

∴ (i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$(PA^2-OA^2)+(PB^2-OB^2)=2(PD^2-OD^2)$ ··· (iii)

এখন, ∵ ∠POA এবং ∠POB সমকোণ,

∴ $PA^2-OA^2=OP^2$ এবং $PB^2-OB^2=OP^2$

∴ (iii) হইতে, $2OP^2=2(PD^2-OD^2)$ বা, $OP^2=PD^2-OD^2$

∴ $OP^2+OD^2=PD^2$, ∴ ∠POD = 1 সমকোণ।

∴ PO, ODর উপর লম্ব; কিন্তু OD, XY সমতলের উপর অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা।

∴ OA ও OBর সমতল XYর উপর PO লম্ব।

Exercise 3

1. Draw a plane through a given point perpendicular to a given straight line.

[একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব করিয়া একটি সমতল অঙ্কিত কর।]

[X যেন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ যেন নির্দিষ্ট সরলরেখা। PQর উপর XO লম্ব আঁক। O বিন্দুতে PQর উপর অপর যে কোন লম্ব OY আঁক। OX এবং OY দিয়া একটি সমতল আঁক। উহাই উদ্দিষ্ট সমতল হইবে ; কারণ, OX এবং OY এর প্রত্যেকে PQর উপর লম্ব বলিয়া, অঙ্কিত সমতল, PQর উপর লম্ব হইবে।]

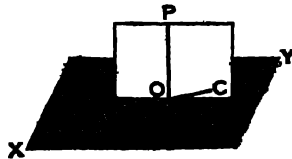
2. Through a given point three straight lines can be drawn in space so that each is perpendicular to the plane of the other two.

[একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন তিনটি সরলরেখা টানা যায় যে, উহাদের প্রত্যেকটি অপর দুইটির সমতলের উপর লম্ব।]

[নির্দিষ্ট O বিন্দুগামী যে কোনও XY সমতলে OA এবং OB দুইটি পরস্পর লম্বরেখা আঁক। OA এবং OBর উপর লম্ব করিয়া OC আঁক। তাহা হইলে, OA, OB এবং OCর প্রত্যেকে অপর দুইটির সমতলের উপর লম্ব হইবে; কারণ, উহাদের প্রত্যেকে অপর দুইটির উপর উহাদের ছেদবিন্দুতে লম্ব।]

উপপাদ্য 2

All straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are co-planar.

[একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে সরলরেখাটির উপর অঙ্কিত যাবতীয় লম্ব একতলীয়।]

মনে কর, OP সরলরেখার O বিন্দুতে OPর উপর OA, OB এবং OC লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OA, OB এবং OC একতলীয়।

প্রমাণ। মনে কর, OA এবং OBর সমতল XY, OP এবং OCর সমতলকে ON সরলরেখায় ছেদ করে।

এখন, OA ও OB, OPর উপর লম্ব এবং OA ও OBর সমতলের উপর ON অবস্থিত। ∴ ∠PON = 1 সমকোণ, কিন্তু কল্পনানুসারে ∠POC = 1 সমকোণ;

∴ PON ও POC কোণদ্বয় পরস্পর সমান, এবং উহারা একই সমতলে অবস্থিত;

∴ OC, ON এর সহিত মিলিয়া যাইবে, কাজেই উহা OA ও OBর সহিত একতলীয় হইবে।

এইরূপ, OP সরলরেখার O বিন্দুতে OPর উপর অঙ্কিত যে কোন লম্ব OA এবং OBর সমতলে থাকিবে।

অনুসিদ্ধান্ত। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে সরলরেখাটির সহিত লম্ব করিয়া একটিমাত্র সমতল আঁকা যাইতে পারে।

Exercise 4

1. How many horizontal lines can be drawn through a given point of a vertical line, and how do they lie?

(C. U. Int. 1916)

[একটি নির্দিষ্ট উল্লম্ব রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কতগুলি অনুভূম সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় এবং উহারা কিরূপভাবে অবস্থিত থাকে?]

[অনুভূম রেখা উল্লম্ব রেখার উপর লম্ব এবং উল্লম্ব রেখার কোন বিন্দুতে রেখাটির উপর অসংখ্য লম্ব আঁকা যাইতে পারে। সুতরাং কোন নির্দিষ্ট উল্লম্ব রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অসংখ্য অনুভূম সরলরেখা আঁকা যাইতে পারে। আবার এই অসংখ্য অনুভূম রেখার প্রত্যেকে নির্দিষ্ট উল্লম্ব রেখাটির উপর লম্ব বলিয়া উহারা একতলীয় অর্থাৎ একই সমতলে অবস্থিত।]

2. If a triangle revolves about its base, show that the vertex describes a circle.

[একটি ত্রিভুজ উহার ভূমির চারি পার্শ্বে ঘুরিতে থাকিলে উহার শীর্ষ একটি বৃত্ত উৎপন্ন করিবে।]

(C. U. Int. 1919)

[মনে কর, ABC ত্রিভুজের BC ভূমি এবং A শীর্ষ। BCর উপর AD লম্ব আঁক। এখন, BC ভূমির চারি পার্শ্বে ত্রিভুজটি ঘুরিতে থাকিলে ত্রিভুজটির সমুদয় অবস্থানে AD, BCর উপর D বিন্দুতে লম্ব থাকিবে। ∴ AD, উহার সমুদয় অবস্থানে একই সমতলে

অবস্থিত থাকিবে। সুতরাং A, D হইতে সতত সমান দূরে থাকিয়া একই সমতলে বিচরণ করে বলিয়া, A একটি বৃত্ত উৎপন্ন করিবে, যাহার কেন্দ্র হইবে D এবং ব্যাসার্ধ হইবে AD.]

3. Straight lines drawn perpendicular from a given point to a system of parallel straight lines in space are co-planar.

[কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বগুলি একতলীয়।] (C. U. Int. 1927)

[মনে কর, নির্দিষ্ট O বিন্দু হইতে AB, CD এবং EF সমান্তরাল সরলরেখাত্রয়ের উপর যথাক্রমে OP, OQ এবং OR লম্ব। O দিয়া এবং সমান্তর সরলরেখাগুলির সহিত সমান্তরাল করিয়া GH আঁক। তাহা হইলে, O বিন্দুতে GH সরলরেখার উপর OP, OQ এবং OR লম্ব হইবে। ∴ OP, OQ এবং OR একতলীয়।]

4. Find the locus of points in space equidistant from two given points.

[দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।]
(C. U. Int. 1915, '23, '39, '47)

[মনে কর, A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P, Q, R,⋯ বিন্দুগুলি A এবং B হইতে সমদূরবর্তী। AB যোগ করিয়া উহাকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। AP, AQ, AR,⋯, BP, BQ, BR,⋯ এবং OP, OQ, OR,⋯ যোগ কর। এখন, PAO এবং PBO ত্রিভুজদ্বয়ের PA = PB, OA = OB এবং PO = PO ; ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠POA = ∠POB = 1 সমকোণ ; ∴ PO, ABর উপর O বিন্দুতে লম্ব। অনুরূপে, QO, RO,⋯, ABর উপর O বিন্দুতে লম্ব ; ∴ PO, QO, RO,⋯ এরূপ সমতলের উপর অবস্থিত যাহা AB কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং উহাই A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ।]

5. There can be only one point in a straight line equidistant from two points in space outside the straight line.

[একটি সরলরেখার বহিঃস্থ দুইটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটিমাত্র বিন্দু সরলরেখাটিতে থাকিতে পারে।]

6. Find the locus of points in space equidistant from three given non-collinear points.

[একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এইরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।] (C. U. Int. 1941)

[নির্দিষ্ট বিন্দু তিনটি যেন A, B ও C. AB, BC ও AC যোগ কর। তাহা হইলে ABC একটি ত্রিভুজ, যাহার বাহুগুলি একতলীয় (প্রশ্ন 1, পৃ: 51)। AB কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া PQ সমতল আঁক। BC কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া RS সমতল আঁক। সমতলদ্বয় যেন পরস্পরকে XY সরলরেখায় ছেদ করে। তাহা হইলে XY নির্ণেয় সঞ্চারপথ (প্রশ্ন 4 দেখ।), যাহা ত্রিভুজটিকে উহার লম্ববিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।]

7. The straight line joining any point in space, equidistant from the angular points of a right-angled triangle, with the middle point of the hypotenuse is perpendicular to the plane of the triangle.

[সমকোণী ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সহিত অতিভুজটির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে উৎপন্ন সরলরেখা ত্রিভুজটির সমতলের উপর লম্ব হইবে।]

[ইঙ্গিত : অতিভুজের মধ্যবিন্দু সমকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। প্রশ্ন 6 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।]

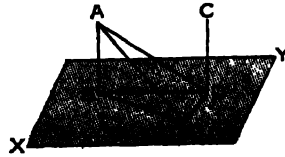
8. There can be only one point in a plane equidistant from three points outside the plane. State the exceptional case, if any.

[একটি সমতলের বহিঃস্থ তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটিমাত্র বিন্দু সমতলটিতে থাকিতে পারে। কিরূপস্থলে উহার ব্যতিক্রম ঘটিবে ?]

[প্রশ্ন 6 এর সাহায্যে প্রমাণ কর।] (C. U. Int. 1933)

উপপাদ্য 3

If two straight lines are parallel and if one of them is perpendicular to a plane then the other is also perpendicular to the same plane.

[দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি যদি কোন সমতলের উপর লম্ব হয়, তবে অপরটিও ঐ সমতলের উপর লম্ব হইবে।]

মনে কর, AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় XY সমতলকে B ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং সমতলটির উপর AB লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, XY সমতলের উপর CDও লম্ব।

BD যোগ কর। BDর উপর XY সমতলে DE লম্ব টান;

AD, AE ও BE যোগ কর।

প্রমাণ। ∵ B দিয়া অঙ্কিত BD ও BE একই XY সমতলে অবস্থিত এবং B বিন্দুতে BDর উপর AB লম্ব,

∴ BEর উপর AB লম্ব, ∴ ∠ABE সমকোণ;

$\therefore\ AE^2 = AB^2 + BE^2$

$= AB^2 + BD^2 + DE^2$ (∵ অঙ্কনানুসারে BDE সমকোণ)

$= AD^2 + DE^2$ (∵ কল্পনা হইতে, ABD সমকোণ)

∴ ∠ADE সমকোণ, এবং অঙ্কনানুসারে ∠BDE সমকোণ;

∴ AD ও BDর সমতলের উপর DE লম্ব।

এখন, AD ও BDর ছেদক AB বলিয়া এবং ABর সমান্তরাল CD বলিয়া, AB এবং CD, AD এবং BDর সমতলে অবস্থিত; ∴ DEর উপর CD লম্ব।

আবার, একই সমতলে অবস্থিত AB এবং CD সমান্তরাল (কল্পনা) এবং ∠ABD সমকোণ, ∴ ∠CDB সমকোণ; ∴ DBর উপর CD লম্ব।

∴ D দিয়া অঙ্কিত DE ও DBর উপর CD লম্ব।

কিন্তু DE ও DB, XY সমতলে অবস্থিত;

∴ XY সমতলের উপর CDও লম্ব।

Exercise 5

1. If two straight lines are both perpendicular to the same plane, they are parallel.

[দুইটি সরলরেখা একই সমতলের উপর লম্ব হইলে উহারা সমান্তরাল হইবে। (উপ. 3 এর বিপরীত উপপাদ্য।)]

মনে কর, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় XY সমতলকে B ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং উভয়েই সমতলটির উপর লম্ব (উপ. 3 এর চিত্র)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

BD যোগ কর। BDর উপর XY সমতলে DE লম্ব টান।

AD, AE ও BE যোগ কর।

প্রমাণ। $AE^2 = AB^2 + BE^2$ (∵ কল্পনা হইতে, ABE সমকোণ)

$= AB^2 + BD^2 + DE^2$ (∵ অঙ্কনানুসারে BDE সমকোণ)

$= AD^2 + DE^2$ (∵ কল্পনা হইতে, ABD সমকোণ)

∴ $\angle ADE$ সমকোণ।

আবার, কল্পনানুসারে $\angle BDE$ সমকোণ এবং কল্পনা হইতে $\angle CDE$ সমকোণ;

∴ D বিন্দুতে EDর উপর AD, BD ও CD লম্ব

∴ AD ও BDর সমতলে CD অবস্থিত।

আবার, AD ও BDর সমতলে AB অবস্থিত (∵ ADB একটি ত্রিভুজ)

∴ AB ও CD একই সমতলে অবস্থিত,

এবং কল্পনা হইতে ABD এবং CDB কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে সমকোণ;

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

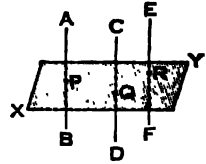
2. Only one perpendicular can be drawn to a plane from a point outside or inside the plane.

[কোন সমতলের বহিঃস্থ বা অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে সমতলটির উপর একটিমাত্র লম্ব টানা যাইতে পারে।]

[মনে কর, XY একটি সমতল এবং O, উহার বহিঃস্থ বা অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। যদি সম্ভব হয়, তবে মন কর যেন XY সমতলের উপর OP এবং OQ দুইটি লম্ব। তাহা হইলে প্রশ্ন 1 অনুসারে OP এবং OQ সমান্তরাল, যাহা অসম্ভব কারণ উহারা পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা। ∴ কোন সমতলের বহিঃস্থ বা অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে সমতলটির উপর একটিমাত্র লম্ব টানা যাইতে পারে।]

3. Straight lines in space which are parallel to a given straight line are parallel to one another.

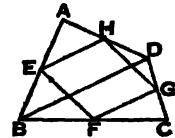
[যে সকল সরলরেখা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমান্তরাল, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।] (C. U. Int 1922, '29, '35)

[মনে কর, CD ও EF সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট AB সরলরেখার সহিত সমান্তরাল। ABর সহিত লম্বভাবে XY সমতল আঁক। উহা যেন AB, CD ও EF কে যথাক্রমে P, Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, ∵ AB ॥ CD এবং AP, XY সমতলের উপর লম্ব, ∴ CQ, XY সমতলের উপর লম্ব (উপ. 3)। অনুরূপে ER, XY সমতলের উপর লম্ব।

∴ CQ এবং ER উভয়েই একই XY সমতলের উপর লম্ব।

∴ CQ ॥ ER অর্থাৎ CD ॥ EF (প্রশ্ন 1)।]

4. If the middle points of the sides of a skew quadrilateral are joined in order, the figure so formed is a parallelogram on a plane.

[একটি নৈকতলীয় চতুর্ভুজের মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে একটি একতলীয় সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।] (A. U. 1916)

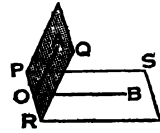
[মনে কর, ABCD একটি নৈকতলীয় চতুর্ভুজ এবং E, F, G ও H যথাক্রমে AB, BC, CD ও ADর মধ্যবিন্দু। EF, FG, GH, EH ও BD যোগ কর। এখন, ABD একটি ত্রিভুজ, যাহার বাহুগুলি একতলীয় (প্রশ্ন 1, Ex. 1) এবং E, ABর ও H, ADর মধ্যবিন্দু;

∴ EH ॥ BD এবং EH = $\frac{1}{2}$BD. অনুরূপে, FG ॥ BD এবং FG = $\frac{1}{2}$BD.

∴ EH = FG এবং EH ও FG এর প্রত্যেকে BDর সমান্তরাল বলিয়া EH ॥ FG (প্রশ্ন 3); ∴ EFGH একটি সামান্তরিক এবং উহা একতলীয় (অনুসিদ্ধান্ত 3, স্বতঃসিদ্ধ 1)।]

তলকোণ

18. দুইটি সমতল পরস্পরকে যে সরলরেখায় ছেদ করে, তাহার যে কোন বিন্দু হইতে সরলরেখাটির সহিত লম্ব করিয়া সমতল দুইটিতে দুইটি সরলরেখা আঁকিলে এই সরলরেখাদ্বয় যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে ঐ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ বলে।

দুইটি সমতল পরস্পরকে ছেদ করিলে উহাদের অন্তর্গত যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে **তলকোণ** (Dihedral angle) বলে।

PQ এবং RS সমতলদ্বয় পরস্পরকে PR সরলরেখায় ছেদ করিয়াছে। PR এর যে কোন বিন্দু O হইতে PR এর সহিত লম্ব করিয়া PQ সমতলে OA এবং RS সমতলে OB সরলরেখাদ্বয় টানায় AOB কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। তাহা হইলে $\angle AOB$, PQ এবং RS সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ।

আবার, OA এবং OB উভয়েই PR এর উপর O বিন্দুতে লম্ব বলিয়া OA এবং OBর সমতল, PR এর উপর লম্ব। সুতরাং কোন সমতল দ্বারা PR কে লম্বভাবে ছেদ করিলে PQ এবং RS সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত তলকোণ পাওয়া যায়।

দুইটি সমতল পরস্পরকে ছেদ করিলে চারিটি তলকোণ উৎপন্ন হয়। স্পষ্টতঃই বিপ্রতীপ তলকোণগুলি পরস্পর সমান এবং দুইটি সন্নিহিত তলকোণ একত্রযোগে দুই সমকোণ।

19. একটি সরলরেখা একটি সমতলকে ছেদ করিলে সরলরেখাটি, ঐ ছেদবিন্দু এবং সরলরেখাটির যে কোন বিন্দু হইতে সমতলটির উপর পতিত লম্বের পাদবিন্দু এই দুইএর সংযোজক সরলরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে প্রথমোক্ত সরলরেখার এবং সমতলটির অন্তর্গত কোণ বলে।

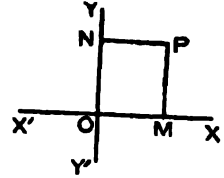
AB সরলরেখার ও XY সমতলের B ছেদবিন্দু, এবং ABর যে কোন বিন্দু O হইতে সমতলটির উপর পতিত লম্বের C পাদবিন্দু। AB সরলরেখা BCর সহিত যে ABC কোণ উৎপন্ন করিয়াছে, তাহাই AB ও XY সমতলের অন্তর্গত কোণ।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

(Co-ordinate Geometry)

[দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

1. গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় বীজগণিতের সাহায্যে সামতলিক জ্যামিতির বিষয়বস্তু আলোচিত হয়, তাহাকে **স্থানাঙ্ক জ্যামিতি** (Co-ordinate Geometry) বলে।

2. (i) **স্থানাঙ্ক।** কাগজের সমতলে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা XOX′ এবং YOY′ পরস্পরকে O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ঐ সমতলে অবস্থিত P একটি বিন্দু। P হইতে XOX′ এর উপর PM এবং YOY′ এর উপর PN লম্ব। তাহা হইলে PM ও PN এর দৈর্ঘ্য, XOX′ ও YOY′ সম্পর্কে P র স্থান বা অবস্থানকে সঠিক-ভাবে নির্দেশ করিতেছে। এইজন্য PM ও PN এর দৈর্ঘ্যদ্বয়কে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়।

কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিবার জন্য বিন্দুটির সহিত একই সমতলে অবস্থিত যে দুইটি সরলরেখা XOX′ এবং YOY′ লওয়া হয়, তাহাদিগকে **অক্ষ** (Axis) বলে। অক্ষদ্বয়ের ভিতর XOX′ কে **x-অক্ষ** (x-axis) এর YOY′ কে **y-অক্ষ** (y-axis) বলে। অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O কে **মূলবিন্দু** (Origin) বলে।

অক্ষদ্বয় হইতে কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়কে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক** (co-ordinates) বলে। Y-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব NP বা OM কে P বিন্দুর **x-স্থানাঙ্ক** (x-co-ordinate) বা **ভুজ** (abscissa) বলে। x-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব MP বা ON কে P বিন্দুর **y-স্থানাঙ্ক** (y-co-ordinate) বা **কোটি** (ordinate) বলে।

কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটিকে যথাক্রমে বিন্দুটির x ও y বলা হয়। যেমন, ভুজ $=a$ এবং কোটি $=b$ হইলে, P বিন্দুটির $x=a$ এবং $y=b$. যে বিন্দুর $x=a$ এবং $y=b$, তাহার স্থানাঙ্ক (a, b) এবং বিন্দুটিকে সংক্ষেপে (a, b) বিন্দু বলা হয়। ভুজ ও

কোটির ভিতর আগে ভুজ পরে কোটি লেখা হয়। সুবিধার জন্য x-অক্ষকে অনুভূমিক-ভাবে (horizontally) এবং y-অক্ষকে উল্লম্বভাবে (vertically) লওয়া হয়।

(ii) **পাদ।** XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় দ্বারা কাগজের সমতল XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX এই চারি অংশে বিভক্ত হইয়াছে। ইহাদিগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পাদ (Quadrant) বলে।

(iii) **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক স্থানাঙ্ক।** PM ও PN এর শুধু সাংখ্যমান জানা থাকিলেই P বিন্দুর অবস্থান সঠিকভাবে নির্ণয় করা চলে না; কারণ, x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে PM ও PN দূরত্বে চারিটি বিন্দু চারিটি পাদে থাকিতে পারে। তজ্জন্য,

(1) YOY′ বা y-অক্ষের ডানদিকে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজকে ধনাত্মক এবং উহার বামদিকে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজকে ঋণাত্মক ধরা হয়।

কাজেই প্রথম ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক।

(2) XOX′ বা x-অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর কোটিকে ধনাত্মক এবং উহার নীচের দিকে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর কোটিকে ঋণাত্মক ধরা হয়।

কাজেই প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক।

সুতরাং P বিন্দুর ভুজ x এবং কোটি y হইলে, বিভিন্ন পাদে উহাদের চিহ্ন নিম্নলিখিতরূপ হইবে।

P	প্রথম পাদ	দ্বিতীয় পাদ	তৃতীয় পাদ	চতুর্থ পাদ
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

কাজেই P বিন্দুর ভুজ ও কোটির সাংখ্যমান এবং চিহ্ন জানা থাকিলে, P বিন্দুর অবস্থান সঠিকভাবে নির্ণয় করা চলে।

মূলবিন্দুর ভুজ এবং কোটি উভয়েই 0.

x-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর কোটি 0 এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ 0.

3. **সমকৌণিক এবং তির্যক স্থানাঙ্ক।** অক্ষদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিলে, ঐ অক্ষদ্বয়কে সমকৌণিক (Rectangular) অক্ষ বলে এবং যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ককে সমকৌণিক স্থানাঙ্ক বলে।

অক্ষদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ না করিলে, ঐ অক্ষদ্বয়কে তির্যক (Oblique) অক্ষ বলে এবং যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ককে তির্যক স্থানাঙ্ক বলে।

উভয় প্রকারের স্থানাঙ্কের আবিষ্কারক Des Cartes এবং তাহার নামানুসারে ঐ উভয় প্রকারের স্থানাঙ্ককে Cartesian স্থানাঙ্ক বলে।

তির্যক স্থানাঙ্ক পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত। তজ্জন্য তির্যক স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে এস্থলে আলোচিত হইবে না।

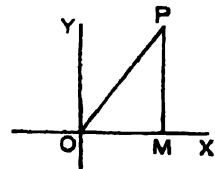
4. **সরলরেখার অংশসমূহের দৈর্ঘ্য** (Lengths of Segments)।

দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইতে উহাদের দূরত্ব বা ব্যবধান নির্ণয় করা এবং কোন সরলরেখার কোন অংশের (Segment) প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইতে ঐ অংশটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা একই কথা। সুতরাং দুইটি বিন্দুর ব্যবধান নির্ণয় করিবার প্রণালী অবলম্বন করিয়া কোন সরলরেখার অংশবিশেষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যাইতে পারে।

(i) **মূলবিন্দু হইতে অপর কোন বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়।**

[*To find the distance of a point from the origin.*]

মনে কর, x-অক্ষ OX এবং y-অক্ষ OY পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। P একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). মূলবিন্দু O হইতে P বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ OPর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

Y P O M X

OXএর উপর PM লম্ব টান। OP যোগ কর।

প্রমাণ। $\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y), $\therefore$ $OM = x$ এবং $PM = y$.

$$\therefore \quad OP^2 = OM^2 + PM^2 \quad (\because \angle OMP = \text{সম}\angle).$$

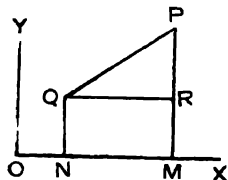
$$= x^2 + y^2.$$

$$\therefore \quad OP = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \cdots(1)$$

(ii) **দুইটি বিন্দুর ব্যবধান নির্ণয়।**

[*To find the distance between two points.*]

মনে কর, x-অক্ষ OX এবং y-অক্ষ OY পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। P ও Q দুইটি বিন্দু, যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। P ও Qর ব্যবধান অর্থাৎ PQর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

OX এর উপর PM ও QN লম্ব টান এবং PM এর উপর QR লম্ব টান।

প্রমাণ। $QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$ এবং $PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$.

$\therefore\ PQ^2 = QR^2 + PR^2$ ($\because$ $\angle PRQ$ সমকোণ)

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore\ PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad \cdots (2)$$

দ্রষ্টব্য। (1) $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$ এবং $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$; তাহা হইলে সূত্র (2) দাঁড়ায়: $\therefore\ PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(2) P ও Qর স্থানাঙ্কগুলির যে কোনটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন অর্থাৎ P ও Qর যে কোনটি যে কোন পাদে অবস্থিত থাকুক না কেন, PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য সূত্র (2) প্রযোজ্য হইবে।

(3) এই সূত্রটির সাহায্যে, মূলবিন্দু O হইতে P বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করা যায়। Q কে মূলবিন্দুতে অবস্থিত বলিয়া ধরিলে Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক দাঁড়ায় (0, 0)। সুতরাং সূত্র (2) এ $x_2 = 0$ এবং $y_2 = 0$ বসাইয়া,

$$PO = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

5. সসীম সরলরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভাগ। কোন সসীম সরলরেখাকে একবিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত এবং অপর এক বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করা যায়।

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা (অথবা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা) যে বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত হয় বা (ii) বহির্বিভক্ত হয়, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

[***To find the co-ordinates of a point dividing* (i) *internally or* (ii) *externally a given straight line* (*or a line joining two given points*) *in a given ratio.***]

(i) মনে কর, x-অক্ষ OX এবং y-অক্ষ OY পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। P ও Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু, যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)। মনে কর, R বিন্দু PQ সরলরেখাকে $m : n$ এর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। তাহা হইলে, PR : RQ $= m : n$. R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।.

মনে কর, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

OY র সমান্তরাল PL, QM, RN টান; উহারা যেন OX এর সহিত L, M, N বিন্দুতে মিলিত হইল।

OX এর সমান্তরাল PT টান; উহা যেন RN কে S বিন্দুতে এবং QM কে T বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। $\text{PS} = \text{LN} = \text{ON} - \text{OL} = x - x_1$

এবং $\text{ST} = \text{NM} = \text{OM} - \text{ON} = x_2 - x$;

$$\therefore \quad \frac{\text{PS}}{\text{ST}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\because$ RS ∥ QT, $\therefore \dfrac{\text{PS}}{\text{ST}} = \dfrac{\text{PR}}{\text{RQ}} = \dfrac{m}{n} \quad \cdots \quad (2)$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{m}{n}$ বা, $nx - nx_1 = mx_2 - mx$

বা, $x(m+n) = mx_2 + nx_1 \quad \therefore \; x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$.

আবার, $\therefore \text{RS} = \text{RN} - \text{SN} = \text{RN} - \text{PL} = y - y_1$

এবং $\text{QT} = \text{QM} - \text{TM} = \text{QM} - \text{PL} = y_2 - y_1$

$$\therefore \quad \frac{\text{RS}}{\text{QT}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

এবং $\because$ RS ∥ QT, $\therefore$ PRS ও PQT ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ;

$$\therefore \quad \frac{\text{RS}}{\text{QT}} = \frac{\text{PR}}{\text{PQ}} = \frac{m}{m+n} \quad \cdots \quad (4)$$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে, $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{m}{m+n}$

বা $y(m+n) = y_1(m+n) + (y_2 - y_1)m = my_2 + ny_1$

$$\therefore \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

$\therefore$ PQ সরলরেখা R বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right).$$

(ii) মনে কর, R বিন্দু PQ সরলরেখাকে $m : n$ এর অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। তাহা হইলে, PR : RQ $= m : n$.

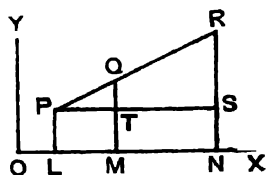
R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

(i) এর ন্যায় অঙ্কন কর।

Y R Q P S T O L M N X

প্রমাণ। PS = LN = ON − OL $= x - x_1$

এবং ST = MN = ON − OM $= x - x_2$

$$\therefore \frac{PS}{ST} = \frac{x-x_1}{x-x_2} \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\because$ RS ∥ QT, $\therefore$ $\frac{PS}{ST} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$ · (2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, $\frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{m}{n}$

বা, $mx - mx_2 = nx - nx_1$ বা, $x(m-n) = mx_2 - nx_1$

$$\therefore x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}.$$

আবার, RS = RN − SN = RN − PL $= y - y_1$

এবং QT = QM − TM = QM − PL $= y_2 - y_1$

$$\therefore \frac{RS}{QT} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \cdots (3)$$

এবং $\because$ RS ∥ QT, $\therefore$ PRS ও PQT ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

$$\therefore \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m-n} \quad \cdots (4)$$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{m}{m-n}$

বা, $y(m-n) = m(y_2-y_1) + y_1(m-n) = my_2 - ny_1$

$$\therefore y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}.$$

PQ সরলরেখার R বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইলে, R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right).$$

দ্রষ্টব্য। (1) যদি PQর মধ্যবিন্দু R হয়, তবে PR:RQ$=m:n=1:1$;

$\therefore$ m ও nএর জন্য উহাদের আনুপাতিক মান 1 বসাইয়া.

$$\text{R এর } x\text{-স্থানাঙ্ক} = \frac{1.x_2+1.x_1}{1+1} = \tfrac{1}{2}(x_1+x_2).$$

অনুরূপে, R এর y-স্থানাঙ্ক $=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.

(2) যদি PQর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় R ও S হয় এবং PR$=\frac{1}{3}$PQ এবং PS$=\frac{2}{3}$PQ হয়, তবে PR : RQ$=1:2$ এবং PS : SQ$=2:1$.

$$\therefore \text{ R এর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

$$\text{এবং Sএর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{y_1+2y_2}{3}\right).$$

6. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

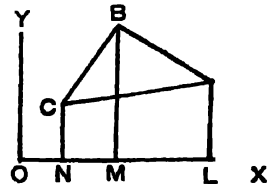
[*To find the area of a triangle having given the co-ordinates of its vertices.*]

বা, তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the area of a triangle formed by joining three given points.*]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A, B ও Cর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3).

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

OX এর উপর AL, BM ও CN লম্ব টান।

প্রমাণ। $\triangle$ABC$=$ট্রাপিজিয়ম ALMB
$+$ট্রাপিজিয়ম BMNC$-$ট্রাপিজিয়ম CNLA.

এখন, ∵ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}$(সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × ঐ বাহুদ্বয়ের ব্যবধান) ;

$$\therefore \quad \triangle ABC=\tfrac{1}{2}\{(AL+BM).ML+(BM+CN).NM-(CN+AL).NL$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+(y_3+y_1)\times(x_3-x_1)\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (A)$$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_1-x_1y_3+x_2y_3-x_3y_2)$$

[কাঁটাপড়া পদগুলিকে পরিত্যাগ করিয়া]

$$=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

দ্রষ্টব্য। (*i*) তিনটি বিন্দু সমরেখ (collinear) হইলে, বিন্দুত্রয় সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজটি একটি সরলরেখায় পরিণত হইবে, যাহার ফলে উহার ক্ষেত্রফল=0 হইবে। বিপরীতক্রমে, তিনটি বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল=0 হইলে, বিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে।

∴ তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার সর্ত হইল :
বিন্দুত্রয়ের সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল=0.

∴ তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) হইলে, বিন্দুত্রয়ের সমরেখ হওয়ার সর্ত :

$$\boldsymbol{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.}$$

(ii) চিত্রে ABC ত্রিভুজের A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3) কে বাম আবর্তে (anti-clockwise) লওয়া হইয়াছে। A(x_1, y_1) B (x_2, y_2) এবং C (x_3, y_3) কে ডান আবর্তে (clock-wise) লইলে (A) চিহ্নিত পংক্তির (x_1-x_2), (x_2-x_3) এবং (x_3-x_1) যথাক্রমে (x_2-x_1), (x_3-x_2) এবং (x_1-x_3) হইবে। পরীক্ষা করিয়া দেখ।

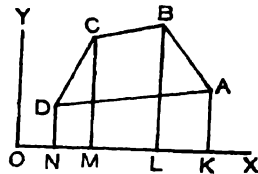
সুতরাং উভয় আবর্তের ক্ষেত্রফল দুইটির পরমমান পরস্পর সমান হইলেও এক আবর্তের ক্ষেত্রফল ধনাত্মক হইলে অপর আবর্তের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হইবে। ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হইলে উহার পরমমান লইবে।

(iii) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (0, 0) হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$ [(1)এ $x_3=0$ এবং $y_3=0$ বসাইয়া].

7. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল।

কোন চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the area of a quadrilateral having given the co-ordinates of its angular points.*]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি বাম আবর্তে যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$. OX এর উপর AK, BL, CM, DN লম্ব টান।

প্রমাণ। চতুর্ভুজ ABCDর ক্ষেত্রফল
= ট্রাপিজিয়ম AKLB + ট্রাপিজিয়ম BLMC + ট্রাপিজিয়ম CMND − ট্রাপিজিয়ম DNKA

$= \frac{1}{2}\{(AK+BL).LK+(BL+CM)ML+(CM+DN).NM-(DN+AK).NK\}$

$= \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+(y_3+y_4)(x_3-x_4)$
$+(y_4+y_1)(x_4-x_1)\}$

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)\}.$

[কাঁটাপড়া পদগুলিকে পরিত্যাগ করিয়া]

মন্তব্য। চারিটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) হইলে, বিন্দু চতুষ্টয়ের সমরেখ হওয়ার সর্ত :

$$x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)=0.$$

উদাহরণ 1. Find the distances of the points (i) $(3, -4)$, (ii) $(-4, -3)$ and (iii) $\{(a-b), (a+b)\}$ from the origin.

মূলবিন্দু O হইতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্বের সূত্র হইল, $OP = \sqrt{x^2+y^2}$;

(i) নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$,

(ii) নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$,

(iii) নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

উদাহরণ 2. Find the distance of the point $P(a \sin\theta, a \cos\theta)$ from $O(0, 0)$.

নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(a \sin\theta)^2+(a \cos\theta)^2} = \sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = a.$

উদাহরণ 3. Find the distance between the following pairs of points :

(i) $(-2, 5), (4, -3)$ (ii) $(-8, 7), (-3, -5)$

P (x_1, y_1) এবং Q (x_2, y_2) এর মধ্যবর্তী দূরত্বের সূত্র হইল,

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} ;$$

$\therefore$ (i) নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(-2-4)^2 + \{5-(-3)\}^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$

(ii) নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{\{-8-(-3)\}^2 + \{7-(-5)\}^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$

উদাহরণ 4. Find the distance between the points $(a+b, c+d)$ and $(a-b, c-d)$.

নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{\{(a+b)-(a-b)\}^2 + \{(c+d)-(c-d)\}^2}$

$= \sqrt{(2b)^2 + (2d)^2} = 2\sqrt{b^2+d^2}.$

উদাহরণ 5. Find the distance between P and Q whose co-ordinates are $(\sin\theta, \cos\theta)$ and $(\sin\phi, \cos\phi)$ respectively.

$PQ^2 = (\sin\theta - \sin\phi)^2 + (\cos\theta - \cos\phi)^2$

$= \sin^2\theta + \sin^2\phi - 2\sin\theta\sin\phi + \cos^2\theta + \cos^2\phi - 2\cos\theta\cos\phi$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\phi + \cos^2\phi - 2\sin\theta\sin\phi - 2\cos\theta\cos\phi$

$= 1 + 1 - 2\cos(\theta - \phi) = 2\{1 - \cos(\theta-\phi)\} = 2 \times 2\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \phi).$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $PQ = 2\sin\frac{1}{2}(\theta - \phi).$

উদাহরণ 6. Show that the triangle whose vertices are A (3, 3), B (−2, −2) and C (8, −2) is a right-angled isosceles triangle. Find its hypotenuse.

$AB^2 = \{3-(-2)\}^2 + \{3-(-2)\}^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \quad \therefore AB = 5\sqrt{2}$

$AC^2 = (3-8)^2 + \{3-(-2)\}^2 = (-5)^2 + 5^2 = 50 \quad \therefore AC = 5\sqrt{2}.$

$BC^2 = (-2-8)^2 + \{-2-(-2)\}^2 = (-10)^2 + 0^2 = 100 \quad \therefore BC = 10$

$\therefore$ AB = AC, $\therefore$ ABC ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু।

$\because$ $AB^2+AC^2=(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2=50+50=100=BC^2$,

$\therefore$ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A সমকোণ এবং BC অতিভুজ।

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং উহার অতিভুজ BC = 10.

উদাহরণ 7. Find the co-ordinates of the middle point of the straight line whose extremities are (–4, 5) and (10, –3).

নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-4+10}{2}, \frac{5-3}{2}\right)=(3, 1)$.

উদাহরণ 8. Find the co-ordinates of the point which divides the straight line joining the points (–7, –3) and (9, 5) internally in the ratio of 3 : 5.

নির্ণেয় স্থানাঙ্ক যেন (x, y)। তাহা হইলে,

সূত্র $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$ হইতে,

$$x=\frac{3.9+5(-7)}{3+5}=\frac{27-35}{8}=-1$$

$$y=\frac{3.5+5(-3)}{3+5}=\frac{15-15}{8}=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (–1, 0).

উদাহরণ 9. Find the co-ordinates of the point which divides the straight line joining the points (1, 2) and (10, –4) externally in the ratio of 5 : 2.

নির্ণেয় স্থানাঙ্ক যেন (x, y)। তাহা হইলে,

সূত্র $x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$, $y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$ হইতে,

$$x=\frac{5.10-2.1}{5-2}=\frac{48}{3}=16,\ y=\frac{5(-4)-2.2}{5-2}=-\frac{24}{3}=-8$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (16, –8)

উদাহরণ 10. **Find the ratio in which the point (4, 1) divides the straight line whose extremities are (0, – 3) and (10, 7).**

নির্ণেয় অনুপাত যেন $m : n$. তাহা হইলে,

সূত্র $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$ হইতে, $4=\dfrac{m.10+n.0}{m+n}$

বা, $10m=4m+4n$ বা, $6m=4n$ $\quad \therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{3}$ ∴ নির্ণেয় অনুপাত 2 : 3

মন্তব্য। সূত্র $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ হইতেও অনুপাতটি নির্ণয় করা যায়। $\dfrac{m}{n}$ এর মান ধনাত্মক হওয়ায় স্পষ্টতঃই (4, 1) বিন্দুটি সরলরেখাটিকে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে, কারণ কোন সরলরেখা অন্তর্বিভক্ত হইলে উহার অংশদ্বয়ের প্রত্যেকটি ধনাত্মক বলিয়া উহাদের অনুপাতও ধনাত্মক হইয়া থাকে।

উদাহরণ 11. Find the ratio in which the point (8, – 1) divides **the join of (– 2, 4) and (2, 2)**

নির্ণেয় অনুপাত যেন $m : n$. তাহা হইলে,

সূত্র $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$ হইতে, $8=\dfrac{m.2+n(-2)}{m+n}$

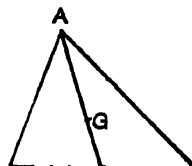
বা, $8m+8n=2m-2n$ বা, $6m=-10n$

বা, $\dfrac{m}{n}=-\dfrac{5}{3}$ $\quad \therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $=5:3$

মন্তব্য। অনুপাতকে ঋণাত্মকরূপে দেখান হয় না; কাজেই অনুপাত 5 : 3 ধরা হইয়াছে। m/n এর মান ঋণাত্মক হওয়ায় স্পষ্টতঃই সরলরেখাটি (8, – 1) বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে, কারণ কোন সরলরেখা বহির্বিভক্ত হইলে উহার অংশদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়, যাহার ফলে অনুপাতের মান ঋণাত্মক হইয়া পড়ে।

$y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ হইতেও অনুপাতটি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 12. Find the centroid of the triangle ABC whose vertices are A (2, 6), B (1, −1) and C (9, 1).

ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D লও। AD যোগ কর। AD কে G বিন্দুতে 2 : 1 এর অনুপাতে বিভক্ত কর। তাহা হইলে ত্রিভুজটির G ভরকেন্দ্র। Gর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ D, BCর মধ্যবিন্দু; $\therefore$ Dর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{1+9}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)=(5, 0).$

আবার, Aর স্থানাঙ্ক (2, 6) ও Dর স্থানাঙ্ক (5, 0) এবং AG : GD $=2:1$;

$\therefore$ G বিন্দুর $x=\frac{2.5+1.2}{2+1}=4$ এবং $y=\frac{2.0+1.6}{2+1}=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় ভরকেন্দ্র (4, 2).

উদাহরণ 13. If the point (x, y) be equidistant from (1, 2) and (−3, 4), show that $2x-y+5=0$.

(x, y) এবং (1, 2) এর মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

এবং (x, y) এবং $(-3, 4)$ এর মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $(x-1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2$

বা, $x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2+6x+9+y^2-8y+16$

বা, $8x-4y+20=0$ $\therefore$ $2x-y+5=0.$

উদাহরণ 14. Find the co-ordinates of the point equidistant from (2, 1), (8, 3) and (6, 9).

নির্ণেয় বিন্দুটি যেন (x, y). তাহা হইলে,

(x, y) ও (2, 1) এর ভিতর দূরত্ব $=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

(x, y) ও (8, 3) এর ভিতর দূরত্ব $=\sqrt{(x-8)^2+(y-3)^2}$

এবং (x, y) ও (4, 9) এর ভিতর দূরত্ব $=\sqrt{(x-6)^2+(y-9)^2}$.

প্রদত্ত সর্ত হইতে, এই দূরত্বত্রয় পরস্পর সমান,

$$\therefore \quad \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-8)^2+(y-3)^2} \quad \cdots (1)$$

এবং $$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-9)^2} \quad \cdots (2)$$

$\therefore$ উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া,

(1) হইতে, $(x-2)^2+(y-1)^2=(x-8)^2+(y-3)^2 \quad \cdots (3)$

এবং (2) হইতে, $(x-2)^2+(y-1)^2=(x-6)^2+(y-9)^2 \quad \cdots (4)$

(3) ও (4) সরল করিয়া, $3x+y=17 \quad \cdots (5)$

এবং $x+2y=14 \quad \cdots (6)$

(5) ও (6) সমাধান করিয়া, $x=4, y=5$ $\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (4, 5)।

উদাহরণ 15. Find the area of a triangle whose vertices are (ab, c), (bc, a) and (ca, b).

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\}$ [অনু. 6]

$$=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(a-c).$$

উদাহরণ 16. Find the area of the triangle whose vertices are $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$, $(\sin \theta, \cos \theta)$ and $(0, 0)$.

ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{\sin 2\theta(\cos\theta-0)+\sin\theta(0-\cos 2\theta)+0(\cos 2\theta-\cos\theta)\}$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2\theta \cos\theta-\cos 2\theta \sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\sin(2\theta-\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta.$$

উদাহরণ 17. Show that the straight line joining the points (5, 3) and $(-3,-3)$ passes through (1, 0).

প্রথম ও দ্বিতীয় বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বিন্দু দিয়া যাইবে, যদি প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়। এখন,

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়,

যদি $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$ হয়,

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে, যদি $5(-3-0)+(-3)(0-3)+1(3+3)=0$ হয় অর্থাৎ, যদি $-15+9+6=0$ হয়, যাহা বস্তুতঃই 0.

$\therefore$ (5, 3) ও (−3, −3) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা (1, 0) বিন্দু দিয়া যাইবে।

উদাহরণ 18. Prove that the three points $(a, 0)$, $(0, b)$ and (3, 2) are collinear, if $2a+3b=ab$.

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ হইবে,

যদি $a(b-2)+0(2-0)+3(0-b)=0$ হয় [দ্রষ্টব্য (1), অনু. 6]

অর্থাৎ, যদি $ab-2a-3b=0$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $2a+3b=ab$ হয়।

উদাহরণ 19. The distance between the points (3, 4) and $(5, y)$ is $\sqrt{13}$. Find the second point.

(3, 4) এবং $(5, y)$ এর মধ্যে দূরত্ব $=\sqrt{(3-5)^2+(4-y)^2}$.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\sqrt{(3-5)^2+(4-y)^2}=\sqrt{13}$

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $(3-5)^2+(4-y)^2=13$

বা, $4+16-8y+y^2=13$ বা, $y^2-8y+7=0$

বা, $(y-1)(y-7)=0$ $\therefore$ $y=1$ বা 7

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু (5, 1) বা (5, 7).

উদাহরণ 20. The area of a triangle whose vertices are (1, 3), (5, −1) and $(x, 6)$ is 8 square units. Find the third vertex.

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{1(-1-6)+5(6-3)+x(3+1)\}$ [অনু. 6]

$=\frac{1}{2}(-7+15+4x)=2x+4$

$\therefore$ সর্তানুসারে, $2x+4=8$ $\therefore$ $x=2$.

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষটি (2, 6).

উদাহরণ 21. Find the area of the quadrilateral whose vertices are (8, 7), (3, 6), (2, 1), (9, 2).

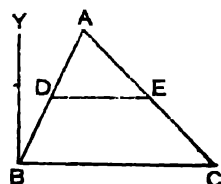
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{(8.6-3.7)+(3.1-2.6)+(2.2-9.1)+(9.7-8.2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(48-27)+(3-12)+(4-9)+(63-16)\}$

$=\frac{1}{2}(21-9-5+47)=\frac{1}{2}.54=27.$

উদাহরণ 22. Show that the straight line joining the middle points of two sides of a triangle is half the third side.

ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE $=\frac{1}{2}$BC.

B কে মূলবিন্দু, BC কে x-অক্ষ এবং BCর উপর লম্ব BY কে y-অক্ষ ধর।

এখন, Bর স্থানাঙ্ক (0, 0), BC $=a$ ধরিয়া, Cর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং Aর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ধরিয়া, Dর স্থানাঙ্ক $=\{\frac{1}{2}(x_1+0),\ \frac{1}{2}(y_1+0)\}=(\frac{1}{2}x_1,\ \frac{1}{2}y_1)$ এবং Eর স্থানাঙ্ক $=\{\frac{1}{2}(x_1+a),\ \frac{1}{2}(y_1+0)\}=\{\frac{1}{2}(x_1+a),\ \frac{1}{2}y_1\}$

$$\therefore\ \text{DE}^2=\{\tfrac{1}{2}x_1-\tfrac{1}{2}(x_1+a)\}^2+(\tfrac{1}{2}y_1-\tfrac{1}{2}y_1)^2\}$$
$$=(\tfrac{1}{2}a)^2+0^2=(\tfrac{1}{2}a)^2$$
$$\therefore\ \text{DE}=\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\text{BC}.$$

Exercise 1

1. Find the distances of the following points from the origin

   (i) (3, 4) (ii) $(-8, 6)$ (iii) $5, -12$
   (iv) $(7, -24)$ (v) $(l-m, l+m)$

2. Find the distances between the following pairs of points :

   (i) (5, 5), (2, 1) (ii) (7, 6), $(-5, 1)$ (iii) $(-9, 5), (6, -3)$
   (iv) $(a, 0), (0, b)$ (v) $(a, b), (b, a)$.
   (vi) $(a+b, c-d), (a-b, c+d)$
   (vii) $(a \sin \alpha, a \cos \alpha), (a \sin \beta, a \cos \beta)$

3. The square of the distance between the points (1, 2) and $(x, 7)$ is 34. Find the abscissa of the second point.

4. The distance between the points (1, 3) and $(5, y)$ is $2\sqrt{13}$. Find the second point.

5. One end of a straight line of length 13 is at (5, 2). If the ordinate of the other end is 14, show that the other end is at (0, 14) or at (10, 14).

6. Show that the triangle whose vertices are (5, 6), (2, 2) and (5, – 2) is a right-angled isosceles triangle whose hypotenuse is 8.

7. Prove that the points $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ and $(2a + \sqrt{3}a, 5a)$ are the vertices of an equilateral triangle whose side is $2a$.

(C. U. 1952)

8. Show that (0, 0), (8, – 4), (11, 2) and (3, 6) are vertices of a rectangle.

9. Find the co-ordinates of the middle points of the straight lines joining the following pairs of points :

(i) (3, 5), (5, 3) (ii) (– 5, 7), (9, – 3) (iii) (– 4, – 5), (– 6, – 7).

10. Find the co-ordinates of the point which divides internally the join of (2, 1) and (7, 6) in the ratio of 2 : 3.

11. Find the co-ordinates of the point which divides internally the join of (– 2, – 3) and (5, 11) in the ratio of 4 : 3.

12. Find the distance between (– 2, 3) and (3, – 1) and the co-ordinates of the point of trisection that is nearer to (– 2, 3).

13. Find the co-ordinates of the point that divides externally the join of (2, 3) and (5, 6) in the ratio of 5 : 2.

14. Find the co-ordinates of the point that divides externally the join of (4, – 3) and (0, 5) in the ratio of 7 : 3.

15. Find the ratio in which the point (4, 5) divides the straight line joining the points (2, 1) and (7, 11).

16. Find the ratio in which (4, 2) divides the join of (– 2, – 1) and (8, 4).

17. Find the ratio in which (– 2, 10) divides the join of (4, – 2) and (1, 4).

18. Find the ratio in which (5, – 6) divides the join of (– 2, 8) and (2, 0).

19. If (x, y) is equidistant from (– [illegible]) and (– 3, 6), show that $x = y - 10$.

20. If (x, y) is equidistant from $(2, -3)$ and $(-4, 5)$, show that $3x - 4y + 7 = 0$.

21. Find the condition that (x, y) may be equidistant from $(-2, 2)$ and $(1, -4)$.

22. Find the co-ordinates of the point equidistant from $(-1, 2)$, $(1, 4)$ and $(3, 2)$.

23. If the point (x, y) is equidistant from $(0, 10)$, $(10, 0)$ and $(6, 8)$, then the point (x, y) is $(0, 0)$.

24. Find the circum-centre and the circum-radius of the triangle whose vertices are $(8, 11)$, $(2, 3)$ and $(1, 4)$.

25. Find the area of the triangle whose vertices are :

(i) $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(1, 1)$

(ii) $(3, 7)$, $(-2, -3)$, $(5, -2)$

(iii) $(0, 0)$, $(9, 1)$, $(-2, 5)$

(iv) $(a, b+c)$, $(-a, b-c)$, (a, c)

(v) (a, bc), (b, ca), (c, ab)

(vi) $(0, 0)$, $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$, $(\sin 4\theta, \cos 4\theta)$

26. The area of the triangle formed by joining the points $(2, 3)$, $(k, 9)$, $(10, 4)$ is $23\frac{1}{2}$ square units. Find k.

27. If the points $(-1, -3)$, $(1, l)$, $(4, 7)$ are in the same straight line, find l.

28. Show that the three points $(4, 2)$, $(7, 5)$, $(9, 7)$ lie on a right line. (C. U. 1943)

29. Show that the three points $(3a, 0)$, $(0, 3b)$ and $(a, 2b)$ are collinear. (C. U. 1924)

30. Show that the three points $(a, b+c)$, $(b, c+a)$, $(c, a+b)$ are collinear.

31. Find the area of the quadrilateral, whose angular points are $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(5, -2)$, $(4, -7)$. (C. U. 1935)

32. Show that the area of the quadrilateral whose vertices, taken in order, are $(a, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, a)$, $(0, -b)$ is zero. Interpret the result geometrically. (C. U. 1942)

33. If the area of the quadrilateral whose angular points A, B, C and D taken in order, are $(1, 2)$, $(-5, 6)$, $(7, -4)$ and $(k, -2)$ be zero, find the value of k. (C. U. 1945)

34. If the vertices of a triangle are (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), show that the co-ordinates of its centroid are

$$\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

35. Find the centroid of the triangle whose vertices are $(-2, 1)$, $(6, 3)$, $(5, 8)$.

36. Find the lengths of the medians of the triangle whose vertices are $(3, 2)$, $(5, 6)$, $(7, 4)$.

37. If two vertices of a triangle are $(3, 9)$, $(7, 3)$ and its centroid is $(7, 6)$, find the third vertex.

38. Prove that the line joining the middle points of two sides of a triangle is half the third side.

39. If ABC be any triangle, prove that

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2),$$

where D is the middle point of BC.

40. Show that the area of any triangle is four times the area of the triangle, formed by joining the mid-points of its sides.

The Straight Line

(সরলরেখা)

8. কোন বিন্দু কোন সমতলে কোন নির্দিষ্ট সর্তাধীনে বিচরণ করিলে বিন্দুটি একটি সরলরেখা (Straight line) বা বক্ররেখা (Curve) উৎপন্ন করে। এই রেখাকে বিন্দুটির সঞ্চারপথ (Locus) বলে।

এই রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় ঐ রেখাটির সমীকরণকে সিদ্ধ করে। বিপরীতক্রমে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোন রেখার সমীকরণকে সিদ্ধ করিলে বিন্দুটি ঐ রেখার উপর থাকিবে। যেমন,

যদি কোন বিন্দু কোন সমতলে এরূপে বিচরণ করে যে, বিন্দুটির যে কোন অবস্থানে উহার x-স্থানাঙ্ক $=2\times y$-স্থানাঙ্ক, তবে বিন্দুটি দ্বারা উৎপন্ন রেখাটির

সমীকরণ হইবে $x=2y$. (0, 0), (2, 1), (−4, −2) এর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কাজেই বিন্দুগুলি রেখাটির উপর অবস্থিত।

∴ কোন রেখার সমীকরণ গঠন করিবার নিয়ম হইল :

নিয়ম। (i) প্রদত্ত সর্তানুযায়ী প্রথমে একটি রেখা আঁক। (ii) রেখাটির উপর যে কোনও বিন্দু (x, y) লও এবং (iii) তৎপর বিন্দুটির স্থানাঙ্কদ্বয়ের পারস্পরিক সম্বন্ধ একটি সরল সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ কর। উহাই রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ হইবে।

মন্তব্য। এস্থলে (x, y) যে কোনও বিন্দু বলিয়া উহা একটি অনির্দিষ্ট বিন্দু। এই জন্য বিন্দুটির স্থানাঙ্কদ্বয়কে **চলন্ত** (Current) স্থানাঙ্ক বলে। অনির্দিষ্ট বিন্দুকে (x, y) দ্বারা এবং নির্দিষ্ট বিন্দুকে (x_1, y_1), (x', y'), (x_2, y_2) প্রভৃতি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

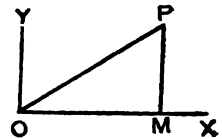
9. কোন সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার tangent কে ঐ সরলরেখার **ঢালুতা** (Gradient) বলে।

10. মূলবিন্দু ও অপর একটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার Gradient নির্ণয়।

O যেন মূলবিন্দু এবং P (x_1, y_1) অপর যে কোন বিন্দু। OPর Gradient নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর ধনাত্মক দিকের সহিত POM কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। OX এর উপর PM লম্ব টান।

তাহা হইলে PM $=y_1$ এবং OM $=x_1$.

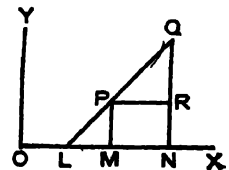
∴ OPর Gradient $=\tan$ POM $=\dfrac{PM}{OM}=\dfrac{y_1}{x_1}$.

11. যে কোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার Gradient নির্ণয়।

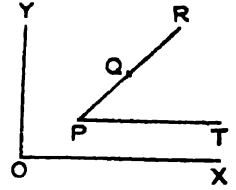
P (x_1, y_1) ও Q (x_2, y_2) দুইটি বিন্দু। মনে কর, PQর Gradient নির্ণয় করিতে হইবে।

QP বর্ধিত কর ; উহা যেন x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত QLX কোণ উৎপন্ন করিল। OX এর উপর PM ও QN লম্বদ্বয় এবং QN এর উপর PR লম্ব টান।

∴ PQর Gradient $=\tan$ QLN

$=\tan$ QPR (∵ PR ∥ LN)

$$=\frac{QR}{PR}=\frac{QN-RN}{ON-OM}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ বা } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

12. Gradient সাহায্যে তিনটি বিন্দুর সমরেখ হওয়ার সর্ত নির্ণয়।

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$ তিনটি বিন্দু। OX এর সমান্তরাল PT টান। তাহা হইলে P, Q এবং R সমরেখ (collinear) হইবে যদি $\angle QPT = \angle RPT$ হয়, অর্থাৎ যদি PQ এবং PR এর Gradientদ্বয় পরস্পর সমান হয়। এখন,

PQর Gradient $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ এবং PR এর Gradient $= \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$.

$\therefore$ P, Q এবং R সমরেখ হইবার সর্ত হইল $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$

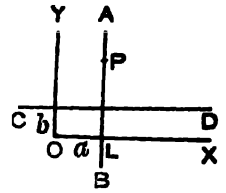
অথবা, সরল করিয়া, $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$

[অনু. 6 এর দ্রষ্টব্য (i) দেখ।]

13. **কোন অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।**

[*To find the equation of a straight line parallel to one of the co-ordinate axes.*]

প্রমাণ। y-অক্ষের সমান্তরাল AB যেন একটি সরলরেখা এবং উহা যেন x-অক্ষকে মূলবিন্দু O হইতে a একক দূরে L বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, $OL = a$.

ABর উপর যে কোন একটি বিন্দু P লও, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এখন, Pর যে কোন অবস্থানে, উহার কোটি যাহাই হউক না কেন, উহার ভুজ x সর্বত্র aর সমান হইবে।

$\therefore$ AB সরলরেখার সমীকরণ $\boldsymbol{x = a}$.

অনুরূপে, x-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে b একক দূরে অবস্থিত CD সরলরেখার সমীকরণ হইবে $\boldsymbol{y = b}$.

a ধনাত্মক হইলে, $x = a$ সরলরেখাটি y-অক্ষের ডানে এবং ঋণাত্মক হইলে y-অক্ষের বামে থাকিবে। b ধনাত্মক হইলে, $y = b$ সরলরেখাটি x-অক্ষের উপরে এবং ঋণাত্মক হইলে x-অক্ষের নীচে থাকিবে।

টীকা। $px+q=0$ এবং $x=-q/p$ একই সমীকরণ। সুতরাং $px+q=0$ সমীকরণটি এমন একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, যাহা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে $-q/p$ দূরে অবস্থিত। $-q/p$ ধনাত্মক হইলে সরলরেখাটি y-অক্ষের ডানে এবং ঋণাত্মক হইলে y-অক্ষের বামে থাকিবে।

$py+q=0$ এবং $y=-q/p$ একই সমীকরণ। সুতরাং $py+q=0$ সমীকরণটি এমন একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, যাহা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে $-q/p$ দূরে অবস্থিত। $-q/p$ ধনাত্মক হইলে সরলরেখাটি x-অক্ষের উপরে এবং ঋণাত্মক হইলে x-অক্ষের নীচে থাকিবে।

কাজেই কোন সরল সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের শুধু x বা শুধু y থাকিলে সমীকরণটি যথাক্রমে y-অক্ষের বা x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা প্রকাশ করিবে। যেমন,

(i) $x=2$ এমন একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, যাহা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে ডান দিকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

(ii) $2x=-3$ বা, $x=-\frac{3}{2}$ এমন একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, যাহা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে বাম দিকে $\frac{3}{2}$ একক দূরে অবস্থিত।

(iii) $3y=5$ বা, $y=\frac{5}{3}$ এমন একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, যাহা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে উপর দিকে $\frac{5}{3}$ একক দূরে অবস্থিত।

(iv) $7y+2=0$ বা, $y=-\frac{2}{7}$ এমন একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, যাহা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে নীচ দিকে $\frac{2}{7}$ একক দূরে অবস্থিত।

14. অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয়।

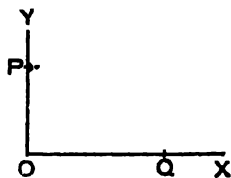
[*To find the equations of the axes.*]

y-অক্ষের উপর যে কোন একটি বিন্দু P লও, যাহার স্থানাঙ্ক যেন (x, y). এখন, Pর যে কোন অবস্থানে, উহার কোটি যাহাই হউক না কেন, উহার ভুজ x সর্বত্র 0 হইবে।

$\therefore$ y-অক্ষের সমীকরণ হইবে $\boldsymbol{x=0}$.

আবার, x-অক্ষের উপর যে কোন একটি বিন্দু Q লও, যাহার স্থানাঙ্ক যেন (x, y).

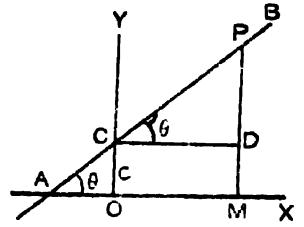
এখন, Qর যে কোন অবস্থানে, উহার ভুজ যাহাই হউক না কেন, উহার কোটি y সর্বত্র 0 হইবে।

$\therefore$ x-অক্ষের সমীকরণ হইবে $\boldsymbol{y=0}$.

15. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে, যাহা y-অক্ষ হইতে একটি নির্দিষ্ট অংশ ছিন্ন করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে।

[*To find the equation to a straight line which cuts off a given intercept on the y-axis and makes a given angle with the positive direction of the x-axis.*]

মনে কর, AB সরলরেখা y-অক্ষ হইতে OC = c অংশ ছিন্ন করিয়াছে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

ABর উপর যে কোন বিন্দু P লও। উহার স্থানাঙ্ক যেন (x, y). x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং PM এর উপর CD লম্ব টান।

এখন, $\because$ CD ∥ AX, $\therefore$ $\angle$PCD = অনুরূপ $\angle$BAX $= \theta$,

$$CD = OM = x, \quad DM = CO = c \text{ এবং } \tan\theta = \frac{PD}{CD}.$$

প্রথম প্রণালী : $\therefore y = PD + DM = \tan\theta . CD + DM$ ($\because$ PD × CD = tan θ)

$$= \tan\theta . x + c$$

$\therefore$ $\boldsymbol{y = mx + c}$, যেখানে $m = \tan\theta$.

দ্বিতীয় প্রণালী : $\tan\theta = \dfrac{PD}{CD} = \dfrac{PM - DM}{CD} = \dfrac{y - c}{x}$

$\therefore \quad y - c = \tan\theta . x$

বা, $\quad y = \tan\theta . x + c$

$\therefore \quad \boldsymbol{y = mx + c}$, যেখানে $m = \tan\theta$.

মন্তব্য। কোন সরলরেখার সমীকরণের এই আকারকে উহার ট্যানজেণ্ট আকার (Tangent form বা m-form) বলে।

দ্রষ্টব্য। (i) AB সরলরেখা y-অক্ষকে উহার ধনাত্মক দিকে ছেদ করিলে c ধনাত্মক হইবে, ঋণাত্মক দিকে ছেদ করিলে c ঋণাত্মক হইবে এবং মূলবিন্দুতে ছেদ করিলে $c = 0$ হইবে।

(ii) AB সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে সমীকরণটিতে θ বলিয়া ধরিবে। অবস্থাভেদে θ কোণ সূক্ষ্ম, স্থূল এবং প্রবৃদ্ধ হইতে পারে। কাজেই $\tan\theta$ বা m এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে। কোন কিছুর উল্লেখ না থাকিলে, AB সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে বলিয়া ধরিবে।

বিশেষ স্থল। (i) যদি AB সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হয় এবং y-অক্ষকে $(0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে θ কোণের পরিমাণ 0 ডিগ্রী হইবে, যাহার ফলে $\tan\theta$ বা $m=0$ হইবে।

∴ AB সরলরেখার সমীকরণ হইবে, $y=0.x+c$ বা, $y=c$.

(ii) যদি AB সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হয় এবং y-অক্ষকে $(0, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $y=mx+c$এ $m=0$ এবং $c=0$ ধরিলে x-অক্ষের সমীকরণ $y=0$ পাওয়া যাইবে।

16. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে, যাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে।

[*To find the equation to a straight line which passes through a given point and makes a given angle with the positive direction of the x-axis.*]

মনে কর, AB সরলরেখা Q (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

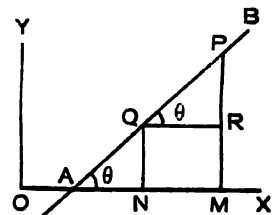
ABর উপর যে কোন P (x, y) বিন্দু লও। x-অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব এবং PM এর উপর QR লম্ব টান।

এখন, ∵ QR ∥ AX, ∴ ∠PQR = অনুরূপ ∠BAX = θ.

∴ অনু. 15 এর দ্বিতীয় প্রণালী অবলম্বন করিয়া,

$$\tan\theta=\frac{PR}{QR}=\frac{PM-RM}{OM-ON}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\therefore\ y-y_1=\tan\theta\,(x-x_1)$$

$$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1),\ \text{যেখানে}\ m=\tan\theta.$$

অথবা, $\because$ AB, OX এর সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে,

$\therefore$ ABর সমীকরণ হইবে, $y=mx+c$ ··· (1)

(যেখানে $m=\tan\theta$ এবং c অজ্ঞাত রাশি)

আবার, $\because$ AB, Q (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া যায়, $\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা (1) সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad y_1=mx_1+c \quad \cdots (2)$$

এখন, অজ্ঞাত রাশি c কে অপনয়ন করিতে হইবে।

$\therefore$ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া অথবা (1)এ $c=y_1-mx_1$ বসাইয়া,

$$y-y_1=m(x-x_1), \text{ যেখানে } m=\tan\theta.$$

17. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation of a straight line passing through two given points.*]

মনে কর, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটির সমীকরণ $y=mx+c$ ··· (1), যেখানে m ও c অজ্ঞাত রাশি।

$\because$ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সরলরেখাটির উপর অবস্থিত,

$\therefore$ ঐ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক দ্বারা $y=mx+c$ সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad y_1=mx_1+c \cdots (2)$$

$$y_2=mx_2+c \cdots (3)$$

এখন, (1), (2) ও (3) এর সাহায্যে অজ্ঞাত রাশি m ও c অপনয়ন করিতে হইবে।

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $y-y_1=m(x-x_1)$ ··· ··· (4)

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $y_1-y_2=m(x_1-x_2)$ ··· ··· (5)

(4) কে (5) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}$ ··· ··· (6)

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \text{ বা, } y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \quad \cdots \cdots (7)$$

নির্ণেয় সমীকরণ।

মন্তব্য। (i) (6)এ (x_1, y_1) কে (0, 0) ধরিলে (0, 0) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়-গামী সরলরেখার সমীকরণ দাঁড়ায় $\dfrac{y-0}{0-y_2}=\dfrac{x-0}{0-x_2}$, অর্থাৎ $\dfrac{y}{y_2}=\dfrac{x}{x_2}$.

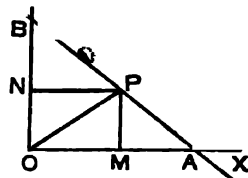
(ii) (7) হইতে দেখা যায়, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সংযোগে উৎপন্ন সরলরেখাটির m অর্থাৎ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার tangent $=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\text{বিন্দুদ্বয়ের কোটির অন্তর}}{\text{বিন্দুদ্বয়ের ভুজের অন্তর}}$।

18. যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে নির্দিষ্ট অংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation of a straight line which cuts off given intercepts from the axes.*]

মনে কর, AB সরলরেখা x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করায় ছিন্ন অংশ OA $=a$ এবং OB $=b$ হইয়াছে।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

ABর উপর যে কোন বিন্দু P(x, y) লও। x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং y-অক্ষের উপর PN লম্ব টান। OP যোগ কর।

চিত্র হইতে, $\triangle OAP + \triangle OBP = \triangle OAB$

বা, $\frac{1}{2}OA.PM + \frac{1}{2}OB.PN = \frac{1}{2}OA.OB$

$\therefore\ \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}ab$

$\therefore\ \frac{1}{2}ab$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

অথবা, ABর উপর যে কোন বিন্দু P(x, y) লও। x-অক্ষের উপর PM লম্ব টান।

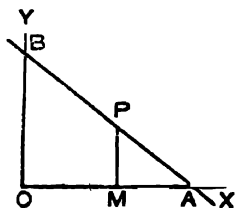
$\because$ BO ∥ PM,

$\therefore\ \frac{OM}{OA}=\frac{BP}{BA}$ বা, $\frac{x}{a}=\frac{BP}{BA}$ (1)

এবং $\frac{PM}{BO}=\frac{PA}{BA}$ বা, $\frac{y}{b}=\frac{PA}{BA}$ (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{BP}{BA}+\frac{PA}{BA}=\frac{BP+PA}{BA}=\frac{BA}{BA}=1$$

$\therefore\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

মন্তব্য। কোন সরলরেখার সমীকরণের এই আকারকে উহার ছিন্নাংশ আকার (Intercept form) বলে।

দ্রষ্টব্য। (i) AB সরলরেখা x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং উহার সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$\therefore$ $(a, 0), (0, -b)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$,

$(-a, 0), (0, b)$ ... ... $-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

$(-a, 0), (0, -b)$ ... ... $-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$.

দ্রষ্টব্য। যদি কোন সরলরেখার সমীকরণের x এবং y এর সহগদ্বয় সমান হয়, তবে সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে। যেমন, $ax+ay=c$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে, কারণ সমীকরণটি দাঁড়ায়

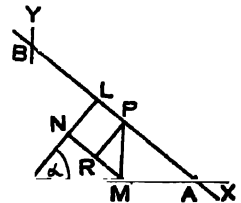
$$\frac{ax}{c}+\frac{ay}{c}=1 \text{ বা } \frac{x}{c/a}+\frac{y}{c/a}=1.$$

19. কোন সরলরেখার উপর মূলবিন্দু হইতে পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য এবং এই লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা দেওয়া আছে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the equation of a straight line, having given the length of the perpendicular let fall on it from the origin and the angle that this perpendicular makes with the positive direction of the x-axis.*]

মনে কর, মূলবিন্দু O হইতে AB সরলরেখার উপর OL লম্ব এবং OL, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর OL $=p$ একক।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

ABর উপর যে কোন বিন্দু P (x, y) লও। OX এর উপর PM লম্ব, OL এর উপর MN লম্ব এবং MN এর উপর PR লম্ব টান। তাহা হইলে,

$ON=MO \cos \alpha = x \cos \alpha$ এবং $NL=RP=PM \sin \angle PMR = y \sin \alpha$

$[\because \angle PMR = 90° - \angle NMO = \angle NOM = \alpha]$

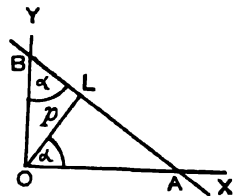
$\therefore \quad p = \text{OL} = \text{ON} + \text{NL} = x \cos a + y \sin a$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $\boldsymbol{x \cos a + y \sin a = p}$.

√ **বিকল্প প্রণালী** (অনু. 18 এর সাহায্যে)।

মনে কর, মূলবিন্দু O হইতে AB সরলরেখার উপর OL লম্ব এবং OL, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত a কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর, OL $= p$ একক।

AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, AB সরলরেখা OX কে A বিন্দুতে এবং OY কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

$\because$ AOB ত্রিভুজের O কোণ সমকোণ এবং সমকোণ O হইতে ABর উপর OL লম্ব ; $\therefore \angle \text{OBL} = 90° - \angle \text{LOB} = \angle \text{LOA} = a$

এখন, $\text{OA} \cos a = \text{OL} = p$; $\therefore \quad \text{OA} = p/\cos a$.

$\text{OB} \sin a = \text{OL} = p$; $\therefore \quad \text{OB} = p/\sin a$.

$\therefore$ AB সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{\text{OA}} + \dfrac{y}{\text{OB}} = 1$ (অনু. 18)

$$\text{বা,} \quad \frac{x}{p/\cos a} + \frac{y}{p/\sin a} = 1$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x \cos a + y \sin a = p}$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

মন্তব্য। কোন সরলরেখার সমীকরণের এই 'আকারকে উহার লম্ব-আকার (Perpendicular form) বলে।

20. উপরের অনুচ্ছেদগুলি হইতে দেখা যায়, সরলরেখার সমীকরণের আকার নিম্নলিখিতরূপ হইতে পারে।

(i) $\text{A}x + \text{B}y + c = 0$ (ii) $y = mx + c$

(iii) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (iv) $x \cos a + y \sin a - p = 0$

সমীকরণ চারিটির প্রত্যেকটিতে দুইটি অজ্ঞাত রাশি রহিয়াছে। সুতরাং কোন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে, সুবিধামত উপরের কোন একটি সমীকরণ লইয়া প্রশ্নে প্রদত্ত সর্তের সাহায্যে অজ্ঞাত রাশি দুইটি অপনয়ন করিলেই নির্ণেয় সমীকরণটি পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. Find the equation to the locus of a point which moves in such a way that it is always equidistant from the points (5, 2) and (−1, 3).

গতিশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক যেন (x, y) এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 2) ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−1, 3), এখন,

$$PA = \sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} \text{ এবং } PB = \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

বা, $(x-5)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$

বা, $x^2-10x+25+y^2-4y+4=x^2+2x+1+y^2-6y+9$

$\therefore$ $12x-2y-19=0$. ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 2. Find the gradient of the line joining the origin and the point (−3, 2).

মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) এর সংযোজক সরলরেখার Gradient$=\frac{y_1}{x_1}$ (অনু. 10);

$\therefore$ নির্ণেয় Gradient $= -\frac{2}{3}$.

উদাহরণ 3. Find the gradient of the line joining the points (7, 5) and (2, 3).

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সংযোজক সরলরেখার Gradient$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

$\therefore$ নির্ণেয় Gradient$=\frac{5-3}{7-2}=\frac{2}{5}$.

উদাহরণ 4. Find the equation to the straight line which cuts off an intercept 4 from the negative side of the y-axis and is inclined at an angle of 120° to the x-axis.

নির্ণেয় সমীকরণ : $y=\tan 120°.x-4$

বা, $y=-\sqrt{3}x-4$

বা, $\sqrt{3}x+y+4=0$.

উদাহরণ 5. Find the equation of the straight line which makes an angle of 135° with the x-axis and passes through the point $(3, -2)$.

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y = mx + c$.

$\because \quad m = \tan 135° = -1, \quad \therefore$ সমীকরণটি দাঁড়ায় $y = -x + c \cdots (1)$

$\because$ (1)এর উপর $(3, -2)$ বিন্দুটি অবস্থিত ;

$\therefore \quad -2 = -3 + c \qquad \therefore \quad c = 1$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $y = -x + 1$ বা, $x + y = 1$.

অথবা, অনু. 16 এর সূত্রের সাহায্যে, $y - (-2) = \tan 135°(x - 3)$

বা, $y + 2 = -x + 3 \quad \therefore \quad x + y = 1$.

উদাহরণ 6. Find the equation of the straight line that passes through the point (6, 5) and has the gradient $\frac{2}{3}$.

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y = mx + c$.

$\because \quad m = \frac{2}{3}, \quad \therefore$ সমীকরণটি দাঁড়ায় $y = \frac{2}{3}x + c \cdots (1)$

$\because$ (1) এর উপর (6, 5) বিন্দুটি অবস্থিত ;

$\therefore \quad 5 = \frac{2}{3} \cdot 6 + c \qquad \therefore \quad c = 1$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $y = \frac{2}{3}x + 1$

বা $2x - 3y + 3 = 0$

উদাহরণ 7. Find the equation of the straight line passing through the points (2, 3) and (4, 9).

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y = mx + c \cdots (1)$

$\therefore$ (2, 3) এবং (4, 9) বিন্দুদ্বয় সরলরেখাটির উপর অবস্থিত ;

$\therefore \quad 3 = 2m + c$ এবং $9 = 4m + c$

এই সমীকরণদ্বয়কে সমাধান করিয়া, $m = 3$ এবং $c = -3$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $y = 3x - 3$ বা $3x - y = 3$.

অথবা, অনু. 17 এর সূত্রের সাহায্যে, $y - 3 = \dfrac{3-9}{2-4}(x - 2)$

বা, $y - 3 = 3(x - 2) \quad \therefore \quad 3x - y = 3$.

উদাহরণ 8. Find the equation of the straight line which makes equal intercepts on the axes and passes through the point $(7, -3)$.

মনে কর, সরলরেখাটির সমাকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$\because$ সর্তানুসারে, $a=b$, $\therefore$ সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$ বা, $x+y=a \quad \cdots(1)$

এই সরলরেখাটি $(7, -3)$ বিন্দু দিয়া যাইবে, যদি $7-3=a$ হয়, অর্থাৎ যদি $a=4$ হয়।

$\therefore$ (1)এ $a=4$ বসাইয়া, নির্ণেয় সমীকরণ : $x+y=4$.

উদাহরণ 9. Find the equation of the straight line which passes through the points (1, 2) and (2, 1). Find also the length of this straight line intercepted between the axes. (C. U. 1936)

(1, 2) এবং (2, 1) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x-1}{1-2}=\frac{y-2}{2-1} \text{ (অনু. 17)}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1} \text{ বা, } x+y=3$$

আবার, $x+y=3$ কে উহার ছিন্নাংশ আকারে (Intercept form) প্রকাশ করিলে হয় $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$; সরলরেখাটির দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছিন্নাংশদ্বয় 3 এবং 3.

$\therefore$ অক্ষদ্বয় দ্বারা সরলরেখাটির ছিন্নাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

উদাহরণ 10. Find the equation to the straight line that passes through $(-4, 1)$ and is such that the portion of it lying between the axes is divided at the point in the ratio of 1 : 2.

নির্ণেয় সমীকরণটি যেন $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. ইহা অক্ষদ্বয়কে $(a, 0)$ and $(0, b)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে 1 : 2 এর অনুপাতে বিভক্ত হয়, তাহার স্থানাঙ্ক $\left\{\frac{1.0+2.a}{2+1}, \frac{1.b+2.0}{2+1}\right\}$ অর্থাৎ $\left\{\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}\right\}$; কিন্তু প্রশ্নটি হইতে, এই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-4, 1)$.

$$\therefore \frac{2a}{3} = -4 \text{ এবং } \frac{b}{3} = 1 \quad \therefore a = -6 \text{ এবং } b = 3$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমীকরণ : } \frac{x}{-6} + \frac{y}{3} = 1 \text{ বা } x - 2y + 6 = 0.$$

উদাহরণ 11. Find the equation of the straight line, if the perpendicular let fall on it from the origin is 5 and the angle which this perpendicular makes with the x-axis is 60°.

নির্ণেয় সমীকরণ $x \cos 60° + y \sin 60° = 5$

$$\text{বা, } x.\tfrac{1}{2} + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 10 \text{ নির্ণেয় সমীকরণ।}$$

Exercise 2

1. Find the equation to the locus of a point which moves so that its distance from the x-axis is a.

2. Find the equation to the locus of a point which moves so that twice its distance from the x-axis is thrice its distance from the y-axis.

3. Find the equation to the locus of a point which is always equidistant from the points whose co-ordinates are

(i) (2, 0) and (0, 2) (ii) (1, −4) and (−2, 3).

4. Find the gradient of the line joining

(i) (0, 0) and (5, −3) (ii) (2, −3) and (−4, 5).

5. Find the equation to the straight line which cuts off an intercept 2 from the y-axis and makes an angle of 60° with the positive direction of the x-axis.

6. Find the equation to the line which cuts off an intercept −3 from the y-axis and is inclined at an angle of 45° with the x-axis.

(C. U. 1939)

7. Find the equation to the line which cuts off an intercept 5 from the negative side of the y-axis and is inclined at an angle of 60° to the x-axis.

8. Find the equation to the straight line which passes through the point (0, 3) and makes an angle of 135° with the x-axis.

9. Find the equation to the straight line which makes an angle $\tan^{-1} \frac{2}{3}$ with the x-axis and passes through the point $(0, -4)$.

10. Find the equation to the straight line which passes through (3, 4) and makes an angle of 45° with the positive direction of the x-axis.

11. Find the equation to the straight line which passes through $(2, -5)$ and makes an angle of 120° with the x-axis.

12. Find the equation to the line that passes through $(-3, -4)$ and has the gradient $\frac{2}{3}$.

13. Find the equations to the lines passing through the following pairs of points:

(*i*) (0, 0) and (1, 2) (*ii*) (1, 2) and (3, 4)

(*iii*) $(-2, 3)$ and $(4, -5)$ (*iv*) $(0, a)$ and $(b, 0)$

14. Find the equations to the sides of a triangle the co-ordinates of whose angular points are (1, 2), $(3, -4)$ and $(-5, -6)$.

15. Show that the straight line joining the points $(1, -2)$ and (5, 4) passes through the point (3, 1).

16. Find the equation to the straight line passing through the point $(0, -2)$ and the middle point of the join of (3, 2) and $(5, -4)$.

17. Find the equation to the diagonals of the rectangle whose sides are $x=1$, $x=5$, $y=-2$ and $y=4$.

18. Find the equation to the straight line that passes through the point (1, 2) and bisects the portion of the straight line $x+2y=4$ which is intercepted between the axes.

19. Find the equations to the straight lines

(*i*) cutting off intercepts 2 and 3 from the axes.

(*ii*) cutting off intercepts -4 and 5 from the axes.

(*iii*) cutting off intercepts -6 and -8 from the axes.

(*iv*) passing through the points $(a, 0)$ and $(0, b)$.

20. Find the equation to the straight line which passes through (3, 4) and has intercepts on the axes

(*i*) equal in magnitude and both positive,

(*ii*) equal in magnitude but opposite in sign.

21. Find the equation to the straight line which passes through (2, − 3) and has intercepts on the axes

(*i*) equal in magnitude and both negative,

(*ii*) equal in magnitude but opposite in sign.

22. Find the equation to the straight line which passes through (6, 2) and is such that the portion of it lying between the axes is divided by the point in the ratio of 2 : 3.

23. Find the equation of the straight line if the perpendicular to it from the origin is 5 and makes an angle of 30° with the positive direction of the x-axis.

24. Find the equation to the straight line if the perpendicular to it from the origin is 8 and makes an angle of 135° with the x-axis.

21. যে কোন সরলরেখার সমীকরণ একঘাত।

(The equation of any straight line is linear.)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদসমূহে সরলরেখার সমীকরণ সম্ভবপর সমুদয় আকারে (in all possible forms) নির্ণয় করা হইয়াছে। এই সমীকরণগুলির প্রত্যেকটি একঘাত।

∴ যে কোন সরলরেখার সমীকরণ একঘাত।

22. যে কোন একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।

(Any linear equation represents a straight line.)

সাধারণ আকারের একঘাত সমীকরণ $Ax+By+C=0$ লও, যেখানে A, B ও C ধ্রুবক।

মনে কর, সমীকরণটির লেখের উপর (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) যে কোন তিনটি বিন্দু। তাহা হইলে সমীকরণটি এই বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্কদ্বারা সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad Ax_1+By_1+C=0 \quad \cdots (1)$$

$$Ax_2+By_2+C=0 \quad \cdots (2)$$

$$Ax_3+By_3+C=0 \quad \cdots (3)$$

(1) ও (2)এ বজ্রগুণন করিয়া,

$$\frac{A}{y_1-y_2}=\frac{B}{x_2-x_1}=\frac{C}{x_1y_2-x_2y_1}$$

A, B ও Cর আনুপাতিক মানগুলি (3)এ বসাইয়া,

$$x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$$

বা, $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$

$\therefore$ (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore$ গৃহীত একঘাত সমীকরণটির লেখের উপর অবস্থিত যে কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ।

$\therefore$ গৃহীত একঘাত সমীকরণটি একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।

23. সরলরেখার সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে পরিবর্তন।

সরলরেখার সমীকরণের আকার চারি প্রকার (অনু. 20)। যে কোন আকারের সরলরেখার সমীকরণকে অপর যে কোন আকারের সরলরেখার সমীকরণে পরিবর্তিত করা চলে। কোন সরলরেখার সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে পরিবর্তিত করিয়া লইলে সরলরেখাটির অবস্থান সম্পর্কে স্পষ্টতর ধারণা করা চলে। এস্থলে প্রথম আকারের সমীকরণকে অপর তিন আকারের সমীকরণে পরিবর্তন করা হইবে।

(1) $Ax+By+C=0$ কে $y=mx+c$ এর আকারে পরিবর্তন।

$Ax+By+C=0$ হইতে, $By=-Ax-C$

$\therefore$ $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, যাহা $y=mx+c$ এর আকারের সমীকরণ,

যেখানে $m=-A/B$ এবং $c=-C/B$.

(2) $Ax+By+C=0$ কে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এর আকারে পরিবর্তন।

$Ax+By+C=0$ হইতে, $Ax+By=-C$

বা, $\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1$ বা $\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1$, যাহা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এর আকারের সমীকরণ, যেখানে $a=-C/A$ এবং $b=-C/B$.

(3) $Ax+By+C=0$ কে $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ এর আকারে পরিবর্তন।

$\because$ $Ax+By+C=0$, $\therefore$ $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ ... (i)

$\because \; x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad \therefore \; y = -\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} x + \dfrac{p}{\sin \alpha} \cdots$ (ii)

$\therefore$ (*i*) এবং (*ii*) একই সমীকরণ হইলে,

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \therefore \; \frac{A^2}{B^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\therefore \; \frac{A^2 + B^2}{B^2} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \therefore \; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \alpha$$

আবার, $\because \; \dfrac{B^2}{A^2} = \dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

$$\therefore \; \frac{B^2 + A^2}{A^2} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \therefore \; \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha$$

$\therefore \; Ax + By + C = 0$ হইতে,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

বা, $x \cos \alpha + y \sin \alpha + \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$

$\therefore \; x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$এ pর চিহ্ন — বলিয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ: $x \cos \alpha + y \sin \alpha + C/\sqrt{A^2 + B^2} = 0$, যেখানে $C/\sqrt{A^2 + B^2}$ ঋণাত্মক।

অথবা, $-x \cos \alpha - y \sin \alpha - C/\sqrt{A^2 + B^2}$, যেখানে $C/\sqrt{A^2 + B^2}$ ধনাত্মক।

উদা. 1. Express $2x - 3y + 6 = 0$ in the *m* form and find from it the angle it makes with the *x*-axis and the point at which it cuts the *y*-axis.

$2x - 3y + 6 = 0$ হইতে, $3y = 2x + 6$

$\therefore \; y = \frac{2}{3}x + 2$. ইহাই প্রদত্ত সমীকরণটির ট্যানজেণ্ট আকার।

$y = \frac{2}{3}x + 2$ হইতে দেখা যায়, প্রদত্ত রেখাটি *x*-অক্ষের সহিত $\tan^{-1} \frac{2}{3}$ কোণ করিয়াছে এবং *y*-অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

উদা. 2. Express $4x - 3y + 2 = 0$ in the intercept form and find from it the points at which the straight line cuts the axes.

প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে, $4x - 3y = -2$

$\therefore$ -2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $-2x+\frac{3}{2}y=1$ বা, $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1$. ইহাই ছিন্নাংশ আকার। ইহা হইতে দেখা যায়, প্রদত্ত সরলরেখাটি x-অক্ষকে $(-\frac{1}{2}, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $(0, \frac{2}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

উদা. 3. Reduce to the perpendicular form the equation

$$x+y-4=0 \cdots (1)$$

এস্থলে $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

(1) কে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2}=0$

$\therefore$ $x\cos 45°+y\sin 45°-2\sqrt{2}=0$. ইহাই নির্ণেয় আকার।

উদা. 4. Express in the perpendicular form the equation

$$x-y\sqrt{3}+6=0 \cdots (1)$$

এস্থলে $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\therefore$ (1) কে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{1}{2}x-y\frac{\sqrt{3}}{2}+3=0$

বা, $-\frac{1}{2}x+y\frac{\sqrt{3}}{2}-3=0$ [3 এর চিহ্ন + কে − করিয়া]

বা, $x(-\frac{1}{2})+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3=0$

$\therefore$ $x\cos 120°+y\sin 120°-3=0$. ইহাই নির্ণেয় আকার।

উদা. 5. Express in the perpendicular form the equation $x+\sqrt{3}y+10=0$ and find from it the length of the perpendicular dropped on the given straight line from the origin and the angle which the perpendicular makes with the x-axis.

এস্থলে $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1+3}=2$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটিকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x(\tfrac{1}{2})+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+5=0$$

বা, $x(-\frac{1}{2})+y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-5=0$ [5 এর চিহ্ন + কে − করিয়া]

$\therefore$ $x\cos 240°+y\sin 240°-5=0$. ইহাই নির্ণেয় আকার।

ইহা হইতে দেখা যায়, মূলবিন্দু হইতে প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 240° কোণ উৎপন্ন করে।

Exercise 3

1. Express $x+2y+4=0$ in the m form.

2. Reduce $2x-3y=6$ to the m form and find from it the angle it makes with the x-axis and the point at which it cuts the y-axis.

3. Express $3x+2y-6=0$ in the intercept form.

4. Express $5x-6y+3=0$ in the intercept form and find from it the points at which it cuts the axes.

5. Express $8x+9y+6=0$ in the intercept form and find from it the points at which it cuts the axes.

6. Express $x+\sqrt{3}y-6=0$ in the perpendicular form.

7. Express $x-y+8\sqrt{2}=0$ in the perpendicular form.

8. Express in the perpendicular form the equation $x-\sqrt{3}y+10=0$ and find from it the length of the perpendicular dropped on the given line from the origin and the angle which the perpendicular makes with the x-axis.

24. দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয়।

(To find the angle between two straight lines.)

মনে কর, সরলরেখা দুইটির অন্তর্গত কোণ θ এবং উহারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

θ কোণের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইবে।

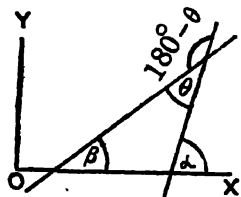
(1) সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যেন যথাক্রমে

$$y=m_1x+c_1 \text{ এবং } y=m_2x+c_2$$

তাহা হইলে, $\tan\alpha=m_1$ এবং $\tan\beta=m_2$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

(2) সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যেন যথাক্রমে

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots (1)$$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots (2)$

(1) ও (2) হইতে, $y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}$

$$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}$$

$\therefore \quad \tan\alpha=-a_1/b_1$ এবং $\tan\beta=-a_2/b_2$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{-\frac{a_1}{b_1}-\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}{1+\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}=\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$

$$\therefore \quad \theta=\tan^{-1}\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}.$$

দ্রষ্টব্য। সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণদ্বয়ের একটি θ হইলে অপরটি হইবে $(180°-\theta)$. সুতরাং θ কোণটি সূক্ষ্ম হইলে, $(180°-\theta)$ কোণটি হইবে স্থূল, যাহার ফলে $\tan\theta$ হইবে ধনাত্মক এবং $\tan(180°-\theta)$ হইবে ঋণাত্মক।

$\therefore \quad \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ ও $\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$এর সাংখ্যমান ধনাত্মক হইলে,

সূক্ষ্মকোণ $\theta=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ ও $\tan^{-1}\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$

এবং উহাদের সাংখ্যমান ঋণাত্মক হইলে,

স্থূলকোণ $(180°-\theta)=\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ ও $\tan^{-1}\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$ হইবে।

25. দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হইবার সর্ত নির্ণয়।

(To find the condition that two straight lines are parallel.)

দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ 0° হইলে, সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

$\therefore$ (1) $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ সমান্তরাল হইবে,

যদি $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\tan 0°=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $m_1-m_2=0$ অর্থাৎ $m_1=m_2$ হয়।

(2) $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমান্তরাল হইবে,

যদি $\dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}=\tan 0°=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $b_1a_2-a_1b_2=0$ বা $a_1b_2=b_1a_2$ হয়

বা $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ বা $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ হয়।

অথবা, সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটির $m_1=-\dfrac{a_1}{b_1}$ এবং দ্বিতীয়টির $m_2=-\dfrac{a_2}{b_2}$

∴ নির্ণেয় সর্ত $\boldsymbol{\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}}$ বা $\boldsymbol{a_1b_2=b_1a_2}$ বা $\boldsymbol{\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}}$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর $ax+by+c_1=0$ এবং $ax+by+c_2=0$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ এবং $ax+by+c=0$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল।

26. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হইবার সর্ত নির্ণয়।

(*To find the condition that two straight lines may be perpendicular.*)

দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ 90° হইলে, উহারা পরস্পর লম্ব হয়।

∴ (1) $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$ পরস্পর লম্ব হইবে,

যদি $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\tan 90°=\infty$ হয়,

অর্থাৎ যদি $1+m_1m_2=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $\boldsymbol{m_1m_2=-1}$ হয়।

(2) $a_1x+b_1y+c_1=0$ এর $m_1=-\dfrac{a_1}{b_1}$ এবং

$a_2x+b_2y+c_2=0$ এর $m_2=-\dfrac{a_2}{b_2}$

∴ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে,

যদি $\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)=-1$ হয় বা, $\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$ হয়।

দ্রষ্টব্য। $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $b_1x-a_1y+c_2=0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব, কারণ উহাদের m দ্বয়ের গুণফল $\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)=-1.$

∴ দুইটি সরলরেখার একটির x ও y এর সহগদ্বয় যদি যথাক্রমে অপরটির y ও x এর সহগদ্বয়ের সমান হয় এবং একটির সহগদ্বয়ের চিহ্ন সদৃশ এবং অপরটির সহগদ্বয়ের চিহ্ন অসদৃশ হয়, তবে সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে।

27. দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়।

(To find the point of intersection of two given lines.)

মনে কর, নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots (1)$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots (2)$.

এবং উহাদের ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

x_1 এবং y_1 নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ ছেদবিন্দুটি উভয় সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$\therefore \quad a_1x_1+b_1y_1+c_1=0 \cdots (3)$

এবং $a_2x_2+b_2y_2+c_2=0 \cdots (4)$

$\therefore$ (3) ও (4) এ বজ্রগুণন করিয়া,

$$\frac{x_1}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y_1}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ এবং } y_1=\frac{c_1a_2-a_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

28. তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার সর্ত নির্ণয়।

(To find the condition that three straight lines may be concurrent.)

মনে কর, সরলরেখা তিনটি $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$.

প্রথম দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right) \text{ [অনু. 27]}$$

যদি তৃতীয় সরলরেখাটি এই ছেদবিন্দু দিয়া যায়, তবে

$$a_3\times\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_3\times\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}+c_3=0 \text{ হইবে।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত হইল $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)$
$+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$

বা, $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$

অথবা, যদি l, m, n এর মান 0 ছাড়া অপর কোন মানের জন্য

$l(a_1x+b_1y+c_1)+m(a_2x+b_2y+c_2)+n(a_3x+b_3y+c_3)=0 \cdots (1)$

একটি অভেদ হয়, তবে গৃহীত সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হইবে।

মনে কর, প্রথম সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু (x_1, y_1)

এখন, (1) একটি অভেদ বলিয়া, x এবং y এর যে কোন মান দ্বারা অভেদটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore$ অভেদটিতে $x=x_1$ এবং $y=y_1$ বসাইয়া,

$$l(a_1x_1+b_1y_1+c_1)+m(a_2x_1+b_2y_1+c_2)+n(a_3x_1+b_3y_1+c_3)=0 \cdots (2)$$

আবার, $\because$ প্রথম দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু (x_1, y_1),

$\therefore$ $l(a_1x_1+b_1y_1+c_1)=l.0=0$ এবং $m(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=m.0=0$

$\therefore$ (2) হইতে, $n(a_3x_1+b_3y_1+c_3)=0$

$\therefore$ $a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$ $[\because n \neq 0]$

$\therefore$ $a_3x+b_3y+c_3=0$ সরলরেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী।

$\therefore$ গৃহীত তিনটি সরলরেখাই (x_1, y_1) বিন্দুগামী অর্থাৎ উহারা সমরেখ।

29. তিনটি বিন্দুর সমরেখ হওয়ার সর্ত নির্ণয়।

(To find the condition that three points may be collinear.)

মনে কর, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) তিনটি বিন্দু।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ।

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \quad (\text{অনু. } 17)$$

যদি এই সরলরেখাটি তৃতীয় বিন্দু (x_3, y_3) দিয়া যায়, তবে

$$\frac{y_3-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x_3-x_1}{x_1-x_2} \text{ হইবে,}$$

অর্থাৎ, $x_3y_1-x_3y_2-x_1y_1+x_1y_2=x_1y_3-x_1y_1-x_2y_3+x_2y_1$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত : $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.$

দ্রষ্টব্য। এই সর্তটি অনু. 6 এর দ্রষ্টব্য (i)এ পৃথক প্রণালীতে নির্ণয় করা হইয়াছে।

30. যে সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়া গমন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

(To find the equation of a straight line that passes through a given point and through the point of intersection of two given straight lines.)

মনে কর, নির্দিষ্ট বিন্দুটি (g, h) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটি

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ এবং } a_2x+b_2y+c_2=0.$$

তাহা হইলে এই সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $a_1x+b_1y+c_1=k(a_2x+b_2y+c_2)$ ··· (1),

কারণ, ছেদবিন্দুটি গৃহীত উভয় সরলরেখার উপর অবস্থিত বলিয়া উহার স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ (1) সিদ্ধ হইবে। এস্থলে k যে কোন একটি ধ্রুবক, যাহার মান ছেদবিন্দুগামী বিভিন্ন সরলরেখার জন্য বিভিন্ন।

এখন, সমীকরণ (1) দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাটি যদি (g, h) বিন্দু দিয়া যায়, তবে (1)এ $x=g$ and $y=h$ বসাইয়া পাই :

$$a_1g+b_1h+c_1=k(a_2g+b_2h+c_2)$$

$$\therefore \quad k=\frac{a_1g+b_1h+c_1}{a_2g+b_2h+c_2}$$

∴ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ :

$$a_1x+b_1y+c_1=\frac{a_1g+b_1h+c_1}{a_2g+b_2h+c_2}(a_2x+b_2y+c_2)$$

বা, $$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1g+b_1h+c_1}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2g+b_2h+c_2}.$$

উদা. 1. Find the angle between the straight lines

$$2x-y+1=0 \text{ and } x-3y+9=0.$$

সমীকরণদ্বয় হইতে, $y=2x+1$ এবং $y=\frac{1}{3}x+3$

∴ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হইলে,

$$\tan\theta=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$

∴ θ অর্থাৎ নির্ণেয় কোণ $=45°$.

উদা. 2. Find the angle between the straight lines

$$x+2y=3 \text{ and } 2x-3y=1.$$

সমীকরণদ্বয় হইতে, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ এবং $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

∴ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হইলে,

$$\tan\theta=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1+(-\frac{1}{2})\frac{2}{3}}=-\frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}}=-\frac{7}{4}$$

∴ θ অর্থাৎ নির্ণেয় কোণ $=\tan^{-1}(-\frac{7}{4})$.

মন্তব্য। এস্থলে সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণটি $=\tan^{-1}(-\frac{7}{4})$ (দ্রষ্টব্য, অনু. 24)।

উদা. 3. Find the angle between the straight lines

$$3x-2y+1=0 \text{ and } 2x+3y-6=0$$

সমীকরণদ্বয় হইতে, $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ এবং $y=-\frac{2}{3}x+2$

∴ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ হইলে,

$$\tan\theta=\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{2}(-\frac{2}{3})}=\frac{\frac{13}{6}}{0}=\infty$$

∴ θ অর্থাৎ নির্ণেয় কোণ $=90°$.

উদা. 4. Find the equation to the straight line, which passes through the point (2, 3) and which is parallel to the straight line

$$2x-3y+8=0 \cdots (1)$$

প্রদত্ত সরলরেখাটির সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$2x-3y+c=0 \cdots (2)$, যেখানে c যে কোন ধ্রুবক।

[কারণ, (1) ও (2) এর m একই।]

এখন, এই সরলরেখাটি (2, 3) বিন্দু দিয়া যাইবে,

যদি $2.2-3.3+c=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $c=5$ হয়।

∴ (2) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $2x-3y+5=0$.

উদা. 5. Find the equation to the straight line which passes through the point $(3,-4)$ and is perpendicular to

$$2x-3y+8=0 \cdots (1)$$

প্রদত্ত সরলরেখাটির সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$3x+2y+c=0 \cdots (2)$, যেখানে c ধ্রুবক।

এখন, এই সরলরেখাটি $(3,-4)$ বিন্দু দিয়া যাইবে,

যদি $3\times3+2\times(-4)+c=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $c=-1$ হয়।

∴ (2) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ : $3x+2y-1=0$.

উদা. 6. Find the equation to the perpendicular bisector of the segment joining the points $(-1, 4)$ and $(7, 0)$.

বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার $m=\dfrac{4-0}{-1-7}=-\frac{1}{2}$.

∴ লম্বসমদ্বিখণ্ডকের $m=2$ $(\because -\frac{1}{2}.2=-1)$

বিন্দুদ্বয়ের অন্তর্গত অংশের মধ্যবিন্দুর x-স্থানাঙ্ক $=\frac{1}{2}(-1+7)=3$ এবং y-স্থানাঙ্ক $=\frac{1}{2}(4+0)=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $y-2=2(x-3)$ বা $y-2x+4=0$.

উদা. 7. Find the point of intersection of the straight lines

$$2x+3y+5=0 \text{ and } 3x+4y+6=0.$$

মনে কর, সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে (x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্কদ্বয় দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \quad 2x_1+3y_1+5=0 \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

এবং $3x_1+4y_1+6=0 \quad \cdots \quad \cdots (2)$

$\therefore$ (1) ও (2)এ বজ্রগুণন করিয়া,

$$\frac{x_1}{18-20}=\frac{y_1}{15-12}=\frac{1}{8-9} \text{ বা, } \frac{x_1}{-2}=\frac{y_1}{3}=\frac{1}{-1}$$

$\therefore \quad x_1=2$ এবং $y_1=-3 \quad \therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দু $(2,-3)$.

উদা. 8. Show that the straight lines

$2x+3y+5=0$, $3x+4y+6=0$, $x-2y-8=0$ intersect at a point.

প্রথম ও দ্বিতীয় সরলরেখার ছেদবিন্দু $(2,-3)$ [উদা. 7]। ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা তৃতীয় সমীকরণটি সিদ্ধ হয় ; কারণ, $2-2\times(-3)-8=2+6-8=0$.

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখাত্রয় পরস্পরকে একই $(2,-3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

উদা. 9. Show that the perpendiculars drawn from the vertices of a triangle on the opposite sides are concurrent.

ABC ত্রিভুজের A, B, Cর স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

$$\text{BCর } m=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3};$$

$\therefore$ A হইতে BCর উপর লম্বের সমীকরণ $y-y_1=-\dfrac{x_2-x_3}{y_2-y_3}(x-x_1)$

$$\left[\because \frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}\times\left\{-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\right\}=-1\right]$$

বা, $x(x_2-x_3)+y(y_2-y_3)-x_1(x_2-x_3)-y_1(y_2-y_3)=0 \quad \cdots (1)$

অনুরূপে, B ও C হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$x(x_3-x_1)+y(y_3-y_1)-x_2(x_3-x_1)-y_2(y_3-y_1)=0 \quad \cdots (2)$$

এবং $x(x_1-x_2)+y(y_1-y_2)-x_3(x_1-x_2)-y_3(y_1-y_2)=0 \quad \cdots (3)$

(1), (2) ও (3) যোগ করিয়া, $x.0+y.0+0+0=0$ বা, $0=0$.

∴ লম্বত্রয় সমবিন্দু।

উদা. 10. Show that the points $(-2, 1)$, $(0, 4)$ and $(4, 10)$ are collinear.

$(-2, 1)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{y-1}{1-4}=\frac{x+2}{-2-0} \text{ বা, } \frac{y-1}{3}=\frac{x+2}{2} \text{ বা, } 3x-2y+8=0$$

এই সরলরেখাটি তৃতীয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 10)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়; কারণ, $3\times4-2\times10+8=12-20+8=0$.

∴ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ।

উদা. 11. Find the equation to the straight line which passes through the point $(1, 2)$ and through the point of intersection of the lines $x+3y+1=0$ and $2x+7y+3=0$. (C. U. 1946)

প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$x+3y+1=k(2x+7y+3) \cdots (1),$$

যেখানে k যে কোন ধ্রুবক, যাহার মান ছেদবিন্দুগামী বিভিন্ন সরলরেখার জন্য বিভিন্ন।

এই সরলরেখাটি $(1, 2)$ বিন্দু দিয়া যাইবে,

যদি $1+3\times2+1=k(2\times1+7\times2+3)$ হয়, অর্থাৎ যদি $k=\frac{8}{19}$ হয়।

∴ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ : $x+3y+1=\frac{8}{19}(2x+7y+3)$

বা, $3x+y-5=0$.

অথবা, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে সমাধান করিয়া, সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2, -1)$.

∴ $(1, 2)$ এবং $(2, -1)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণেয় সমীকরণ হইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমীকরণ } \frac{y-2}{2+1}=\frac{x-1}{1-2} \text{ বা, } \frac{y-2}{3}=\frac{x-1}{-1}$$

$$\text{বা, } 3x-3=-y+2 \text{ বা, } 3x+y-5=0.$$

উদা. 12. Find the equation to the straight line through the point of intersection of the straight lines $2x+y=4$ and $3x-2y+1=0$, and parallel to the straight line $4x-5y+3=0$.

প্রদত্ত প্রথম দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$(2x+y-4)=k(3x-2y+1)$, যেখানে k যে কোন ধ্রুবক

বা, $(2-3k)x+(1+2k)y-(4+k)=0 \quad \cdots \quad (1)$

উহাকে ট্যানজেণ্ট আকারে প্রকাশ করিলে, উহার $m=\dfrac{3k-2}{1+2k}$

আবার, $4x-5y+3=0 \cdots (2)$ কে ট্যানজেণ্ট আকারে প্রকাশ করিলে, উহার $m=\frac{4}{5}$

$\therefore$ (1) ও (2) সমান্তরাল হইবে যদি $\dfrac{3k-2}{1+2k}=\dfrac{4}{5}$ হয়, অর্থাৎ যদি $k=2$ হয়।

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $(2-6)x+(1+4)y-(4+2)=0$

বা, $4x-5y+6=0$.

অথবা, প্রদত্ত প্রথম দুইটি সমীকরণকে সমাধান করিয়া, সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (1, 2).

আবার, $4x-5y+3=0$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

$$4x-5y+c=0 \cdots (1)$$

উহা (1, 2) বিন্দু দিয়া যাইবে, যদি $4.1-5.2+c=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $c=6$ হয়।

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $4x-5y+6=0$.

মন্তব্য। এস্থলে উদা. 4 এর প্রণালী গ্রহণ করা হইয়াছে।

উদা. 13. Find the equation to the straight line that passes through the intersection of $x+2y+3=0$ and $3x+4y+7=0$ and is perpendicular to the straight line $y-x=8$. (C. U. B. Sc. 1940)

প্রদত্ত প্রথম দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$x+2y+3=k(3x+4y+7)$, যেখানে k যে কোন ধ্রুবক

বা, $(1-3k)x+(2-4k)y+(3-7k)=0 \cdots (1)$

এখন, $y-x=8$ কে ট্যানজেণ্ট আকারে প্রকাশ করিলে, উহার $m=1$ এবং (1) কে ট্যানজেণ্ট আকারে প্রকাশ করিলে, উহার $m=-(1-3k)/(2-4k)$

$\therefore$ $y-x=8$ এর উপর (1) লম্ব হইবে,

যদি $1\times\left(-\dfrac{1-3k}{2-4k}\right)=-1$ হয়, অর্থাৎ যদি $2-4k=1-3k$ বা, $k=1$ হয়।

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $-2x-2y-4=0$ বা, $x+y+2=0$.

অথবা, প্রদত্ত প্রথম দুইটি সমীকরণকে সমাধান করিয়া, সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু $(-1, -1)$

এই ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $y+1=m(x+1)$ ··· (1) (অনু. 16)। এই সরলরেখা $y-x=8$ বা, $y=1.x+8$ এর উপর লম্ব হইবে, যদি $m.1=-1$ হয় (অনু. 26), অর্থাৎ যদি $m=-1$ হয়।

∴ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ : $y+1=-x-1$ বা, $x+y+2=0$.

মন্তব্য। এস্থলে উদা. 5 এর প্রণালী গ্রহণ করা হইয়াছে।

উদা. 14. Find the equation to the straight line which passes through the intersection of the straight lines $3x-4y+1=0$ and $5x+y=1$ and cuts off equal intercepts from the axes.

(C. U. B. Sc. 1947)

প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$3x-4y+1=k\ (5x+y-1)=0 \cdots (1)$$

বা, $(3-5k)x+(-4-k)y+(1+k)=0$

এই সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করিবে,

যদি $3-5k=-4-k$ হয় (দ্রষ্টব্য, অনু. 18), অর্থাৎ যদি $k=\frac{7}{4}$ হয়।

∴ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $3x-4y+1=\frac{7}{4}(5x+y-1)$

বা, $12x-16y+4=35x+7y-7$ বা, $23x+23y-11=0$.

Exercise 4

Find the angle between the pairs of straight lines :

1. $2x-3y=4$ and $x+2y=5$.
2. $2x-3y+7=0$ and $3x+2y-8=0$.
3. $y=2x-5$ and $3y=x+7$.
4. $3x-11y=2$ and $7x-4y=5$.
5. $x=y+3$ and $y=(2-\sqrt{3})x+1$.
6. $y=(2-\sqrt{3})x+4$ and $y=(2+\sqrt{3})x-5$.

Find the equation to the straight line,

7. passing through the point $(3, -2)$ and parallel to the line $x+2y=3$.

8. passing through the point (3, 5) and parallel to the straight line $4x-3y+1=0$. (C. U. 1947)

9. passing through the point (3, 4) and perpendicular to the line $4x-3y+1=0$. (C. U. 1956)

10. passing through the point $(-2, -5)$ and perpendicular to the line $5x+6y-8=0$.

11. passing through the point (0, 0) and perpendicular to the line $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

12. Find the equation to the perpendicular bisector of the segment joining the points $(1, -3)$ and $(-5, -1)$.

Find the point of intersection of the straight lines :

13. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ and $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. (C. U. 1943)

14. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ and $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$. (C. U. 1941)

15. Prove that the three straight lines $2x-7y+10=0$, $3x-2y+1=0$ and $x-12y+21=0$ meet at a point. (C. U. B. Sc. 1945)

16. Show that the following three lines are concurrent :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \text{ and } x=y.$$

17. Find the value of m so that the three straight lines $y=3x-1$, $2y=x+3$ and $3y=mx+4$ may be concurrent. (C. U. 1955)

18. Show that the perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides meet at a point.

19. Show that the medians of a triangle are concurrent.

20. Show that the three points $(-2, -1)$, (1, 1) and (4, 3) lie in a straight line.

21. Show that the straight line joining the points $(-1, 1)$ and (5, 3) passes through the point (2, 2).

22. Obtain the equation of the straight line joining the origin to the intersection of the straight lines $2x+3y=1$ and $x-y=2$.

(C. U. B. Sc. 1938)

23. Find the equation of the straight line joining the origin to the point of intersection of the lines

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1 \text{ and } \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1. \qquad \text{(U. P. B. 1948)}$$

24. Find the equation of the straight line passing through the point (3, 2) and the intersection of the lines $3x+y-5=0$ and $x+5y+3=0$. (C. U. 1942)

25. Find the equation to the straight line through the point of intersection of the straight lines $x+2y=4$ and $4x-3y=5$ and parallel to the straight line $2x+y=3$.

26. Find the equation to the straight line through the intersection of $x+2y=0$ and $y+4x+7=0$ which is perpendicular to the straight line $3x-y=0$. (C. U. B. Sc. 1932)

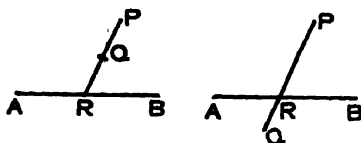
27. Find the equation to the straight line which passes through the intersection of the straight lines $2x-3y+4=0$ and $3x+4y-5=0$, and is perpendicular to the straight line $6x-7y+8=0$.

(C. U. B. Sc. 1930, '34)

28. Find the equation to the straight line through the intersection of the lines $5x+4y=20$ and $4x+5y=20$ cutting both the axes at an angle of $45°$. (C. U. 1941)

31. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একই পার্শ্বে বা বিপরীত পার্শ্বে থাকিবার সর্ত নির্ণয়।

[*To find the condition that two given points may lie on the same or opposite sides of a given straight line.*]

মনে কর, দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু P ও Qর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা ABর সমীকরণ $ax+by+c=0$.

P ও Q বিন্দুদ্বয় AB সরলরেখার একই পার্শ্বে বা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিবার সর্ত নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, PQ, ABকে R বিন্দুতে এরূপে ছেদ করে যে, PR : RQ $= m : n$.

$\therefore$ (*i*) যদি P ও Q, ABর একই পার্শ্বে থাকে, তবে R এর স্থানাঙ্ক

$$\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \quad \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

এখন, $\because$ ABর উপর R অবস্থিত,

$$\therefore \quad a\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}\right) + b\left(\frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right) + c = 0$$

বা, $a(mx_2 - nx_1) + b(my_2 - ny_1) + c(m-n) = 0$

বা, $m(ax_2 + by_2 + c) = n(ax_1 + by_1 + c)$

$\therefore \quad \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = \dfrac{m}{n}$, যাহা একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore$ P এবং Q, ABর একই পার্শ্বে থাকিলে, $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ এর একই চিহ্ন থাকিবে।

(*ii*) যদি P ও Q, ABর বিপরীত পার্শ্বে থাকে, তবে R এর স্থানাঙ্ক

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{my_2 + ny_1}{m+n}.$$

এখন, $\because$ ABর উপর R অবস্থিত,

$$\therefore \quad a\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right) + b\left(\frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) + c = 0$$

বা, $a(mx_2 + nx_1) + b(my_2 + ny_1) + c(m+n) = 0$

বা, $m(ax_2 + by_2 + c) = -n(ax_1 + by_1 + c)$

$\therefore \quad \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\dfrac{m}{n}$, যাহা একটি ঋণাত্মক সংখ্যা।

$\therefore$ P এবং Q, ABর বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে,

$ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ এর বিপরীত চিহ্ন থাকিবে।

কাজেই (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ সরলরেখাটির একই পার্শ্বে থাকিবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ রাশিদ্বয়ের একই চিহ্ন হয় (অর্থাৎ উভয়ের চিহ্ন + বা উভয়ের চিহ্ন − হয়) এবং বিন্দুদ্বয় বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে যদি রাশিদ্বয়ের বিপরীত চিহ্ন হয় (অর্থাৎ উহাদের একটির চিহ্ন + এবং অপরটির চিহ্ন − হয়)।

মন্তব্য 1. $ax+by+c=0$ সরলরেখাটির যে পার্শ্বের কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $ax+by+c$এ বসাইলে উহার মান ধনাত্মক হয়, সেই পার্শ্বকে $ax+by+c=0$ এর ধনাত্মক পার্শ্ব (positive side) বলে এবং অপর পার্শ্বকে ঋণাত্মক পার্শ্ব বলে। যেমন,

$2x-3y-8$ এ $x=3$, $y=-4$ বসাইলে, $2x-3y-8=2.3-3(-4)-8$ $=10$, যাহা ধনাত্মক ; সুতরাং $2x-3y-8=0$ এর যে পার্শ্বে $(3, -4)$ অবস্থিত, তাহা রেখাটির ধনাত্মক পার্শ্ব এবং অপর পার্শ্বটি উহার ঋণাত্মক পার্শ্ব।

মন্তব্য 2. $ax+by+c$এ মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ বসাইলে উহার মান হয় c ; সুতরাং $ax+by+c=0$ এর c ধনাত্মক হইলে, মূলবিন্দুটি সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্বে থাকিবে এবং c ঋণাত্মক হইলে, মূলবিন্দুটি সরলরেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে থাকিবে।

মন্তব্য 3. $ax+by+c$এ (x_1, y_1) বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইলে হয় ax_1+by_1+c এবং মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ বসাইলে হয় c ; সুতরাং ax_1+by_1+c এবং cর একই চিহ্ন হইলে, (x_1, y_1) এবং মূলবিন্দুটি $ax+by+c=0$ এর একই পার্শ্বে থাকিবে এবং বিপরীত চিহ্ন হইলে, বিন্দু দুইটি রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে।

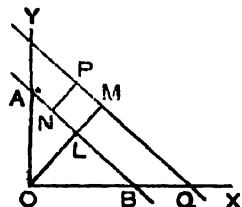
32. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[*To find the length of the perpendicular dropped from a given point upon a given straight line.*]

মনে কর, P (x_1, y_1) নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB নির্দিষ্ট সরলরেখা। PN যেন ABর উপর লম্ব। PN এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

ABর উপর OL লম্ব টান। P দিয়া ABর সমান্তরাল PQ সরলরেখা টান। OLকে বর্ধিত কর ; উহা যেন PQকে M বিন্দুতে ছেদ করিল।

(*i*) মনে কর, $OL=p$, $OM=p_1$ এবং $\angle XOL=\alpha$.

তাহা হইলে, ABর সমীকরণ $x \cos\alpha+y \sin\alpha-p=0$ ⋯ (i) এবং PQর সমীকরণ $x \cos\alpha+y \sin\alpha-p_1=0$.

এখন, $\because$ P (x_1, y_1), PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p_1 = 0$$

$$\therefore \quad p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha.$$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য PN = ML ($\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু)

$$= \text{OM} - \text{OL} = p_1 - p$$

$$= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$$

(ii) মনে কর, ABর সমীকরণ $Ax + By + c = 0 \cdots (1)$

প্রথমে সমীকরণটিকে $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \cdots (2)$ এর আকারে প্রকাশ করিয়া লও।

$\therefore$ (1) কে $\sqrt{A^2 + B^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \cdots (3)$$

এখন, $\because$ (2) এবং (3) একই AB সরলরেখার সমীকরণ,

$$\therefore \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \ -p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\therefore$ P(x_1, y_1) হইতে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য PN

$= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$ (পূর্বে প্রমাণিত)

$$= x_1 \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + y_1 \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

মন্তব্য 1. লম্বের দৈর্ঘ্যের চিহ্ন। চিত্র হইতে দেখা যায়, P (x_1, y_1) বিন্দুটি, মূলবিন্দু এবং ABর মধ্যে থাকিলে লম্ব PN এর দৈর্ঘ্য = OM − PN = $p - p_1$ $= -(p_1 - p)$.

$\therefore$ প্রথম স্থলে, লম্ব PN $= -(x_1 \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$

এবং দ্বিতীয় স্থলে, লম্ব PN $= -(Ax_1 + By_1 + C)/\sqrt{A^2+B^2}$.

$\therefore$ P (x_1, y_1) বিন্দুটি সরলরেখাটির একপার্শ্বে থাকিলে লম্বের দৈর্ঘ্য যদি ধনাত্মক হয়, তবে অপর পার্শ্বে থাকিলে উহা ঋণাত্মক হইবে।

যদি কোন সরলরেখার সমীকরণকে এরূপে লেখা হয় যে, উহার ধ্রুবক পদটি ধনাত্মক হয়, তবে মূলবিন্দুটি সরলরেখাটির যে পার্শ্বে আছে, তাহা সরলরেখাটির

ধনাত্মক পার্শ্ব এবং অপর পার্শ্বটি উহার ঋণাত্মক পার্শ্ব (অনু. 31 এর মন্তব্য 2)। কোন সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে পতিত লম্বকে ধনাত্মক ধরা হয় এবং ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে পতিত লম্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়।

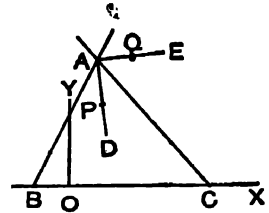
মন্তব্য 2. লম্বের দৈর্ঘ্যের চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, লম্বের দৈর্ঘ্য বলিতে উহার সাংখ্যমান বা পরমমান বুঝায়।

মন্তব্য 3. মূলবিন্দু (0, 0) হইতে $ax+by+c=0$ এর উপর পতিত লম্ব

$$=(a.0+b.0+c)/\sqrt{a^2+b^2}=c/\sqrt{a^2+b^2}.$$

33. দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equations of the bisectors of the angles between two straight lines.*]

মনে কর, AB ও AC সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$, যাহাদিগকে এরূপে লেখা হইয়াছে যে, c_1 এবং c_2 উভয়েই ধনাত্মক। তাহা হইলে মূলবিন্দু 0 উভয় সরলরেখারই ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত (অনু. 31 এর মন্তব্য 2)।

মনে কর, BAC কোণের AD অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং AE বহিঃসমদ্বিখণ্ডক। ADর উপর যে কোন বিন্দু P এবং AEর উপর যে কোন বিন্দু Q লও। উহাদের স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (g, h) এবং (k, l)

∵ P, মূলবিন্দুর সহিত ABর একই পার্শ্বে অবস্থিত ;

∴ P, ABর ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত ;

∴ P হইতে ABর উপর পতিত লম্ব ধনাত্মক।

অনুরূপে, P হইতে ACর উপর পতিত লম্ব ধনাত্মক।

এখন, BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ADর উপর P অবস্থিত বলিয়া, এই লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান ;

$$\frac{a_1g+b_1h+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2g+b_2h+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, ∵ Q, ABর ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত ;

∴ Q হইতে ABর উপর পতিত লম্ব ধনাত্মক।

∵ Q, ACর ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত ;

∴ Q হইতে ACর উপর পতিত লম্ব ঋণাত্মক।

এখন, BAC কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক AEর উপর Q অবস্থিত বলিয়া, এই লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান ;

$$\therefore \quad \frac{a_1k+b_1l+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\frac{a_2k+b_2l+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \cdots (2)$$

∴ (g, h) ও (k, l) কে চলন্তবিন্দু (x, y) ধরিলে, (1) ও (2) হইতে, সমদ্বিখণ্ডক-দ্বয়ের সমীকরণ $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

এই সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটি হইল BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক ADর সমীকরণ, যাহার ভিতর মূলবিন্দু 0 অবস্থিত।

মন্তব্য 1. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ

$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$ এবং $x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$

হইলে, উহাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2).$$

উদাহরণ 1. Show that the origin and the point (2, 3) are on the opposite sides of the line $3x-4y+5=0$.

$3x-4y+5$ এ $x=0$, $y=0$ বসাইলে $3.0-4.0+5=5$, যাহা ধনাত্মক ;

∴ মূলবিন্দুটি প্রদত্ত সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার, $3.2-4.3+5=-1$, যাহা ঋণাত্মক ; ∴ (2, 3) বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

∴ মূলবিন্দুটি এবং (2, 3) বিন্দুটি প্রদত্ত-রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

উদাহরণ 2. Find the length of the perpendicular drawn from (2, 3) upon the straight line $3x+4y+7=0$.

$$\frac{3.2+4.3+7}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{25}{5} = 5 \quad \therefore \text{ লম্বের দৈর্ঘ্য} = 5.$$

উদাহরণ 3. Find the length of the perpendicular drawn from $(-4, 5)$ upon the straight line $5(x-2)=12(y-3)$.

$5(x-2)=12(y-3)$ হইতে, $5x-12y+26=0$.

এখন, $\dfrac{5(-4)-12.5+26}{\sqrt{5^2+12^2}}=-\frac{54}{13}=-4\frac{2}{13}$

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=4\frac{2}{13}$.

উদাহরণ 4. If p_1, p_2 be the perpendiculars from the origin upon the lines $x \sin\theta+y\cos\theta=\frac{1}{2}a\sin 2\theta$ and $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$, then $4p_1^2+p_2^2=a^2$.

$$p_1=\frac{0.\sin\theta+0.\cos\theta-\frac{1}{2}a\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=-\tfrac{1}{2}a\sin 2\theta$$

$$p_2=\frac{0.\cos\theta-0.\sin\theta-a\cos 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=-a\cos 2\theta$$

$$\therefore\quad 4p_1^2+p_2^2=4.\tfrac{1}{4}a^2\sin^2 2\theta+a^2\cos^2 2\theta$$
$$=a^2(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)=a^2.$$

উদাহরণ 5. Find the distance between the parallel straight lines $3x+4y=10$ and $3x+4y+5=0$.

সরলরেখাদ্বয়ের যে কোন একটির যে কোন বিন্দু হইতে অপরটির উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্যই হইবে নির্ণেয় দূরত্ব।

প্রথম সমীকরণে $x=2$ হইলে, $y=1$; $\therefore$ $(2, 1)$ বিন্দুটি প্রথম সরলরেখার উপর অবস্থিত।

$(2, 1)$ বিন্দু হইতে দ্বিতীয় সরলরেখাটির উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3.2+4.1+5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3.\quad\therefore \text{ নির্ণেয় দূরত্ব}=3.$$

উদাহরণ 6. Find the co-ordinates of the foot of the perpendicular from the point $(-2, 2)$ upon the straight line $2x+y=8$ and hence deduce the length of the perpendicular from the point on the line.

$2x+y=8$ এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $x-2y+c=0$. উহা $(-2, 2)$ বিন্দু দিয়া যাইবে যদি $-2-2.2+c=0$ হয়,

অর্থাৎ যদি $c=6$ হয়। $\therefore$ $(-2, 2)$ হইতে $2x+y=8$ এর উপর পতিত লম্বের সমীকরণ $x-2y+6=0$.

$\therefore$ $2x+y=8$ এবং $x-2y+6=0$-এর ছেদবিন্দুই লম্বের পাদবিন্দু হইবে।

$\therefore$ সমাধান করিয়া লম্বের পাদবিন্দু $(2, 4)$.

$\therefore$ লম্বের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-2-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

উদাহরণ 7. Show that the perpendiculars from any point of the straight line $7x-4y+4=0$ upon the two straight lines $3x+4y+1=0$ and $5x+12y+1=0$ are equal.

$7x-4y+4=0$ এ $x=0$ হইলে, $y=1$; $\therefore$ $7x-4y+4=0$ এর উপর $(0, 1)$ একটি বিন্দু।

$(0, 1)$ বিন্দু হইতে দ্বিতীয় সরলরেখার উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{3.0+4.1+1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1.$$

$(0, 1)$ বিন্দু হইতে তৃতীয় সরলরেখার উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{5.0+12.1+1}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{13}{13}=1,$$

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

উদাহরণ 8. Find the lines through the point of intersection of $y-2x+2=0$ and $y-3x+5=0$, which are at a distance of $7/\sqrt{2}$ from the origin. (U. P. B. 1942)

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, $x=3$ এবং $y=4$. সুতরাং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 4)$। এই বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $(y-4)=m(x-3)$ $\cdots$ (1) বা $mx-y+(4-3m)=0$.

মূলবিন্দু হইতে এই সরলরেখার দূরত্ব $=\dfrac{m.0-0+(4-3m)}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}$

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে, $\dfrac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ বা, $\dfrac{16-24m+9m^2}{m^2+1}=\dfrac{49}{2}$

বা, $31m^2+48m+17=0$ বা, $31m^2+31m+17m+17=0$

বা, $(m+1)(31m+17)=0$ $\therefore$ $m=-1, -\frac{17}{31}$

$\therefore$ (1) হইতে, $m=-1$ হইলে, $y-4=-1(x-3)$ বা, $x+y-7=0$

এবং $m=-\frac{17}{31}$ হইলে, $y-4=-\frac{17}{31}x-3)$ বা, $17x+31y-175=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয় $x+y-7=0$ এবং $17x+31y-175=0$.

উদাহরণ 9. Find the equation to the straight line passing through the origin and the point of intersection of the straight lines $x-y-4=0$ and $y+7x+20=0$ and prove that it bisects the angle between them. (U. P. B. 1951)

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, $x=-2$ এবং $y=-6$. সুতরাং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2,-6)$.

$\therefore$ $(0, 0)$ এবং $(-2, -6)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x-0}{0-(-2)}=\frac{y-0}{0-(-6)} \text{ বা, } \frac{x}{1}=\frac{y}{3} \text{ বা, } 3x-y=0.$$

আবার, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী $3x-y=0$এর উপর অবস্থিত $(0, 0)$ বিন্দু হইতে $x-y-4=0$ এর উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{4}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \text{ এবং}$$

$y+7x+20=0$ এর উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{20}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

$\therefore$ লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান বলিয়া, $3x-y=0$ সরলরেখাটি প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণ 10. Find the equations of the bisectors of the angles between the straight lines $3x-4y+1=0$ and $5x+12y-3=0$.

দ্বিতীয় সমীকরণের ধ্রুবক পদটিকে ধনাত্মক করিয়া লিখিলে, সমীকরণদ্বয় হয়,

$$3x-4y+1=0 \text{ এবং } -5x-12y+3=0.$$

তাহা হইলে, এই সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত যে কোণটির ভিতর মূলবিন্দুটি অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে

$$\frac{3x-4y+1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{-5x-12y+3}{\sqrt{5^2+12^2}} \text{ বা, } \frac{3x-4y+1}{5}=\frac{-5x-12y+3}{13}$$

বা, $64x+8y-2=0$ বা, $32x+4y-1=0$.
অপর কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে

$$\frac{3x-4y+1}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{-5x-12y+3}{\sqrt{5^2+12^2}} \text{ বা, } \frac{3x-4y+1}{5} = \frac{5x+12y-3}{13}$$

বা, $14x-112y+28=0$ বা, $x-8y+2=0$.

উদাহরণ 11. Find the equation of the straight line that lies mid-way between $x+2y+8=0$ and $x+2y-12=0$.

$x+2y+8=0$ এ $x=0$ হইলে, $y=-4$;
$\therefore$ $x+2y+8=0$ সরলরেখাটি $(0,-4)$ বিন্দুগামী।
অনুরূপে, $x+2y-12=0$ সরলরেখাটি $(0, 6)$ বিন্দুগামী।
$(0,-4)$ এবং $(0, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,1)$.

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল যে সরলরেখা $(0, 1)$ বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। এখন,

প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x+2y+c=0\cdots(1)$. ইহা $(0, 1)$ বিন্দু দিয়া যাইবে, যদি $0+2.1+c=0$ অর্থাৎ $c=-2$ হয়।

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $x+2y-2=0$.

উদাহরণ 12. Find the distance of the point $(-1, 2)$ from the line $2x+y=10$ measured parallel to the line $4x-3y=12$.

$4x-3y=12$ এর সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $4x-3y+c=0$. ইহা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়া যাইবে, যদি $4(-1)-3.2+c=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $c=10$ হয়।

$\therefore$ $4x-3y=12$ এর সমান্তরাল যে সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ $4x-3y+10=0$.

এই সরলরেখা $2x+y=10$ কে $(2, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে (সমাধান করিয়া);

$\therefore$ $(2, 6)$ এবং $(-1, 2)$ এর ব্যবধান নির্ণেয় দূরত্ব হইবে।
$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(2+1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Exercise 5

1. Show that the origin and the piont (2, 1) lie on the positive side of the straight line $2x-3y+4=0$.

2. Show that the points (1, 2) and (2, 3) lie on the opposite sides of the straight line $x+2y=6$.

Find the length of the perpendicular from

3. the origin upon the straight line $3x-4y+10=0$.

4. the point (2, 3) upon the straight line $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

5. the point $(-2, 3)$ upon the straight line

$$5(x-2)=12(y+4).$$

6. the origin upon the straight line joining (a, b) and (b, a).

Find the distance between the parallel straight lines

7. $3x+4y+8=0$ and $3x+4y-7=0$.

8. $5x-12y=10$ and $5x-12y+3=0$.

9. Find the equation of the line which lies mid-way between the parallel straight lines $2x+3y-4=0$ and $2x+3y+16=0$.

10. Find the equation of the line which lies mid-way between the lines $3x-4y-9=0$ and $3x-4y-1=0$.

11. Find the co-ordinates of the foot of the perpendicular from the point (3, 7) upon the straight line $3x+4y=12$ and hence deduce the length of the perpendicular from the point on the line.

12. Find the distance of the point $(-2, 1)$ from the line $2x+y=8$ measured parallel to the line $3x-4y+5=0$.

13. Show that the perpendiculars drawn from any point of the straight line $3x+11y=8$ upon the two straight lines $3x-4y+2=0$ and $12x+5y-6=0$ are equal.

14. Show that the perpendiculars let fall from any point of the straight line $7x-9y+10=0$ upon the two straight lines $3x+4y=5$ and $12x+5y=7$ are equal to each other. (C. U. B. Sc. 1952)

15. The vertices of a triangle are $(6, 4)$, $(4, -2)$, $(-1, 2)$. Find the length of the perpendicular from $(-1, 2)$ to the opposite side.

16. Find the perpendicular distance from the origin of the perpendicular from the point $(1, -2)$ upon the straight line $4x-3y+2=0$.

17. If the sum of the perpendiculars dropped from a variable point P on the two straight lines $x+y-5=0$ and $3x-2y+7=0$ be always equal to 10, prove that P must move on a right line.

(C. U. 1950)

18. Find the equations of the bisectors of the angles between the straight lines $3x+4y+1=0$ and $5x-12y-1=0$.

19. Find the lines through the intersection of the lines $2x+y-5=0$ and $5x-2y+1=0$ which are at distance of $\sqrt{2}$ from the origin.

20. Find the internal bisectors of the angles of the triangle whose sides are $x=0$, $y=0$ and $4x+3y-6=0$ and find the in-centre.

পরিমিতি (Mensuration)

প্রথম অধ্যায়

ঘনফল

সমকোণী চৌপল

1. ইট, বৃক্ষ, জল, বায়ু প্রভৃতি যে সকল পদার্থ স্থান জুড়িয়া থাকে, তাহাদিগকে **ঘনবস্তু** (Solid) বলে। কাজেই ঘনবস্তুমাত্রেরই দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ (গভীরতা বা উচ্চতা) আছে। উহাদিগকে ঘনবস্তুর **আয়তন** (Dimension) বলে।

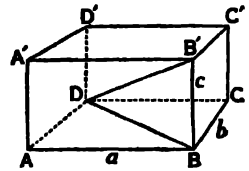
ঘনবস্তুর উপরিভাগকে **তল** (Surface) বলে। ঘনবস্তুমাত্রই এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, বলের একটি তল কিন্তু ইটের ছয়টি তল।

কোন ঘনবস্তুর তলগুলি যে সকল রেখায় মিলিত থাকে, তাহাদিগকে উহার **ধার** (Edge) বলে। কোন ঘনবস্তু যতটা স্থান জুড়িয়া থাকে, তাহার পরিমাণকে **ঘনবস্তুটির ঘনফল** (Volume) বলে।

2. যে ঘনবস্তুর ছয়টি তল এবং যাহার দুই দুইটি বিপরীত তল সমতল ও সমান্তরাল, তাহাকে **চৌপল** (Parallelopiped) বলে।

যে চৌপলের তলগুলি আয়তক্ষেত্র, তাহাকে **সমকোণী চৌপল** (Rectangular Parallelopiped) বা **আয়তিক ঘন** (Rectangular solid) বলে। যেমন, একখানি ইট।

যে সরলরেখা কোন সমকোণী চৌপলের দুইটি বিপরীত কোণ যোগ করে, তাহাকে উহার **কর্ণ** (Diagonal) বলে। সমকোণী চৌপলের চারিটি কর্ণ।

3. **সমকোণী চৌপলের ঘনফল।** $ABC'D'$ একটি সমকোণী চৌপল, যাহার AB দৈর্ঘ্য, BC প্রস্থ এবং BB' উচ্চতা। $ABCD$ তলকে উহার ভূমি, $AA'B'B$ তলকে উহার এক পার্শ্ব এবং $BB'C'C$ তলকে উহার এক প্রান্ত বলা যায়। মনে কর AB, BC ও BB' এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c একক। তাহা হইলে,

(1) $ABC'D'$ এর ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$= abc$ ঘন একক।

অথবা, $ABC'D'$ এর ঘনফল = $ABCD$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা BB'

$= abc$ ঘন একক।

আবার, $\because$ দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা = ঘনফল

$\therefore$ দৈর্ঘ্য = ঘনফল ÷ (প্রস্থ × উচ্চতা)

প্রস্থ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × উচ্চতা)

উচ্চতা = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ)

(2) ABC′D′ এর ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}) \times (\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{উচ্চতা}) \times (\text{প্রস্থ} \times \text{উচ্চতা})}$

$= \sqrt{\text{ভূমির ক্ষেত্রফল} \times \text{এক পার্শ্বের ক্ষেত্রফল} \times \text{এক প্রান্তের ক্ষেত্রফল}}$ ।

4. **সমকোণী চৌপলের কর্ণ।** মনে কর, ABC′D′ সমকোণী চৌপলটির DB′ কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে (পৃঃ 1এর চিত্র)।

$\angle DBB' = 1$ সমকোণ, $\therefore$ DBB′ একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং DB′ উহার অতিভুজ ;

$$\therefore \quad DB'^2 = DB^2 + BB'^2 \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $\because$ $\angle DAB = 1$ সমকোণ, $\therefore$ DAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং DB উহার অভিভুজ ;

$\therefore$ $DB^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2$ ($\because$ আয়তের বিপরীত বাহু)

$\therefore$ (1) হইতে, $DB'^2 = AB^2 + BC^2 + BB'^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2)$ ক্ষেত্রফলের একক।

$\therefore$ $DB' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ দৈর্ঘ্যের একক।

অতএব, নিয়ম দাঁড়াইল :

নিয়ম। কোন সমকোণী চৌপলের আয়তন তিনটি একই একক দ্বারা প্রকাশিত থাকিলে, উহাদের এককের সংখ্যাগুলির বর্গের যোগফল লও। এই যোগফলের বর্গমূল লইলে ঐ একক দ্বারা প্রকাশিত কর্ণের এককের সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

সংক্ষেপে,

সমকোণী চৌপলের কর্ণ $= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2 + (\text{বেধ})^2}$ ।

মন্তব্য 1. এইরূপে দেখান যায় যে, অপর তিনটি কর্ণের প্রত্যেকটি

$= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2 + (\text{বেধ})^2}$;

অতএব, সমকোণী চৌপলের কর্ণ চতুষ্টয় পরস্পর সমান।

মন্তব্য 2. প্রমাণ শিখিবার প্রয়োজন নাই। সূত্রটি মনে রাখিলেই চলিবে।

ঘনক

5. যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ এই তিনটি আয়তনই পরস্পর সমান, তাহাকে **ঘনক** (Cube) বলে।

ঘনককে সমকোণী চৌপলের **বিশেষ স্থল** (Particular case) বলা যাইতে পারে। উহার ঘনফল এবং তলপরিমাণ নির্ণয়ের সূত্রগুলি সমকোণী চৌপলের সূত্রগুলিরই অনুরূপ।

6. **ঘনকের ঘনফল।** ঘনকের আয়তন তিনটি পরস্পর সমান,

$$\therefore \quad \text{দৈর্ঘ্য} = \text{প্রস্থ} = \text{বেধ} \,;$$

$$\therefore \quad \text{ঘনকের ঘনফল} = \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ} \times \text{বেধ}$$

$$= (\text{দৈর্ঘ্য})^3 = (\text{প্রস্থ})^3 = (\text{বেধ})^3$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{\text{ঘনফল}} = \text{দৈর্ঘ্য} = \text{প্রস্থ} = \text{বেধ} \text{ ।}$$

7. **ঘনকের কর্ণ।** যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ পরস্পর সমান, তাহা একটি ঘনক। সুতরাং কোন ঘনকের প্রত্যেকটি আয়তনের দৈর্ঘ্যমান a এবং কর্ণের দৈর্ঘ্যমান d হইলে,

$$d = \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2 + (\text{বেধ})^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore \quad a = \frac{d}{\sqrt{3}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

উদা. 1. Find the number of bricks whose length, breadth and thickness are 10, 5 and 3 inches respectively that will be required to build a wall of which the length, height and thickness are 30, 10 and $1\frac{1}{2}$ feet respectively.

$$\text{দেওয়ালের ঘনফল} = (30 \times 10 \times 1\tfrac{1}{2}) \text{ ঘনফুট এবং}$$

$$\text{প্রত্যেক ইটের ঘনফল} = (\tfrac{5}{6} \times \tfrac{5}{12} \times \tfrac{1}{4}) \text{ ঘনফুট ;}$$

$$\therefore \quad \text{ইটের সংখ্যা} = 30 \times 10 \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{6}{5} \times \tfrac{12}{5} \times 4 = 4320.$$

উদা. 2. The volume of a cube is 15 cubic feet 1080 cubic inches. Find the length of each edge.

$$\text{ঘনফল} = (15 \times 1728 + 1080) \text{ ঘনইঞ্চি} = 27000 \text{ ঘনইঞ্চি}$$

$$\therefore \quad \text{প্রত্যেক ধার} = \sqrt[3]{27000} \text{ ইঞ্চি} = 30 \text{ ইঞ্চি} = 2 \text{ ফুট } 6 \text{ ইঞ্চি ।}$$

উদা. 3. Three cubes of iron whose edges are 3, 4 and 5 inches respectively are melted and formed into a single cube. Find the diagonal.

শেষোক্ত ঘনকের ঘনফল $= (3^3 + 4^3 + 5^3)$ ঘনইঞ্চি $= 216$ ঘনইঞ্চি

$\therefore$ উহার ধার $= \sqrt[3]{216}$ ইঞ্চি $= 6$ ইঞ্চি

$\therefore$ উহার কর্ণ $= 6\sqrt{3}$ ইঞ্চি $= \sqrt{6^2 \times 3}$ ইঞ্চি

$= \sqrt{108}$ ইঞ্চি $= 10{\cdot}39$ ইঞ্চি (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

উদা. 4. Find how many square inches of planks will be required to make a box whose external length, breadth and height will be 20, 18 and 14 inches respectively. If the weight of a cubic foot of water is $62\frac{1}{2}$ lbs. and the specific gravity of planks is $\frac{4}{5}$, find the weight of the box.

তক্তার বেধ 1 ইঞ্চি ; সুতরাং বাক্সটির অন্তর্ভাগের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 18 ইঞ্চি, 16 ইঞ্চি এবং 12 ইঞ্চি। এখন,

অন্তর্ভাগসহ বাক্সের ঘনফল $= (20 \times 18 \times 14)$ ঘনইঞ্চি $= 5040$ ঘনইঞ্চি

বাক্সের অন্তর্ভাগের ঘনফল $= (18 \times 16 \times 12)$ ঘনইঞ্চি $= 3456$ ঘনইঞ্চি

$\therefore$ তক্তার ঘনফল $= (5040 - 3456)$ ঘনইঞ্চি $= 1584$ ঘনইঞ্চি

এখন, $\because$ তক্তার বেধ $= 1$ ইঞ্চি,

$\therefore$ তক্তার ক্ষেত্রফল $= (1584 \div 1)$ বর্গইঞ্চি $= 1584$ বর্গ ইঞ্চি।

আবার, 1584 ঘনইঞ্চি $= \frac{1584}{12 \times 12 \times 12}$ ঘনফুট $= \frac{11}{12}$ ঘনফুট।

এখন, $\frac{11}{12}$ ঘনফুট জলের ওজন $= \frac{11}{12} \times 62\frac{1}{2}$ পাউণ্ড ;

$\therefore$ $\frac{11}{12}$ ঘনফুট তক্তার ওজন $= (\frac{11}{12} \times \frac{125}{2} \times \frac{4}{5})$ পাউণ্ড

$= \frac{275}{6}$ পাউণ্ড $= 45\frac{5}{6}$ পাউণ্ড।

$\therefore$ তক্তার ক্ষেত্রফল 1584 বর্গ ইঞ্চি এবং ওজন $45\frac{5}{6}$ পাউণ্ড।

Exercise 1

1. Find the volume of a rectangular solid whose dimensions are 8 ft., 6 ft. and $4\frac{1}{2}$ ft.

2. Find the volume of a rectangular parallelopiped whose length is $3\frac{1}{3}$ yards, breadth 8 feet and height 18 inches.

3. Find the volume of a cube whose edge is 1 yd. 2 ft.

4. The area of the base of a rectangular solid is 5 sq. ft. 16 sq. in. and its height is 6 ft. Find its volume.

5. The volume of a rectangular solid is 75 c. ft. and the area of its base is 7 sq. ft. 72 sq. in. Find its height.

6. The volume of a rectangular solid is 420 c. ft., its length is 9 ft. 4 in. and height 7 ft. 6 in. Find its breadth.

7. Find the number of bricks that will be required to construct a wall of dimensions 20 ft., 8 ft. and 1 ft. 8 in. if the dimensions of a brick be 10, 5 and 3 in.

8. Find the number of bricks that will be required to construct a wall surrounding a rectangular garden whose length is 120 ft. and breadth 90 ft., the length, breadth and thickness of each brick being 9, $4\frac{1}{2}$ and 3 in. respectively. (C. U. 1935)

9. The areas of the base, a brink and a side of a rectangular solid are 96, 120 and 80 sq. ft. respectively. Find its volume.

10. If the weight of a cubic foot of water is $62\frac{1}{2}$ pounds, find the weight of water that a cistern of length 12 ft., breadth 5 ft. 4 in. and depth 4 ft. 3 in. will contain.

11. Show that if the dimensions of a rectangular solid be doubled, its volume will be 8 times its original volume.

12. A room contains 2550 c. ft. of air. If its breadth be 12 ft. 6 in. and height 11 ft. 4 in., find its length.

13. The area of the base of a cube is 64 sq. ft. Find the weight of the cube if one cubic foot weigh $2\frac{1}{2}$ mds.

14. The length, breadth and thickness of a rectangular solid are 12, 4 and 3 feet respectively. Find its diagonal.

15. Three cubes of gold whose edges are 3, 4 and 5 inches respectively are melted and formed into a single cube. Show that its edge is 6 in.

16. The length of a cube is a. Show that its diagonal is $a\sqrt{3}$ and that of each surface is $a\sqrt{2}$.

17. Three cubes of iron of edges 6, 8 and 10 inches respectively are melted and formed into a single cube. Find its diagonal.

18. The dimensions of a room are 30, 15 and 10 feet. Find the length of the longest iron rod that can be kept in it.

19. The diagonal of a cube is $2\frac{1}{4}$ feet. Find its volume.

20. A cubic inch of gold is beaten into a sheet 10 ft. square. Find the thickness of the sheet.

21. If the weight of a cubic foot of iron be 6 mds., find how many iron rods each of dimensions 12′ 6″, 4″ and 3″ can be made with 300 mds. of iron.

22. The depth of water decreases by $4\frac{1}{2}$ inches if 50 bucketfuls of water is taken out of a cistern 16 ft. long and 12 ft. 6 in. wide. Find how much water the bucket contains.

23. The length of a room 12 ft. high is $2\frac{1}{2}$ times its breadth. If the room contains 3000 c. ft. of air, find the perimeter of the room.

24. A cistern contains $243\frac{3}{4}$ c. ft. of water. If another cistern 4 ft. 4 in. deep with a square base contains 4 times as much water, find the length of the latter cistern. (C. U. 1910)

25. Water flows into a cistern 10 ft. long and 9 ft. wide through an opening 3 in. square. If the depth of water increases by 2 ft. per hour, find the rate at which the water flows per minute.

26. The length of a cistern is 1[illegible]0 ft. and breadth 64 ft. Water flows into it through an opening 4 in. square and the depth of water increases by 1 foot in 4 hours. Find the rate of flow of water in mile per hour.

27. A box of inner dimensions 24, 15 and 10 inches is to be made with planks 1 inch thick. Find how many square inches of planks will be required.

28. A box of outer dimensions 30, 18 and 12 inches is to be made with planks $\frac{1}{2}$ inch thick. Find how many cubic inches of planks will be required.

29. A box of outer dimensions 24, 20 and 18 inches are made with planks 1 inch thick. If the weight of 1 c. ft. of water is $62\frac{1}{2}$ lbs. and the specific gravity of plank $\frac{3}{5}$, find the weight of the box.

30. The dimensions of a rectangular solid are as 5 : 3 : 2 and its volume is 101 c. ft. 432 c. in. Find the dimensions.

31. The length of a cistern is twice its breadth and its depth is half the difference of its length and breadth. If the cistern contains 512 c. ft. of water, find its dimensions.

32. The length of a rectangular solid is 4 ft., breadth 1 ft. 4 in. and diagonal 4 ft. 4 in. Find its height.

33. The volume of a rectangular solid is 36 c. ft. and its diagonal 7 ft. If its length is 6 ft., find its breadth and thickness.

34. A school room is to be built to accommodate 70 students, so as to allow each student $8\frac{1}{2}$ sq. ft. of floor space and $110\frac{1}{2}$ c. ft. of open space. If the length of the room is 34 ft., find its breadth and height.

35. The length of a cistern, $10\frac{1}{2}$ ft. deep, is twice its breadth and it contains $37\frac{1}{2}$ tons of water. If the weight of 1 c. ft. of water is 1000 oz., find the length and the breadth of the cistern.

(A. U. 1926)

প্রিজ ম্

8. যে ঘনবস্তুর পার্শ্বগুলি সামান্তরিক এবং প্রান্তদ্বয় সমান্তরাল, তাহাকে **প্রিজ ম্** (Prism) বলে।

কোনও প্রিজ ম্ উহার যে প্রান্তের উপর দণ্ডায়মান থাকে, তাহাকে প্রিজ ম্‌টির **ভূমি** (Base) বলে।

কোনও প্রিজ মের প্রান্তদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে প্রিজ ম্‌টির **অক্ষ** (Axis) বলে এবং প্রান্তদ্বয়ের অন্তর্গত অক্ষাংশকে উহার দৈর্ঘ্য (Length) বলে।

কোনও প্রিজ মের প্রান্তদ্বয়ের ব্যবধানকে (Perpendicular distance) প্রিজ ম্‌টির **উচ্চতা** (Height) বলে।

যে প্রিজ মের প্রান্তদ্বয় সুষমক্ষেত্র, তাহাকে সুষম প্রিজ ম্ (Regular Prism) বলে।

যে প্রিজ মের পার্শ্বস্থ ধারগুলি প্রিজ ম্‌টির দুই প্রান্তের উপর লম্ব, তাহাকে **সমকোণী প্রিজ ম্** ((Right Prism) বলে।

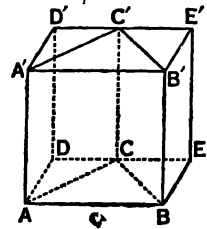
সমকোণী প্রিজ মের পার্শ্বস্থ ধারগুলি পরস্পর সমান এবং উহাদের প্রত্যেকটি সমকোণী প্রিজ মের **উচ্চতা** (Height)।

সমকোণী প্রিজ্‌মের পার্শ্বগুলি আয়তক্ষেত্র এবং প্রান্তদ্বয় সমান্তরাল ও সর্বসম ঋজুরেখ ক্ষেত্র। প্রান্তদ্বয় ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ হইতে পারে। সমকোণী চৌপলকে সমকোণী প্রিজ্‌ম্‌ বলা যাইতে পারে।

সমকোণী ত্রিকোণ প্রিজ্‌মের ঘনফল।

9. ABC′ যেন একটি সমকোণী ত্রিকোণ প্রিজ্‌ম্‌। উহার উচ্চতা AA′ যেন h একক এবং উহার ভূমি যেন △ABC, যাহার ক্ষেত্রফল A বর্গ একক।

প্রিজ্‌ম্‌টির ঘনফল নির্ণয় করিতে হইবে।

C দিয়া ABর সমান্তরাল DE আঁক। A ও B হইতে DEর উপর লম্ব আঁক; উহারা যেন DEর সহিত যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে মিলিত হইল। তাহা হইলে ABED একটি আয়ত হইল। আয়তটিকে ভূমি ধরিয়া h একক উচ্চতাবিশিষ্ট ABE′D′ সমকোণী চৌপলটি আঁক। এখন,

ABE′D′ এর ঘনফল = ▭ABEDর ক্ষেত্রফল × AA′

∴ ABC′ প্রিজ্‌মের ঘনফল = $\frac{1}{2}$ × ▭ABEDর ক্ষেত্রফল × AA′

= △ABCর ক্ষেত্রফল × AA′

= A × h ঘন একক।

∴ সমকোণী ত্রিকোণ প্রিজ্‌মের ঘনফল = ভূমি × উচ্চতা ;

বা, $V = A \times h$, যেখানে V ঘনফল।

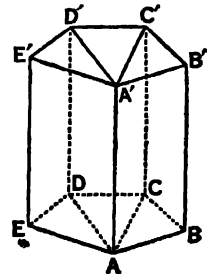
মন্তব্য। প্রমাণটি শিখিবার প্রয়োজন নাই। সূত্রটি মনে রাখিবার সুবিধার জন্য প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে।

যে কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের ঘনফল।

10. ABD′E′ যেন একটি সমকোণী প্রিজ্‌ম্‌। উহার উচ্চতা AA′ যেন h একক এবং উহার ভূমি ABCDE ক্ষেত্র, যাহার ক্ষেত্রফল যেন A বর্গ একক।

সমকোণী প্রিজ্‌ম্‌টির ঘনফল নির্ণয় করিতে হইবে।

AC, A′C′, AD, A′D′ যোগ কর।

তাহা হইলে ABC′, ACD′ এবং ADE′ তিনটি সমকোণী ত্রিকোণ প্রিজ্‌ম্‌।

এখন, ABC' প্রিজ্‌মের ঘনফল $= \triangle ABC$র ক্ষেত্রফল $\times AA'$,

ACD' প্রিজ্‌মের ঘনফল $= \triangle ACD$র ক্ষেত্রফল $\times AA'$,

ADE' প্রিজ্‌মের ঘনফল $= \triangle ADE$র ক্ষেত্রফল $\times AA'$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $ABD'E'$ প্রিজ্‌মটির ঘনফল $=$ ABCDE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\times AA'$

$= A \times h$ ঘন একক।

$\therefore$ যে কোন সমকোণী প্রিজ্‌মের ঘনফল $=$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

বা, $V = A \times h$, যেখানে V ঘনফল।

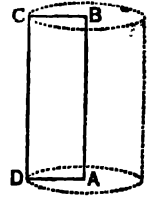
$\therefore \quad A = V \div h, h = V \div A.$

মন্তব্য। সূত্রটি মনে রাখিলেই চলিবে। প্রমাণ শিখিবার প্রয়োজন নাই।

11. সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক।

যে স্তম্ভকের প্রান্তদ্বয় দুইটি সমান ও সমান্তরাল বৃত্ত, তাহাকে **বৃত্তীয় স্তম্ভক** (Circular cylinder) বলে। বৃত্তীয় স্তম্ভককে প্রিজ্‌মের **বিশেষ স্থল** (Particular case) বলা যাইতে পারে। ইহার ঘনফল ও তলপরিমাণ নির্ণয়ের সূত্রগুলি প্রিজ্‌মের সূত্রগুলিরই অনুরূপ।

কোন বৃত্তীয় স্তম্ভকের প্রান্তীয় বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা যদি বৃত্তদ্বয়ের উপর লম্ব হয়, তবে ঐ বৃত্তীয় স্তম্ভককে **সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক** (Right circular cylinder) বলে এবং ঐ লম্বকে স্তম্ভকটির **দৈর্ঘ্য** (Length) বা **উচ্চতা** (Height) বলে।

একটি আয়তের এক বাহুকে স্থির রাখিয়া আয়তটিকে বাহুটির চারিদিক ঘুরাইয়া আনিলে একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক উৎপন্ন হয়। চিত্রে ABCD আয়তের AB বাহুকে স্থির রাখিয়া আয়তটিকে ABর চারিদিক ঘুরাইয়া আনায় একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক উৎপন্ন হইয়াছে। উহার AB অক্ষ, ABর দৈর্ঘ্য উচ্চতা, CD উৎপাদক রেখা (Generating line) এবং A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয়ের যে কোনটি ভূমি।

C B D A

সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল।

12. সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভককে অসীম সংখ্যক পার্শ্ববিশিষ্ট সমকোণী প্রিজ্‌ম্ মনে করা যাইতে পারে।

এখন, সমকোণী প্রিজ্‌মের ঘনফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা ;

$\therefore$ সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা।

কিন্তু সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ভূমি একটি বৃত্ত ; সুতরাং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ যদি r হয় এবং স্তম্ভকটির উচ্চতা যদি h হয়, তবে উল্লিখিত সূত্রটি দাঁড়ায় ;

সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল $= \pi r^2 \times h$.

মন্তব্য। প্রমাণ শিখিবার প্রয়োজন নাই।

উদা. 1. The base of a right prism is an equilateral triangle whose each side is 8 inches. If the height of the prism is 10 inches, find its volume.

8 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট ABC সমবাহু ত্রিভুজটি যেন প্রিজ্‌ম্‌টির ভূমি, যাহার উচ্চতা যেন AD. তাহা হইলে,

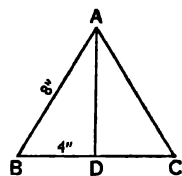
$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2}$ ইঞ্চি

$= \sqrt{48}$ ইঞ্চি $= 4\sqrt{3}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $\triangle ABC$র ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ BC. AD

$= \frac{1}{2}. 8. 4\sqrt{3}$ ব. ই. $= 16\sqrt{3}$ ব. ই.

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল = ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= (16\sqrt{3} \times 10)$ ঘ. ই. $= 277{\cdot}12\cdots$ ঘ. ই.।

উদা. 2. Find the cost of excavating a well 21 ft. deep with a diameter of 6 ft. at Rs. 8 per cubic yard. $(\pi = \frac{22}{7})$

কূপের ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi.3^2$ বর্গফুট $= \frac{22 \times 9}{7}$ বর্গফুট

$\therefore$ কূপের ঘনফল = ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{22 \times 9}{7} \times 21$ ঘনফুট

$= \frac{22 \times 9 \times 21}{7 \times 27}$ ঘনগজ $= 22$ ঘনগজ

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= 8$ টাকা $\times 22 = 176$ টাকা।

উদা. 3. The length of an iron pipe is 7 ft. Its inner diameter is 8 in. and the outer diameter 10 inches. Find the price of the pipe if the cost of 1 c. in of iron is 4 as. $(\pi = \frac{22}{7})$

লোহের ঘনফল $= (A_1 - A_2)h$ ঘনইঞ্চি, যেখানে

$A_1 = \pi(\frac{10}{2})^2$, $A_2 = \pi(\frac{8}{2})^2$ এবং $h = 7 \times 12 = 84$

$\therefore$ লোহের ঘনফল $= \pi\{(\frac{10}{2})^2 - (\frac{8}{2})^2\} \times 84$ ঘনইঞ্চি

$= \frac{22}{7}(25 - 16) \times 84$ ঘনইঞ্চি

$= 22 \times 9 \times 12$ ঘনইঞ্চি

$\therefore$ নলটির মূল্য $= \frac{22 \times 9 \times 12 \times 4}{16}$ টাকা $= 594$ টাকা।

উদা. 4. Find the length of the circular wire of diameter ·07 in. that can be made with a cubic foot of gold. $(\pi = \frac{22}{7})$

তারের ঘনফল = 1 ঘনফুট

তারের ব্যাস = ·07 ইঞ্চি = $\frac{7}{100 \times 12}$ ফুট = $\frac{7}{1200}$ ফুট

∴ তারের এক প্রান্তের বা ভূমির ক্ষেত্রফল = $\pi\left(\frac{7}{1200 \times 2}\right)^2$ বর্গফুট

$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2400 \times 2400}$ বর্গফুট = $\frac{77}{2880000}$ বর্গফুট

∴ তারের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = তারের ঘনফল ÷ তারের ভূমির ক্ষেত্রফল

$= 1 \times \frac{2880000}{77}$ ফুট = 37402·59 ··· ফুট।

Exercise 2

[Take $\pi = \frac{22}{7}$, if not otherwise mentioned.]

Find the volumes of the right prisms :

1. Base 4 sq. ft. ; height 1 ft. 3 in.
2. Base 7 sq. ft. 72 sq. in. ; height 5 ft. 3 in.
3. Base 9 sq. ft. 48 sq. in. ; height 7 ft. 6 in.
4. Base 2 sq. yd. 3 sq. ft. 96 sq. in. ; height 5 yd. 2 ft. 6 in.

Find the height of the right prisms :

5. Volume 3 c. ft. ; base 2 sq. ft. 36 sq. in.
6. Volume 15 c. ft. 216 c. in. ; base 3 sq. ft. 96 sq. in.
7. Volume 1 c. yd. 16 c. ft. 960 c. in. ; base 4 sq. ft. 96 sq. in.

Find the area of the base of the right prisms :

8. Volume 28 c. ft. ; height 5 ft. 3 in.
9. Volume 6 c. yd. 9 c. ft. 864 c. in. ; height 5 yd. 1 ft. 4 in.

10. The base of a right prism is a triangle whose sides are 5, 12, and 13 in. If the height of the prism is 15 in., find its volume.

11. The base of a right prism is a rectangle whose length is 5 ft. and breadth 3 ft. If the height of the prism is 10 ft., find its volume.

12. The base of right prism is a quadrilateral ABCD, whose AB = 1", BC = 7", CD = 4" and DA = 8", and the angles at A and C are right angles. If the height of the prism is 8", find its volume.

13. The base of a right prism is an equilateral triangle whose side is 10 inches. If the height of the prism is 1 ft. 6 in., find its volume.

14. The base of a right prism is an isosceles triangle, whose sides are 10", 13" and 13". If the height of the prism is 15", find its volume.

15. The volume of a right prism is 1200 c. ft. and the base is a trapezium whose parallel sides are 13 ft. and 17 ft. If the parallel sides are 10 ft. apart, find the height of the prism.

16. The base of a right prism is a triangle whose sides are 10", 2′ and 2′2". If the volume of the prism is 5 c. ft., find its height.

17. The base of right prism is a regular hexagon, each of whose sides is 2 ft. If the volume of the prism is 36 c. ft., find its height.

Find the volume of the right circular cylinder :

18. Radius of the base 3 ft. ; height 4 ft. 8 in.

19. Radius of the base 2 ft. 4 in. ; height 5 ft. 3 in.

20. Diameter of the base 3 ft. 6 in. ; height 7 ft. 6 in.

21. Diameter of the base 1 yd. 2 ft. 3 in., ht. 2 yd. 1 ft. 4 in.

Find the radius of the base of the right circular cylinder :

22. Volume 1386 c. in. ; height 6 ft. 9 in.

23. Volume 924 c. ft. ; height 10 ft. 8 in.

24. Volume 48 c. yd. 13 c. ft. ; height. 3 yd. 1 ft. 8 in. ($\pi = 3\cdot1416$)

25. The circumference of a right circular cylinder is 3 ft. 8 in. and height is 4 ft. 6 in. Find its volume.

26. The depth of a well of radius 1 ft. 6 in. is 56 ft. Find how much water it can contain.

27. The length of a ditch is 50 ft. Its upper breadth is 20 ft., lower breadth 12 ft. and depth 5 ft. How much water can it contain ?

28. How many pipes of diameter 2 inches each can fill a cistern in the same time as a pipe of diameter 8 inches can fill it ?

29. Find the cost of excavating a well of depth 21 ft. and diameter 6 ft. at Rs. 5 per cubic yard.

30. How many coins of diameter $1\frac{1}{4}$ in. and thickness $\frac{1}{8}$ in. will be required to make a rectangular solid of dimensions 5, 10 and 11 inches ?

31. Find the length of the wire of diameter $\frac{1}{10}$ in. that can be made with 1 c. ft. of brass.

32. The height of right triangular prism is 3 ft. and the sides of its base are 3, 4 and 5 inches. If the volume of a cube be equal to that of the prism, find the edge of the cube.

33. The length, breadth and depth of a cistern are as 4 : 3 : 2. If the cistern can contain 12000 lbs. of water and a cubic foot of water weighs $62\frac{1}{2}$ lbs, find its length.

34. The diameter of a right circular marble post is 3 ft. and its length is 56 ft. If one cubic foot of water weighs $62\frac{1}{2}$ lbs. and the specific gravity of marble be 2·7, find the weight of the post.

35. The thickness of a hollow right circular iron post is 4 in. Its outer diameter is 3 ft. 6 in. and length 4 ft. 8 in. If the weight of a cubic inch of iron be $4\frac{1}{2}$ oz., find that of the iron post.

36. The length of a brass pipe is 14 ft. The diameter of the outer surface is 8 in. and that of the inner surface 6 in. Find the price of the pipe if a cubic inch of brass costs 12 annas.

37. The length of an iron pipe is 7 ft. Its inner diameter is 3 in. and the thickness of iron is 1 in. If the weight of one cubic inch of iron be $\frac{1}{4}$ pound, find that of the pipe.

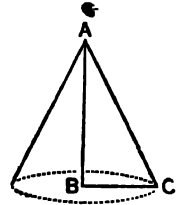
38. The inner and outer radii of a lead pipe are respectively $1\frac{1}{2}$ in. and $1\frac{9}{16}$ in. If it is melted into a solid right circular cylinder of the same length, find its radius.

সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কু।

13. কোন বৃত্তের সমতলে অবস্থিত নয়, এরূপ বহিঃস্থ কোন বিন্দুর সহিত বৃত্তটির পরিধির উপর অবস্থিত যাবতীয় বিন্দু যোগ করিলে যে স্থান পরিবেষ্টিত হয়, তাহাকে **বৃত্তীয় শঙ্কু** (Circular cone) বলে। বৃত্তটিকে শঙ্কুটির **ভূমি** (Base), বহিঃস্থ বিন্দুটিকে উহার **শীর্ষ** (Vertex) এবং শীর্ষ হইতে বৃত্তটির সমতলের উপর পতিত লম্বকে উহার **উচ্চতা** (Height) বলে।

কোন বৃত্তীয় শঙ্কুর শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বের পাদবিন্দু যদি ভূমির কেন্দ্র হয়, তবে ঐ বৃত্তীয় শঙ্কুকে **সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কু** (Right circular cone) বলে।

যে সরলরেখা কোন সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কুর শীর্ষকে ভূমির পরিধির উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর সহিত যোগ করে, তাহাকে শঙ্কুটির **ঢালু উচ্চতা** (Slant height) বলে।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন এক বাহুকে স্থির রাখিয়া ত্রিভুজটিকে ঐ বাহুর চারিদিক ঘুরাইয়া আনিলে একটি সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কু উৎপন্ন হয়।

চিত্রে ABC সমকোণী ত্রিভুজের B সমকোণ। সমকোণ সংলগ্ন AB বাহুকে স্থির রাখিয়া ত্রিভুজটিকে ঐ বাহুর চারিদিকে ঘুরাইয়া আনায় একটি সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কু উৎপন্ন হইয়াছে। A বিন্দুটি শঙ্কুটির শীর্ষ, B কেন্দ্রীয় বৃত্তটি উহার ভূমি, AB উহার অক্ষ, ABর দৈর্ঘ্য উহার উচ্চতা এবং AC উহার ঢালু উচ্চতা। AC কে শঙ্কুটির **উৎপাদক রেখা** (Generating line) বলে।

সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কুর ঘনফল।

14. যে কোন শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা ; কিন্তু সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কুর ভূমি একটি বৃত্ত ; সুতরাং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ যদি r হয় এবং শঙ্কুটির উচ্চতা যদি h হয়, তবে উল্লিখিত সূত্রটি দাঁড়ায় :

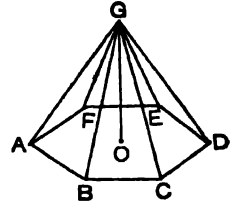
$$\text{সমকোণী শঙ্কুর ঘনফল} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h.$$

পিরামিড

15. কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমতলে অবস্থিত নয়, এরূপ বহিঃস্থ কোন বিন্দুর সহিত ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির বাহুগুলির উপর অবস্থিত যাবতীয় বিন্দু যোগ করিলে যে স্থান পরিবেষ্টিত হয়, তাহাকে **পিরামিড** (Pyramid) বলে।

পিরামিডকে বৃত্তীয় শঙ্কুর **বিশেষ স্থল** (Particular case) বলা চলে। উহার ঘনফল এবং তলপরিমাণ নির্ণয়ের সূত্রগুলি বৃত্তশঙ্কুর সূত্রগুলিরই অনুরূপ।

পিরামিডের নিম্নতলটি যে কোনও সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র হইতে পারে। উহার পার্শ্বতলগুলি সবই সমশীর্ষ ত্রিভুজ।

পিরামিডের নিম্নতলটিকে উহার **ভূমি** (Base) এবং পার্শ্বস্থ ত্রিভুজগুলির সাধারণ শীর্ষকে উহার শীর্ষ (Vertex) বলে।

পিরামিডের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বকে উহার **উচ্চতা** (Height) বলে। পর পর দুইটি ত্রিভুজ যে সরলরেখায় মিলিত থাকে, তাহাকে পিরামিডের ধার (Edge) বলে।

চিত্রে ABCDEFG পিরামিডের ABCDEF ভূমি; G শীর্ষ এবং OG উচ্চতা।

যে পিরামিডের ভূমি সুষম বহুভুজ এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর পতিত লম্বের পাদবিন্দু ঐ ভূমির পরিবৃত্তের বা অন্তবৃত্তের কেন্দ্র, তাহাকে **লম্ব পিরামিড** (Right pyramid) বলে। লম্ব পিরামিডের পার্শ্বতলগুলি সর্বসম সমদ্বিবাহু বা সমবাহু ত্রিভুজ।

যে পিরামিড লম্ব পিরামিড নহে, তাহাকে **তির্যক পিরামিড** বলে।

পিরামিডের শীর্ষ হইতে ভূমির যে কোন বাহুর উপর পতিত লম্বকে **ঢালু উচ্চতা** (Slant height) বলে।

যে পিরামিডের ভূমি একটি ত্রিভুজ, তাহার বিশেষ নাম **চতুস্তলক** (Tetrahedron)।

যে চতুস্তলকের ভূমি সমবাহু ত্রিভুজ এবং পার্শ্বতল তিনটি সর্বসম সমবাহু ত্রিভুজ, তাহাকে **লম্ব চতুস্তলক** (Right tetrahedron) বলে।

চতুস্তলকের চারিটি তল, চারিটি শীর্ষ এবং ছয়টি ধার।

যে কোন পিরামিডের **ঘনফল** $= \frac{1}{3}$ **(ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা)**।

$\therefore$ ঘনফলকে V, ভূমির ক্ষেত্রফলকে A এবং উচ্চতাকে h দ্বারা সূচিত করিলে,

$$V = \frac{1}{3} Ah$$

$$\therefore Ah = 3V$$

$$\therefore A = 3V \div h \text{ এবং } h = 3V \div A.$$

উদা. 1 The volume of a right circular cone is 528 cubic inches. If its height is 14 inches, find the radius of its base.

শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= 3 \times$ ঘনফল $\div$ উচ্চতা

$= \frac{3 \times 528}{14}$ বর্গ ইঞ্চি $= \frac{3 \times 264}{7}$ বর্গ ইঞ্চি

আবার, ভূমির ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি হইলে, ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ ইঞ্চি

$\therefore \pi r^2 = \frac{3 \times 264}{7} \quad \therefore r^2 = \frac{3 \times 264 \times 7}{7 \times 22} = 36 \quad \therefore r = 6$

$\therefore$ ভূমির ব্যাসার্ধ $= 6$ ইঞ্চি।

উদা. 2. The radius of the base of a right circular cone is 7 in. and its slant height is 25 in. Find the volume.

শঙ্কুটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 7^2$ ব. ই. $= 154$ ব. ই.

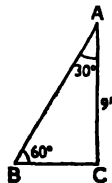
শঙ্কুটির উচ্চতা $= \sqrt{25^2 - 7^2}$ ইঞ্চি $= \sqrt{32 \times 18}$ ইঞ্চি $= 24$ ইঞ্চি

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times 154 \times 24$ ঘনইঞ্চি $= 1232$ ঘনইঞ্চি।

উদা. 3. The generating line of a right circular cone makes an angle of 60° with the base. If the height of the cone is 9 ft., find its volume.

চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার C সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ABC = 60°$ এবং $AC = 9$ ফুট হইলে, শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ BC হইবে। এখন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, 30° কোণের বিপরীত বাহুর দ্বিগুণ। অতএব অতিভুজ $AB = 2BC$;

$\therefore AB^2 - BC^2 = AC^2$ বা, $4BC^2 - BC^2 = AC^2$

বা, $3BC^2 = 9^2$ ব. ফু. $\quad \therefore \quad BC^2 = 27$ ব. ফু.

$\therefore$ শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi.BC^2 = \frac{22 \times 27}{7}$ ব. ফু.

$\therefore$ শঙ্কুটির ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times \frac{22 \times 27}{7} \times 9$ ঘনফুট

$= \frac{1782}{7}$ ঘনফুট $= 254\frac{4}{7}$ ঘনফুট।

উদা. 4 The sides containing the right angle of a right-angled triangle are 3 and 4 ft. If the triangle is turned about the hypotenuse, find the total area of the two cones that will be generated on the opposite sides of the same base.

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার B সমকোণ এবং অতিভুজ AC $= \sqrt{3^2 + 4^2}$ ফুট $= 5$ ফুট। ACর উপর BD লম্ব টান।

এখন, $\frac{1}{2}$AC.BD $= \triangle$ABCর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$BC.AB.

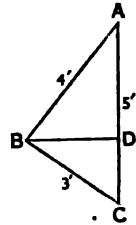
$\therefore$ AC.BD = BC.AB = (3×4) ব. ফু. $= 12$ ব. ফু.;

$\therefore$ BD $= \frac{12}{5}$ ফুট।

$\therefore$ শঙ্কুদ্বয়ের সাধারণ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi(\frac{12}{5})^2$ ব. ফু. এবং

$\because$ শঙ্কুদ্বয়ের মোট উচ্চতা = AD + DC = AC = 5 ফুট;

$\therefore$ শঙ্কুদ্বয়ের ঘনফল $= \frac{1}{3} \times \pi(\frac{12}{5})^2 \times 5$ ঘনফুট $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{144}{5}$ ঘনফুট

$= \frac{1056}{35}$ ঘনফুট $= 30\frac{6}{35}$ ঘনফুট।

5. Find the volume of the greatest right circular cone that can be formed from a cube each of whose edge is 12 inches.

স্পষ্টতঃই যে বৃহত্তম বৃত্ত ঘনকটির কোনও তলে অঙ্কিত করা যায়, তাহাই হইবে উদ্দিষ্ট শঙ্কুটির ভূমি এবং শঙ্কুটি সমকোণী হইবে বলিয়া উহার উচ্চতা হইবে ঘনকটির একটি ধারের সমান।

$\therefore$ উদ্দিষ্ট শঙ্কুটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times (\frac{12}{2})^2$ বর্গ ইঞ্চি এবং উচ্চতা 12 ইঞ্চি;

$\therefore$ উদ্দিষ্ট শঙ্কুর ঘনফল $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6^2 \times 12$ ঘনইঞ্চি

$= \frac{3168}{7}$ ঘনইঞ্চি $= 452\frac{4}{7}$ ঘনইঞ্চি।

উদা. 6. The base of a pyramid, 12 cm. high, is a triangle whose sides are 8 cm., 15 cm. and 17 cm. Find the volume of the pyramid. (C. U. 1946, '48)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, যেখানে a, b ও c তিন বাহু এবং s অর্ধ-পরিসীমা।

এস্থলে, ভূমির অর্ধ-পরিসীমা $= \frac{1}{2}(8+15+17)$ cm. $= 20$ cm.

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)}$ ব. সেমি.

$= \sqrt{20.12.5.3}$ সেমি. $= \sqrt{2^2.5.2^2.3.5.3}$ ব. সেমি.

$= \sqrt{4^2.3^2.5^2}$ ব. সেমি. $= 60$ ব. সেমি.

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{1}{3}($ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $)$

$= \frac{1}{3}(60 \times 12)$ ঘন সেন্টিমীটার $= 240$ ঘন সেন্টিমীটার।

উদা. 7. Determine the volume of a pyramid whose height is $10\sqrt{7}$ ft. and which stand on a triangle of sides 16 ft., 11 ft. and 9 ft. (C. U. 1941)

ভূমির অর্ধ-পরিসীমা $= \frac{1}{2}(16+11+9)$ ফুট $= 18$ ফুট

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{18(18-16)(18-11)(18-9)}$ বর্গফুট

$= \sqrt{18.2.7.9}$ বর্গফুট $= 18\sqrt{7}$ বর্গফুট

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{1}{3}($ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা$)$

$= \frac{1}{3}(18\sqrt{7} \times 10\sqrt{7})$ ঘনফুট

$= \frac{1}{3}(18 \times 7 \times 10)$ ঘনফুট $= 420$ ঘনফুট।

উদা. 8. The base of a pyramid, 9 in. high, is an equilateral triangle of side 6 inches. Find its volume.

সমবাহু ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা $= \frac{1}{2}(6+6+6)$ ই. $= 9$ ই.

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{9(9-6)(9-6)(9-6)}$ ব. ই.

$= \sqrt{9.3.3.3}$ ব. ই. $= 9\sqrt{3}$ ব. ই.

এবং ইহাই পিরামিডটির ভূমির ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ পিরামিডটির ঘনফল $= \frac{1}{3}($ ভূমি $\times$ উচ্চতা $)$

$= \frac{1}{3}(9\sqrt{3} \times 9)$ ঘ. ই. $= 27\sqrt{3}$ ঘ. ই.।

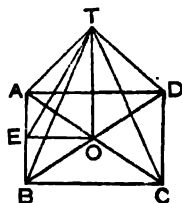
মন্তব্য। ত্রিভুজটির ভূমি $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$ ই. ধরিয়াও ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা চলে।

উদা. 9. A right pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 16 ft. Find the volume of the pyramid.

বর্গক্ষেত্র ABCD যেন পিরামিডটির ভূমি, T উহার শীর্ষ এবং AC ও BDর ছেদবিন্দু O হইলে OT উহার উচ্চতা। প্রথমে পিরামিডটির উচ্চতা OT নির্ণয় করিয়া লও। ABর উপর OE লম্ব টান এবং TE যোগ কর। তাহা হইলে,

TOE একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার O সমকোণ,

$EO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 16$ ফুট $= 8$ ফুট এবং

$TE = ATB$ সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 16$ ফুট $= 8\sqrt{3}$ ফুট ;

$\therefore \quad OT^2 = TE^2 - EO^2 = \{(8\sqrt{3})^2 - 8^2\}$ বর্গফুট $= 128$ বর্গফুট

$\therefore \quad$ পিরামিডটির উচ্চতা $OT = \sqrt{128}$ ফুট $= 8\sqrt{2}$ ফুট

$\therefore \quad$ পিরামিডটির ঘনফল $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times (16 \times 16)$ বর্গফুট $\times 8\sqrt{2}$ ফুট

$= \frac{1}{3} \times 2048\sqrt{2}$ ঘনফুট।

উদা. 10. A right pyramid stands on a square base of side 12 ft. Find the height of the pyramid, if its volume is 576 cu. ft. (C. U. 1943)

ভূমির ক্ষেত্রফল $= (12 \times 12)$ বর্গফুট এবং ঘনফল $= 576$ ঘনফুট

নির্ণেয় উচ্চতা $= \dfrac{3 \times \text{ঘনফল}}{\text{ভূমির ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{3 \times 576 \text{ ঘনফুট}}{(12 \times 12) \text{ বর্গফুট}} = 12$ ফুট।

Exercise 3

[Take $\pi = \frac{22}{7}$, if not otherwise mentioned.]

Find the volume of the right circular cone :

1. Radius 7 in. ; height 9 in.
2. Radius 10 in. ; height 1 ft. 9 in.

3. Radius 6 ft. ; height 10 ft. 6 in.

4. Diameter 4 yd. 2 ft. ; height 2 yd. 1 ft. 6 in.

Find the height of the right circular cone :

5. Volume 13 c. ft. ; base 2 sq. ft. 24 sq. in.

6. Volume 26 c. ft. 432 c. in. ; base 3 sq. ft. 72 sq. in.

7. Volume 3 c. yd. 7 c. ft. ; base 1 sq. yd. 1 sq. ft. 96 sq. in.

Find the base of the right circular cone :

8. Volume 9 c. ft. ; height 6 ft. 9 in.

9. Volume 19 c. ft. 432 c. in. ; height 8 ft. 3 in.

10. Volume 1 c. yd. 6 c. ft. 48 c. in. ; height 3 yd. 8 in.

Find the radius of the base of the circular cone :

11. Volume 462 c. in. ; height 9 in.

12. Volume 1188 c. in. ; height 14 in.

13. Volume 2 c. ft. 240 c. in. ; height 1 ft. 6 in.

14. The radius of a right circular cone is 1 ft. and its slant height is 1 ft. 3 in. Find its volume.

15. The height of a right circular cone is 1 ft. If its slant height is 1 ft. 1 in. Find its volume.

16. The volume of a right circular cone is 7 c. ft. 840 c. in. If its height is 2 ft. 4 in., find the radius of the base and the slant height.

17. The generating line of a right circular cone makes an angle of 30° with the base. If the height of the cone is 7 in., find its volume.

18. The generating line of a right circular cone makes an angle of 60° with the base. If the height of the cone is 1 ft. 9 in., find its volume. If each cubic inch weight 4 oz., find the weight of the cone.

19. The sides containing the right angle of a right-angled triangle are 1 ft. 3 in. and 1 ft. 8 in. If the triangle is rotated around the hypotenuse, find the area of the solid thus generated.

20. The sides containing the right angle of a right-angled triangle are 5 and 12 inches. If the triangle is rotated about the

hypotenuse, find the total area of the two cones that will be generated on the opposite sides of a common base.

21. The hypotenuse of a right-angled triangle is 12 in. and its two angles are 30° and 60°. If the triangle rotates about the hypotenuse, find the area of the solid thus generated.

22. Find the volume of the biggest right circular cone that can be formed from a cube of edge 14 in.

23. A tent in the shape of a right circular cone is made to accommodate 7 persons allowing each person 22 square feet of floor space and 110 cubic feet of open space. Find the breadth and the height of the tent.

24. A right pyramid stands on a square base of side 15 ft. and its height is 12 ft. Find its volume.

25. A right pyramid stands on a base 16 ft. square and its height is 21 ft. Find its volume.

26. Determine the volume of a pyramid whose height is 20 ft. and which stands on a triangle of sides of 8, 15 and 17 ft.

27. The base of a tetrahedron, 9 in. high, is an isosceles triangle of sides 12, 12 and 8 in. Find its volume.

28. A pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 12 ft. Find its volume.

29. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 12 cm. and 9 cm. and the length of the slant edges is 8·5 cm. Find the height and volume of the pyramid. (G. U. 1948)

30. The base of a pyramid is a regular hexagon of side 8 ft. and its volume is 384 cu. ft. Find its height.

দ্বিতীয় অধ্যায়

তলের ক্ষেত্রফল

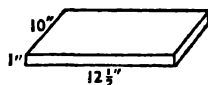
সমকোণী চৌপল, ঘনক ও প্রিজ্‌ম্

16. কোন ঘনবস্তুর সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল বলিলে, ঘনবস্তুটি যে সকল তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে, তাহাদের ক্ষেত্রফল বুঝায়।

সমকোণী চৌপলের ছয়টি তল এবং তলগুলি সবই আয়তক্ষেত্র। পরস্পর বিপরীত দুই দুইটি তল সর্বসম।

ঘনকের ছয়টি তল এবং তলগুলি সমান বর্গক্ষেত্র।

সমকোণী প্রিজ্‌মের পার্শ্বস্থ তলগুলি আয়তক্ষেত্র এবং প্রান্তীয় তলদ্বয় সর্বসম ঋজুরেখক্ষেত্র।

উদা. 1. A piece of brass sheet, $12\frac{1}{2}$ in. long, 10 in. broad and 1 in. thick, is melted into a cube. Show that the surface of the latter is 145 square inches less than that of the former.

চাদরের সমুদয় তল $= 2(12\frac{1}{2}\times 10 + 12\frac{1}{2}\times 1 + 10\times 1)$ বর্গইঞ্চি

$= 295$ বর্গইঞ্চি

ঘনকের ঘনফল = চাদরের ঘনফল $= (12\frac{1}{2}\times 10\times 1)$ ঘনইঞ্চি $= 125$ ঘনইঞ্চি

$\therefore$ ঘনকের ধার $= \sqrt[3]{125}$ ইঞ্চি $= 5$ ইঞ্চি

$\therefore$ ঘনকের সমুদয় তল $= (5\times 5)\times 6$ বর্গ ইঞ্চি $= 150$ বর্গইঞ্চি

$\therefore$ চাদরের তল অপেক্ষা ঘনকের তল $(295-150)$ বর্গ ইঞ্চি বা 145 বর্গইঞ্চি কম।

উদা. 2. How many coins each of diameter $\frac{3}{4}$ in. and thickness $\frac{1}{8}$ in. are to be melted to make a cube of surface 54 sq. in.?

ঘনকটির প্রত্যেক তল $= 54$ বর্গ ইঞ্চি $\div 6 = 9$ বর্গ ইঞ্চি

$\therefore$ ঘনকটির প্রত্যেক ধার $= \sqrt{9}$ ইঞ্চি $= 3$ ইঞ্চি

$\therefore$ ঘনকটির ঘনফল $= (3 \times 3 \times 3)$ ঘনইঞ্চি $= 27$ ঘনইঞ্চি

প্রত্যেকটি মুদ্রার ঘনফল $= \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2 \times 4}\right)^2 \times \frac{1}{8}$ ঘনইঞ্চি

$\therefore$ নির্ণেয় মুদ্রাসংখ্যা $= 27 \times \frac{7}{22} \times \frac{64}{9} \times 8 = \frac{5376}{11} = 488\frac{8}{11}$.

উদা. 3. The base of a right prism is a triangle whose sides are 13, 14 and 15 inches. If the area of the total surface is 3 sq. ft. 72 sq. in., find the height of the prism.

3. ব. ফু. 72 ব. ই. $= 504$ ব. ই. এবং $\frac{1}{2}(13+14+15)$ ই. $= 21$ ই.,

$(21-13)$ ই. $= 8$ ই., $(21-14)$ ই. $= 7$ ই. ও $(21-15)$ ই. $= 6$ ই. ;

$\therefore$ ভূমি ও বিপরীত তলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \sqrt{21.8.7.6}$ ব. ই. $= 168$ ব. ই. ;

$\therefore$ তিন পার্শ্বের ক্ষেত্রফল $= (504-168)$ ব. ই. $= 336$ ব. ই.।

এখন, ভূমির বাহুগুলির যোগফল $= (13+14+15)$ ই. $= 42$ ই. ; সুতরাং প্রিজ্‌মটির উচ্চতা যদি h ইঞ্চি হয়, তবে

$42h$ ব. ই. $= 336$ ব. ই. বা, $42h = 336$ $\therefore$ $h = 8$

$\therefore$ প্রিজ্‌মটির উচ্চতা $= 8$ ইঞ্চি।

Exercise 4

1. The dimensions of a rectangular parallelopiped are 3 ft. 4 in., 2 ft. 9 in. and 1 ft. 6 in. Find the area of its total surface.

2. The dimensions of a rectangular solid are 3 yds. 1 ft., 2 yds. and 1 yd. 1 ft. 6 in. Find the area of its whole surface.

3. One edge of a cube is 2 ft. 6 in. Find the whole surface.

4. The height of a cube is 1 yd. 2 ft. 3 in. Find the whole surface.

5. The volume of a cube is 4 c. yd. 17 c. ft. Find the whole surface.

6. The volume of a cube is 512 c. ft. Find the cost of painting the whole surface at $7\frac{1}{2}$ annas per sq. ft.

7. The cost of painting the whole surface of a cube at 4 annas per sq. ft. is Rs. 150. Find the volume of the cube.

8. A piece of brass sheet of dimensions 16, 8 and $\frac{1}{8}$ in. is melted into a cube. Show that the surface of the latter is 184 sq. in. less than that of the former.

9. How many coins each of diameter $\frac{3}{4}$ in. and thickness $\frac{1}{8}$ in. are to be melted to form a cube of base 54 sq. in.

10. A box with a lid is made with plainks one inch thick. The inner length, breadth and height of the box are 3 ft. 6 in., 2 ft. 9 in. and 1 ft. 8 in. respectively. Find the area of the whole outer surface.

11. The dimensions of a rectangular solid are 18, 6 and 2 ft. Find the cost of painting the whole surface of a cube, whose volume is equal to that of the rectangular solid, at 50 nP. per square foot.

12. A square room 10 ft. high contains 1440 c. ft. of air. Find the cost of white-washing the ceiling and the walls at $12\frac{1}{2}$ nP. per square foot.

13. The dimensions of a rectangular solid are 2, 6 and 12 feet. Find an edge of a cube the area of whose whole surface equals that of the rectangular solid.

14. The dimensions of a rectangular solid are 9, 12 and 16 ft. Find the area of the whole surface of a cube whose volume is equal to that of the former.

15. The dimensions of a rectangular solid are as 1 : 2 : 3. If its volume is 1296 c. in., find its whole surface.

16. The height of a right prism is 20 ft. and its base is a triangle whose sides are 10, 17 and 21 ft. Find its whole surface.

17. The height of a right prism is 8 yds and its base is a triangle whose sides are 29, 52 and 69 ft. Find its whole surface.

18. The base of a right prism is a triangle whose sides are 9 in., 1 ft. and 1 ft. 3 in. If its whole surface is 3 sq. ft. 36 sq. in., find its height.

সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক।

17. একটি ফাঁপা সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের বাঁকা তলটিকে খাড়াভাবে কাটিয়া তলটিকে যদি সমতলে পরিণত করা যায়, তবে উহা একটি আয়তক্ষেত্র হইবে যাহার আয়তনদ্বয় হইবে স্তম্ভকটির পরিধি এবং উচ্চতা।

$\therefore$ বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল = পরিধি × উচ্চতা ; সুতরাং ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হইলে,

স্তম্ভকের বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল = $2\pi r \times h$ বর্গ একক এবং

প্রান্তদ্বয় সহ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল = $(2r\pi h + 2\pi r^2)$ বর্গ একক

= $2\pi r(h + r)$ বর্গ একক ।

উদা. 1. The circumference of a right circular cylinder is 44 ft. and its height is 10 ft., find its whole surface.

$2\pi \times$ ব্যাসার্ধ = পরিধি, $\therefore$ $2 \times \frac{22}{7} \times$ ব্যাসার্ধ = 44 ফুট

$\therefore$ ব্যাসার্ধ = $44 \times \frac{7}{2 \times 22}$ ফুট = 7 ফুট ।

এক্ষণে, বাঁকা তলের ক্ষেত্রফল = পরিধি × উচ্চতা = (44×10) বর্গফুট = 440 বর্গফুট

এবং প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল = $2 \times \pi \times$ (ব্যাসার্ধ)^2 = $(2 \times \frac{22}{7} \times 7^2)$ বর্গফুট

= 308 বর্গফুট ;

$\therefore$ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল = $(440 + 308)$ বর্গফুট = 748 বর্গফুট ।

উদা. 2. The whole surface of a right circular cylinder is 6 sq. ft. 60 sq. in. If its height be twice the radius of the base, find its height.

মনে কর, ব্যাসার্ধ = r ইঞ্চি । তাহা হইলে, উচ্চতা = $2r$ ইঞ্চি ।

$\therefore$ সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল = $2\pi r(2r + r)$ বর্গ ইঞ্চি = $6\pi r^2$ বর্গ ইঞ্চি ;

$\therefore$ $6\pi r^2$ বর্গ ইঞ্চি = 6 বর্গফুট 60 বর্গ ইঞ্চি = 924 বর্গ ইঞ্চি

$\therefore$ $6\pi r^2 = 924$ বা, $6 \times \frac{22}{7} r^2 = 924$

$\therefore$ $r^2 = 924 \times \frac{7}{6 \times 22} = 7^2$ $\therefore$ $r = 7$

$\therefore$ উচ্চতা = $2r$ ইঞ্চি = 14 ইঞ্চি ।

Exercise 5

Find the curved surface of the right circular cylinder :

1. Circumference 1 ft. 6 in. ; height 4 ft.
2. Diameter 2 ft. 4 in. ; height 4 ft. 6 in.
3. Radius 5 ft. 6 in. ; height 8 ft. 2 in.

Find the whole surface of the right circular cylinder :

4. Radius 1 ft. 2 in. ; height 3 ft.

5. Diameter 2 ft. 11 in.; height 4 ft. 5 in.

6. Circumference 3 yd. 2 ft.; height 1 yd. 2 ft. 3 in.

7. The curved surface of a right circular cylinder is 1 sq. ft. 120 sq. in. and its height is 6 in. Find the radius of the base.

8. The curved surface of a right circular cylinder is 2 sq. ft. and 64 sq. in. and the radius of the base is 8 in. Find its height.

9. The curved surface of a right circular cylinder is 5 sq. ft. 72 sq. in. and the diameter of the base is 2 ft. 4 in. Find its height.

10. The curved surface of a right circular cylinder is 3 sq. ft. 8 sq. in. If its height is 10 in., find the area of its base.

11. The curved surface of a right circular cylinder is 7 sq. ft. 48 sq. in. and its height is 1 ft. Find its whole surface.

12. The whole surface of a right circular cylinder is 5 sq. ft. 28 sq. in. and the radius of its base is 7 in. Find its height.

13. The whole surface of a right circular cylinder is 13 sq. ft. 64 sq. in. and its height is 8 in. Find the radius of its base.

14. The whole surface of a right circular cylinder is 8 sq. ft. 80 sq. in. and its height is three times the radius of its base. Find the diameter of the base and its height.

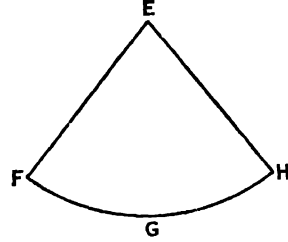
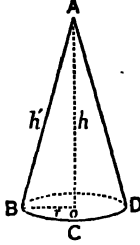
15. The volume of a right circular cylinder is 1584 c. in. and the radius of its base is 6 in. Find the cost of painting the curved surface at 9 annas per sq. ft.

16. The area of the base of a right circular cylinder is equal to that of its curved surface. Find the ratio of its height and radius.

17. The area of the curved surface of a right circular cylinder is twice the total area of its two ends. Find the ratio of its height and diameter.

18. The volume and the curved surface of a right circular cylinder can be expressed by the same number. Find its diameter.

সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কু

18. মনে কর, ABCD একটি সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কু, যাহার ভূমির ব্যাসার্ধ r একক, উচ্চতা h একক এবং ঢালু উচ্চতা AB $= h'$ একক।

শঙ্কুটিকে ফাঁপা মনে করিয়া উহার বক্রতলকে AB বরাবরে কাটিয়া সমতলে পরিণত করিতে পারিলে উহা EFGH বৃত্তকলায় পরিবর্তিত হইবে, যাহার EF = AB এবং FGH চাপ = শঙ্কুটির ভূমির পরিধি। এখন,

EFGH বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ FGH চাপ $\times$ EF

∴ ABCD শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ FGH চাপ $\times$ EF

$= \frac{1}{2} \times$ শঙ্কুটির ভূমির পরিধি $\times$ AB

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times h'$ বর্গ একক

$= \pi r h'$ বর্গ একক

বা, $= \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গ একক।

আবার, ∵ শঙ্কুটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

∴ শঙ্কুটির সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $= (\pi r h' + \pi r^2)$ বর্গ একক

$= \pi r(h' + r)$ বর্গ একক

বা, $= \pi r(\sqrt{h^2 + r^2} + r)$ বর্গ একক।

মন্তব্য। ∵ $\pi r h' = \frac{1}{2}(2\pi r \times h')$, ∴ ভূমির পরিধি এবং ঢালু উচ্চতার গুণফলের অর্ধেক লইলে, সমকোণী বৃত্তীয় শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

পিরামিড

19. যদি কোন লম্ব পিরামিডের ভূমির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $a, b, c, \cdots$ হয় এবং উহার ঢালু উচ্চতা l হয়, তবে উহার পার্শ্বতলগুলির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}al + \frac{1}{2}bl + \frac{1}{2}cl + \cdots$$

$=\frac{1}{2}(a+b+c+\cdots)l$

$=\frac{1}{2}$(ভূমির পরিসীমা $\times$ ঢালু উচ্চতা)।

উদা. 1. How many feet of canvas, 26 in. wide, will be required for a tent of the shape of a right circular cone, if its height is 12 ft. and radius 5 ft. ?

তাঁবুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গফুট, যেখানে $h=12$ এবং $r=5$;

$\therefore$ ক্যানভাসের ক্ষেত্রফল $=\frac{22}{7}\times 5\sqrt{12^2+5^2}$ বর্গফুট $=\frac{22\times 5\times 13}{7}$ বর্গফুট

$\therefore$ ক্যানভাসের দৈর্ঘ্য $=\frac{22\times 5\times 13}{7}\times\frac{12}{26}$ ফুট $=\frac{660}{7}$ ফুট $=94\frac{2}{7}$ ফুট ।

উদা. 2. The whole surface of a right circular cone is 9 sq. ft. 90 sq. in. and the slant height is thrice the radius of its base. Find the radius of the base and the slant height.

9 বর্গফুট 90 বর্গইঞ্চি = 1386 বর্গ ইঞ্চি ;

এখন, ঢালু উচ্চতা h' ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি হইলে,

সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $=\pi r(h'+r)$ বর্গ ইঞ্চি

$=\pi r(3r+r)$ বর্গ ইঞ্চি $=4\pi r^2$ বর্গ ইঞ্চি ;

$\therefore\ 4\pi r^2=1386$ বা, $4\times\frac{22}{7}\times r^2=1386$

$\therefore\ r^2=1386\times\frac{7}{4\times 22}=\frac{441}{4}\quad\therefore\ r=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$

$\therefore\ h'=3r=10\frac{1}{2}\times 3=31\frac{1}{2}$

$\therefore$ ভূমির ব্যাসার্ধ $=10\frac{1}{2}$ ইঞ্চি এবং ঢালু উচ্চতা $=2$ ফুট $7\frac{1}{2}$ ইঞ্চি ।

উদা. 3. The curved surface of a right circular cone is $47\frac{1}{7}$ sq. in. If the height of the cone is 4 in., find the radius of the base and the slant height.

উচ্চতা h ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি হইলে,

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গ ইঞ্চি

$=\frac{22}{7}r\sqrt{4^2+r^2}$ বর্গ ইঞ্চি ।

$\therefore\ \frac{22}{7}r\sqrt{4^2+r^2}=47\frac{1}{7}$ বা, $r\sqrt{4^2+r^2}=\frac{330}{7}\times\frac{7}{22}=15$

বা, $r^2(4^2+r^2)=225$ বা, $r^4+16r^2+(\frac{16}{2})^2=225+8^2=289$

বা, $r^2+8=17$ বা, $r^2=9\quad\therefore\ r=3$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=r$ ইঞ্চি $=3$ ইঞ্চি

এবং ঢালু উচ্চতা $=\sqrt{4^2+3^2}$ ইঞ্চি $=5$ ইঞ্চি ।

4. The faces of a tetrahedron are four equal equilateral triangles. Find the area of all the faces of the tetrahedron, if the length of a side of each triangle is 4 ft. (C. U. 1938)

প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ভূমি = 4 ফুট এবং উন্নতি $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4$ ফুট $= 2\sqrt{3}$ ফুট

∴ প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$(ভূমি × উন্নতি) $= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3}$ ফুট
$= 4\sqrt{3}$ ফুট।

∴ চতুস্তলকটির 4টি তলের ক্ষেত্রফল $= 4\sqrt{3}$ বর্গফুট $\times 4 = 16\sqrt{3}$ বর্গফুট।

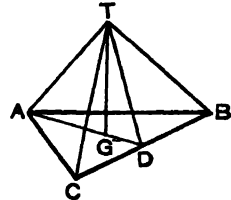
5. A right pyramid stands on a base 10 ft. square and its height is 12 ft. Find its slant surfaces.

পিরামিডটির T যেন শীর্ষ এবং ABCD বর্গক্ষেত্র উহার ভূমি (পৃঃ 19 এর চিত্র দেখ।)। বর্গক্ষেত্রটির কর্ণদ্বয়ের O ছেদবিন্দু। ABর উপর OE লম্ব। তাহা হইলে EOT ত্রিভুজের ∠EOT সমকোণ, OT = পিরামিডের উচ্চতা = 12 ফুট এবং $EO = \frac{1}{2}BC = 5$ ফুট ;

∴ ঢালু উচ্চতা $= ET = (OT^2 + EO^2)^{\frac{1}{2}} = (12^2 + 5^2)^{\frac{1}{2}}$ ফুট $= 13$ ফুট।

∴ ঢালু তলগুলির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিসীমা × ঢালু উচ্চতা
$= \frac{1}{2}(10 \times 4) \times 13$ ঘনফুট $= 260$ ঘনফুট।

6. The base of a right pyramid, 10 ft. high, is an equilateral triangle of side 12 ft. Find the area of the side faces.

মনে কর, পিরামিডটির T শীর্ষ এবং সমবাহু ত্রিভুজ ABC উহার ভূমি। AD মধ্যমা আঁক। $\frac{1}{3}$ADর সমান করিয়া DG লও। তাহা হইলে ত্রিভুজটির G ভরকেন্দ্র এবং ত্রিভুজটি সমবাহু বলিয়া G উহার পরিকেন্দ্রও বটে। ∴ পিরামিডটির GT উচ্চতা।

এখন, TGD ত্রিভুজের TGD সমকোণ, $GD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}BC\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12$ ফুট $= 2\sqrt{3}$ ফুট এবং $TG = 10$ ফুট।

$\therefore$ ঢালু উচ্চতা $TD = (TG^2 + GD^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(100+12)}$ ফুট

$= \sqrt{112}$ ফুট $= 4\sqrt{7}$ ফুট।

$\therefore$ ঢালু তলসমূহের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}($ ভূমির পরিসীমা $\times$ ঢালু উচ্চতা $)$

$= \frac{1}{2}(12\times3)4\sqrt{7}$ বর্গফুট $= 72\sqrt{7}$ বর্গফুট।

Exercise 6

[Take $\pi = \frac{22}{7}$]

Find the curved surface of the right circular cone :

1. Circumference of the base 2′3″ ; slant height 1′4″.
2. Circumference of the base 3′5″ ; slant height 2′6″.
3. Diameter of the base 3′6″ ; slant height 3′5″.
4. Radius of the base 4′7″ ; slant height 5′3″.
5. Radius of the base 7″ ; height 2′.
6. Radius of the base 1′9″ ; height 2′4″.
7. Diameter of the base 5′10″ ; height 1′.
8. Diameter of the base 4′8″ ; height 8′.
9. Circumference of the base 11′ ; height 1′8″.

Find the whole surface of the right circular cone :

10. Radius of the base 1′9″ ; slant height 2′6″.
11. Diameter of the base 3′4″ ; slant height 3′7″.
12. Circumference of the base 7′4″ ; slant height 4′3″.
13. Radius of the base 7″ ; height 2′.
14. Diameter of the base 3′6″ ; height 1′8″.
15. Circumference of the base 14′8″ ; height 3′9″.

16. The curved surface of a right circular cone is 352 sq. in. and its slant height is 8 in. Find the radius of its base.

17. The curved surface of a right circular cone is 3 sq. ft. 8 sq. in. and the radius of its base is 10 in. Find its slant height.

18. The curved surface of a right circular cone is 550 sq. in. If the slant height of the cone is 25 in., find its height.

19. The curved surface of a right circular cone is $204\frac{2}{7}$ sq. in. and the radius of its base is 5 in. Find its height.

20. The curved surface of a right circular cone is $188\frac{4}{7}$ sq. in. and its height is 8 in. Find the radius of its base and its slant height.

21. The faces of a tetrahedron are 4 equal equilateral triangles. Find the area of all the faces of the tetrahedron, if the length of a side of each triangle is 6 ft.

22. A right pyramid on a square base has four equilateral triangles for its four other faces, each edge being 16 ft. Find the whole surface of the pyramid.

23. Find the area of the slant surfaces of a pyramid if its base is a regular hexagon of side 8 ft. and the other faces are isosceles triangles, the two equal sides of each triangle being 12 ft.

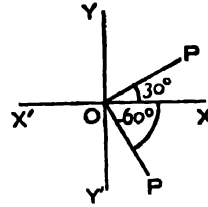
24. A pyramid on a square base of side 18 ft. has four equilateral triangles for its four other faces. If its height is 12 ft., find the area of its whole surface.

25. The base of a right pyramid, 15 ft. high, is an equilateral triangle of side 18 ft. Find the area of the lateral faces.

ত্রিকোণমিতি

(দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ)

1. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ।

XOX′ এবং YOY′ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করায় কাগজের সমতলটি চারি বিভাগে বিভক্ত হইয়াছে। এই বিভাগগুলির প্রত্যেকটি এক একটি **পাদ** (quadrant). উহাদের XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OXকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদ বলে।

OP সরলরেখা O বিন্দুতে সংলগ্ন থাকিয়া উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া বাম আবর্তে (anti-clockwise) ঘুরিতে থাকিলে উহা OX এর সহিত যে সমুদয় কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহারা সবই ধনাত্মক কোণ হইবে এবং ডান আবর্তে (clockwise) ঘুরিতে থাকিলে উহা OX এর সহিত যে সমুদয় কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহারা সবই ঋণাত্মক কোণ হইবে। প্রত্যেক স্থলেই কোণগুলির একবাহু OX এবং অপর বাহু ঘূর্ণমান OP. OPকে কোণগুলির সীমারেখা বলা হয়।

কোণগুলি **ধনাত্মক** হইলে এবং OP সরলরেখা

প্রথম পাদে থাকিলে উহাদের পরিমাণ 0° এবং 90° এর ভিতর হইবে,
দ্বিতীয় পাদে ... ... 90° এবং 180° ... ...,
তৃতীয় পাদে ... ... 180° এবং 270° ... ...,
চতুর্থ পাদে ... ... 270° এবং 360° ... ...।

কোণগুলি **ঋণাত্মক** হইলে এবং OP সরলরেখা

চতুর্থ পাদে থাকিলে উহাদের পরিমাণ 0° এবং −90° এর ভিতর হইবে,
তৃতীয় পাদে ... ... −90° এবং −180° ... ...,
দ্বিতীয় পাদে ... ... −180° এবং −270° ... ...,
প্রথম পাদে ... ... −270° এবং −360° ... ...।

যদি OP সরলরেখা OX এর সহিত 390° কোণ উৎপন্ন করে, তবে $390° = 360° \times 1 + 30°$ বলিয়া, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে

পূরা 1 বার ঘুরিবার পর 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। এস্থলে OP সরলরেখা প্রথম পাদে অবস্থিত (চিত্র দেখ।)।

আবার, যদি OP সরলরেখা OX এর সহিত -780° কোণ উৎপন্ন করে, তবে $-780^\circ = -360^\circ \times 2 - 60^\circ$ বলিয়া, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে ডান আবর্তে পূরা 2 বার ঘুরিবার পর -60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। এস্থলে OP সরলরেখা চতুর্থ পাদে অবস্থিত (চিত্র দেখ।)।

মন্তব্য। ঘূর্ণমান OP সরলরেখাকে Generating line বা Radius vector বলে।

2. কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন।

XOX′ এবং YOY′ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করিলে, প্রচলিত প্রথা অনুসারে OX ও OY বরাবরে দূরত্বকে ধনাত্মক এবং OX′ ও OY′ বরাবরে দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়। ঘূর্ণমান সরলরেখা OP যে কোন পাদেই অবস্থিত থাকুক না কেন উহার দৈর্ঘ্যকে সর্বত্র ধনাত্মক ধরা হয়।

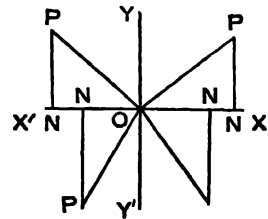
মনে কর, ঘূর্ণমান OP সরলরেখার P বিন্দু হইতে অঙ্কিত PN, XOX′ এর উপর লম্ব। অতএব,

(i) OP প্রথম পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের ON, OP এবং PN এর সবই ধনাত্মক ; কাজেই কোণানুপাতগুলি সবই ধনাত্মক।

(ii) OP দ্বিতীয় পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের ON ঋণাত্মক এবং OP ও PN ধনাত্মক ; কাজেই কোণানুপাতগুলির শুধু sine এবং উহার অন্যোন্যক cosecant ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক।

(iii) OP তৃতীয় পাদে থাকিলে, OPN সমকোণী ত্রিভুজের ON ও PN ঋণাত্মক এবং OP ধনাত্মক ; কাজেই কোণানুপাতগুলির শুধু tangent এবং উহার অন্যোন্যক cotangent ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক।

(iv) OP চতুর্থ পাদে থাকিলে OPN সমকোণী ত্রিভুজের ON ও OP ধনাত্মক এবং PN ঋণাত্মক ; কাজেই কোণানুপাতগুলির শুধু cosine এবং উহার অন্যোন্যক secant ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক।

যদি OP সরলরেখা OX এর সহিত ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলেও OP যখন যে পাদে থাকিবে, কোণানুপাতগুলির চিহ্ন উল্লিখিত রূপ হইবে।

নিম্নের চিত্রটির সাহায্যে কোণানুপাতসমূহের চিহ্নগুলি মনে রাখা সহজ হইবে।

sin *(positive)*	**all** *(positive)*
tan *(positive)*	**cos** *(positive)*

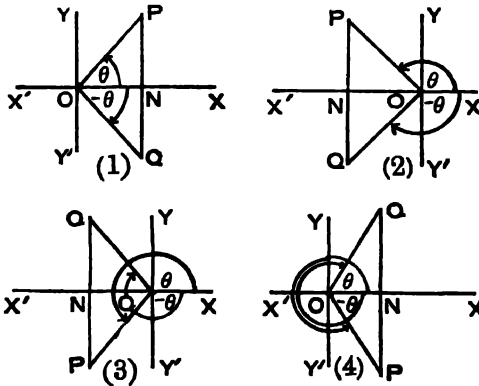
OP প্রথম পাদে থাকিলে, কোণানুপাতগুলির সবই (all) ধনাত্মক, দ্বিতীয় পাদে থাকিলে শুধু sin ধনাত্মক, তৃতীয় পাদে থাকিলে শুধু tan ধনাত্মক এবং চতুর্থ পাদে থাকিলে শুধু cos ধনাত্মক। sin, tan এবং cos ধনাত্মক বলিয়া উহাদের অন্যোন্যকগুলিও ধনাত্মক বুঝিবে। এই নিয়মটি (all, sin, tan, cos) নামে পরিচিত।

Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle θ

(θ কোণের সহযোগে উৎপন্ন কোণসমূহের কোণানুপাত)

3. θর যে কোন মানে $(-\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

(Ratios of the angle $(-\theta)$, θ having any magnitude.)

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOP$ এবং ডান আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOQ$ উৎপন্ন করিল। মনে কর, $\angle XOP = \theta$. তাহা হইলে, $\angle XOQ = -\theta$.

XOX′ এর উপর PN লম্ব টান। PNকে বর্ধিত কর ; উহা যেন OQকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, প্রত্যেক চিত্রে QON এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle QON = \angle PON$ (∵ কোণদ্বয়ের সাংখ্যমান সমান),

$\angle QNO = \angle PNO$ (∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

এবং ON সাধারণ বাহু ; ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান।

এখন, ∵ QN ঋণাত্মক এবং PN ধনাত্মক, ∴ $QN = -PN$

$OQ = OP$ (∵ ঘূর্ণমান রেখা বলিয়া উভয়েই ধনাত্মক)

$$\sin(-\theta) = \frac{QN}{OQ} = \frac{-PN}{OP} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta,$$

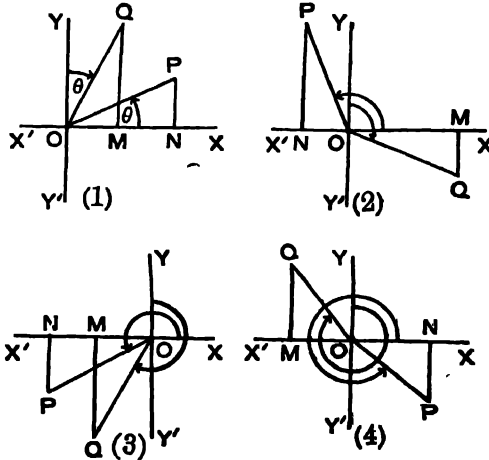
$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta,$$

$$\tan(-\theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{-PN}{ON} = -\frac{PN}{ON} = -\tan\theta$$

এবং উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$.

4. θর যে কোন মানে $(90° - \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। মনে কর, OPর সমান আর একটি সরলরেখা OQ, OX এর

অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করিবার পর ডান

আবর্তে ঘুরিয়া $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOQ = 90° - \theta$ হইল।

XOX′ এর উপর PN ও QM লম্বদ্বয় আঁক।

এখন, প্রত্যেক চিত্রে QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের

$\angle OQM = \angle PON$ (∵ $\angle YOQ$ এবং $\angle XOP$ এর সাংখ্যমান সমান)

$\angle QMO = \angle PNO$ (∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

এবং $OQ = OP$; ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ প্রত্যেক চিত্রে QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান।

∴ সাংখ্যমানে, $QM = ON$, $OM = PN$ এবং $OQ = OP$.

আবার, প্রত্যেক চিত্রে QM ও ONএর এবং OM ও PNএর উভয়েই ধনাত্মক বা উভয়েই ঋণাত্মক এবং OQ ও OPএর উভয়েই ধনাত্মক।

$$\therefore \quad \sin(90° - \theta) = \sin \angle XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta,$$

$$\cos(90° - \theta) = \cos \angle XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta,$$

$$\tan(90° - \theta) = \tan \angle XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{PN} = \cot\theta.$$

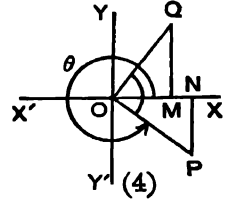
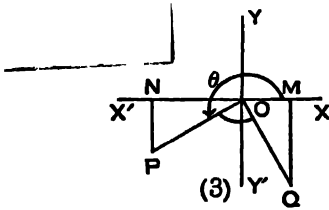
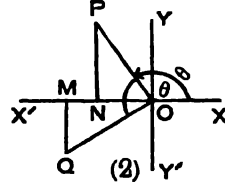
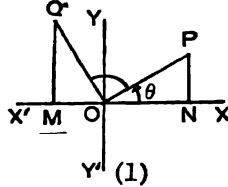
∴ উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$, $\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$.

মন্তব্য। এস্থলে $(90° - \theta)$ এবং θ এর সমষ্টি $= 90°$; কাজেই উহারা পূরক কোণ (complementary angles), সুতরাং দেখা যায়, দুইটি পূরক কোণের (i) একটির sin = অপরটির cos, (ii) একটির tan = অপরটির cot এবং (iii) একটির sec = অপরটির cosec.

5. *θর যে কোন মানে $(90° + \theta)$ কোণের কোণানুপাত।*

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিবার পর $\angle POQ = 90°$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOQ = 90° + \theta$. OPর সমান করিয়া OQ লও। XOX′ এর উপর PN ও QM লম্বদ্বয় আঁক।

এখন, $\because$ $\angle QMO$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle QOM + \angle OQM = 1$ সমকোণ
আবার, $\because$ $\angle QOP$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle QOM + \angle PON = 1$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle OQM = \angle PON$ (সাংখ্যমানে)

$\therefore$ QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle OQM = \angle PON$, $\angle QMO = \angle PNO$

এবং $OQ = OP$;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ প্রত্যেক চিত্রে QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান।

$\therefore$ সাংখ্যমানে, $QM = ON$, $OM = PN$ এবং $OQ = OP$.

আবার, প্রত্যেক চিত্রে QM ও ON এর উভয়েই ধনাত্মক বা উভয়েই ঋণাত্মক, OM ও PN এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, কাজেই $OM = -PN$ এবং OQ ও OP এর উভয়েই সতত ধনাত্মক।

$$\therefore \quad \sin(90^\circ + \theta) = \sin XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-PN}{OP} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta,$$

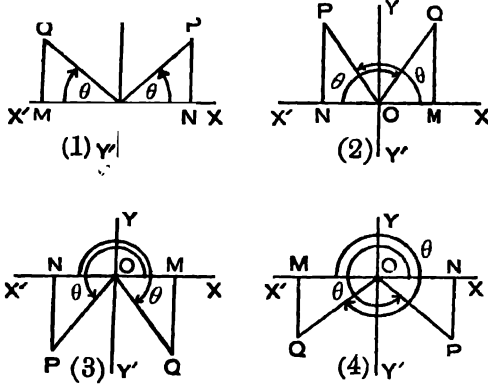
$$\tan(90^\circ + \theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{-PN} = -\frac{ON}{PN} = -\cot\theta$$

এবং উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta, \ \sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta.$$

6. θর যে কোন মানে $(180^\circ - \theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। মনে কর, OPর সমান আর একটি সরলরেখা OQ, OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া OX′ এর অবস্থানে আসিয়া 180° কোণ উৎপন্ন করিবার পর ডান আবর্তে ঘুরিয়া $\angle X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOQ = 180^\circ - \theta$ হইল।

XOX′ এর উপর PN ও QM লম্বদ্বয় আঁক।

এখন, প্রত্যেক চিত্রে QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle QOM = \angle PON$ এবং $\angle QMO = \angle PNO$ (সাংখ্যমানে) এবং $OQ = OP$;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ প্রত্যেক চিত্রে ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান।

$\therefore$ সাংখ্যমানে, $QM = PN$, $OM = ON$ এবং $OQ = OP$.

আবার, প্রত্যেক চিত্রে QM ও PN এর উভয়েই ধনাত্মক বা উভয়েই ঋণাত্মক, OM ও ON এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, কাজেই $OM = -ON$ এবং OQ ও OP এর উভয়েই সতত ধনাত্মক।

$$\therefore \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \angle XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{PN}{OP} = \sin \theta,$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos \angle XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\frac{ON}{OP} = -\cos \theta,$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \tan \angle XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{PN}{-ON} = -\frac{PN}{ON} = -\tan \theta$$

এবং উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$$\cot(180^\circ-\theta) = -\cot\theta,\ \sec(180^\circ-\theta) = -\sec\theta,$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta) = \operatorname{cosec}\theta.$$

মন্তব্য। এস্থলে $(180^\circ-\theta)$ এবং θ এর সমষ্টি $=180^\circ$; কাজেই উহারা সম্পূরক কোণ (supplementary angles). সুতরাং দেখা যায়, দুইটি সম্পূরক কোণের sine দ্বয় সমান এবং cosine দ্বয়ের ও tangent দ্বয়ের সাংখ্যমানদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

বিকল্প প্রমাণ।

$$\sin(180^\circ-\theta) = \sin(90^\circ+\overline{90^\circ-\theta}) = \cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta,$$

[অনু. 5 ও 4]

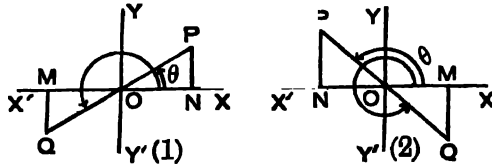
$$\cos(180^\circ-\theta) = \cos(90^\circ+\overline{90^\circ-\theta}) = -\sin(90^\circ-\theta) = -\cos\theta,$$
$$\tan(180^\circ-\theta) = \tan(90^\circ+\overline{90^\circ-\theta}) = -\cot(90^\circ-\theta) = -\tan\theta.$$

$\therefore$ উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$$\cot(180^\circ-\theta) = -\cot\theta,\ \sec(180^\circ-\theta) = -\sec\theta,$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta) = \operatorname{cosec}\theta.$$

7. θর যে কোন মানে $(180^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOP=\theta$ কোণ উৎপন্ন করিবার পর $\angle POQ=180^\circ$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOQ=180^\circ+\theta$ এবং $\angle POQ=180^\circ$ বলিয়া OP এবং OQ একই সরলরেখা।

OPর সমান করিয়া OQ লও। XOX′ এর উপর PN ও QM লম্বদ্বয় আঁক।

এখন, উভয় চিত্রে QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle QOM=$ বিপ্রতীপ $\angle PON$

এবং $\angle QMO=\angle PNO$ (সাংখ্যমানে) এবং $OQ=OP$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ উভয় চিত্রে ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান।

∴ সাংখ্যমানে, $QM = PN$, $OM = ON$ এবং $OQ = OP$.

আবার, উভয় চিত্রে QM ও PN এর এবং OM ও ON এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, কাজেই $QM = -PN$ ও $OM = -ON$ এবং OQ ও OP সতত ধনাত্মক।

$$\therefore \sin(180°+\theta) = \sin XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{-PN}{OP} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta.$$

$$\cos(180°+\theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\frac{ON}{OP} = -\cos\theta,$$

$$\tan(180°+\theta) = \tan XOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{-PN}{-ON} = \frac{PN}{ON} = \tan\theta$$

এবং উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$\cot(180°+\theta) = \cot\theta$, $\sec(180°+\theta) = -\sec\theta$,

$\operatorname{cosec}(180°+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$.

মন্তব্য। এস্থলে OP কে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে রাখিয়া দুইটি চিত্র আঁকা হইয়াছে। OP কে তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে রাখিয়া অপর চিত্র দুইটি অঙ্কন করিয়া দেখাইবে।

বিকল্প প্রমাণ।

$\sin(180°+\theta) = \sin(90°+\overline{90°+\theta}) = \cos(90°+\theta) = -\sin\theta$ [অনু. 5],

$\cos(180°+\theta) = \cos(90°+\overline{90°+\theta}) = -\sin(90°+\theta) = -\cos\theta$ [অনু. 5],

$\tan(180°+\theta) = \tan(90°+\overline{90°+\theta}) = -\cot(90°+\theta) = \tan\theta$ [অনু. 5]

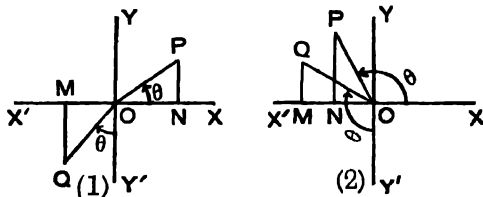
এবং উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$\cot(180°+\theta) = \cot\theta$, $\sec(180°+\theta) = -\sec\theta$,

$\operatorname{cosec}(180°+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$.

8. θর যে কোন মানে $(270°-\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, OP সরলরেখা OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। মনে কর, OPর সমান আর একটি সরলরেখা OQ, OX এর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া OY′ এর অবস্থানে আসিয়া 270° কোণ

উৎপন্ন করিবার পর ডান আবর্তে ঘুরিয়া $\angle Y'OQ=\theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOQ=270°-\theta$ হইল।

XOX' এর উপর PN ও QM লম্বদ্বয় আঁক।

এখন, উভয় চিত্রে QOM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle OQM$ $=\angle PON$ [প্রথম চিত্রে $\angle OQM=$ একান্তর $\angle Y'OQ=\angle PON$ এবং দ্বিতীয় চিত্রে $\angle OQM=$ একান্তর $\angle YOQ=180°-Y'OQ=180°-\angle XOP=\angle PON$] ও $\angle QMO=\angle PNO$ (সাংখ্যমানে) এবং $OQ=OP$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ উভয় চিত্রে ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির সাংখ্যমান সমান।

$\therefore$ সাংখ্যমানে, $QM=ON$, $OM=PN$ এবং $OQ=OP$

আবার, উভয় চিত্রে QM ও ON এর এবং OM ও PN এর একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক, কাজেই $QM=-ON$ এবং $OM=-PN$ এবং OQ ও OP নিয়ত সমান।

$$\therefore \sin(270°-\theta)=\sin XOQ=\frac{QM}{OQ}=\frac{-ON}{OP}=-\frac{ON}{OP}=-\cos\theta,$$

$$\cos(270°-\theta)=\cos XOQ=\frac{OM}{OQ}=\frac{-PN}{OP}=-\frac{PN}{OP}=-\sin\theta,$$

$$\tan(270°-\theta)=\tan XOQ=\frac{QM}{OM}=\frac{-ON}{-PN}=\frac{ON}{PN}=\cot\theta$$

এবং উহাদের অন্যোন্যক তিনটি লইয়া,

$$\cot(270°-\theta)=\tan\theta,\ \sec(270°-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\operatorname{cosec}(270°-\theta)=-\sec\theta.$$

মন্তব্য। এস্থলে OP কে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে রাখিয়া দুইটি চিত্র আঁকা হইয়াছে। OP কে তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে রাখিয়া অপর চিত্র দুইটি অঙ্কন করিয়া দেখাইবে।

বিকল্প প্রমাণ।

$\sin(270^\circ-\theta)=\sin(180^\circ+\overline{90^\circ-\theta})=-\sin(90^\circ-\theta)$ [অনু. 7]
$=-\cos\theta$ [অনু. 5],

$\cos(270^\circ-\theta)=\cos(180^\circ+\overline{90^\circ-\theta})=-\cos(90^\circ-\theta)$ [অনু. 7]
$=-\sin\theta$ [অনু. 5],

$\tan(270^\circ-\theta)=\tan(180^\circ+\overline{90^\circ-\theta})=\tan(90^\circ-\theta)$ [অনু. 7]
$=\cot\theta$ [অনু. 5].

∴ উহাদের অন্যোন্যকগুলি লইয়া,

$\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$, $\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$,
$\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$.

9. θর যে কোন মানে $(270^\circ+\theta)$ কোণের কোণানুপাত।

চিত্র আঁকিয়া জ্যামিতির সাহায্যে কোণানুপাতগুলি এস্থলেও নির্ণয় করা চলে। শুধু বিকল্প প্রণালী অবলম্বন করা গেল।

$\sin(270^\circ+\theta)=\sin(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta})=-\sin(90^\circ+\theta)$ [অনু. 7]
$=-\cos\theta$ [অনু. 5],

$\cos(270^\circ+\theta)=\cos(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta})=-\cos(90^\circ+\theta)$ [অনু. 7]
$=\sin\theta$ [অনু. 5],

$\tan(270^\circ+\theta)=\tan(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta})=\tan(90^\circ+\theta)$ [অনু. 7]
$=-\cot\theta$ [অনু. 5].

10. $(360^\circ\pm\theta)$ এবং $(n.\,360^\circ\pm\theta)$ এর কোণানুপাত।

একটি সরলরেখা OXএর অবস্থান হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া উহার OP অবস্থানে θ কোণ উৎপন্ন করিল। তৎপর সরলরেখাটি যদি উভয় আবর্তে n সংখ্যক বার পুরা পাক ঘুরে, তবে উহা পুনরায় উহার OP অবস্থানে আসিবে এবং উৎপন্ন কোণের মোট পরিমাণ $n.360^\circ+\theta$ হইবে, যেখানে n যে কোন একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

প্রত্যেক স্থলে ঘূর্ণমান সরলরেখাটির শেষ অবস্থান একই OP বলিয়া, $(n.360^\circ+\theta)$ এর এবং θ এর কোণানুপাতগুলি চিহ্নসমেত একই হইবে।

অনুরূপে, $(n.360^\circ-\theta)$এর এবং $(-\theta)$এর কোণানুপাতগুলিও একই।

$\therefore$ $n.360° \pm \theta$ এবং $\pm\theta$ এর কোণানুপাত সমান, যেখানে n যে কোনও ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। কাজেই $n = 1$ হইলে, $(360° \pm \theta)$ এর এবং $\pm\theta$ এর কোণানুপাত সমান।

$\therefore$ কোন কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করিতে গিয়া, সুবিধাস্থলে ঐ কোণটির সহিত 360° বা 2π এর কোন গুণিতক যোগ করা যায় অথবা ঐ কোণটি হইতে বিয়োগ করা যায়।

দ্রষ্টব্য। যে সকল কোণের একই সীমারেখা, তাহাদিগকে coterminal angles বলে। যেমন, n যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, $(n.360+\theta)$ কোণসমূহের সীমারেখা একই হইবে।

11. পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদসমূহের সিদ্ধান্তগুলি হইতে নিম্নের নিয়ম দুইটি পাওয়া যায়।

নিয়ম। (1) $\theta = 90° \times$ যুগ্মসংখ্যা $\pm\theta_1$ হইলে, সাংখ্যমান হিসাবে θ কোণের sin, cos, tan ইত্যাদি যথাক্রমে $= \theta_1$ কোণের sin, cos, tan ইত্যাদি হইবে।

চিহ্নটি নির্ণয়ের জন্য θ কোণটির সীমারেখা কোন্ পাদে অবস্থিত নির্ণয় কর। (all, sin, tan, cos) এর নিয়মানুসারে ঐ পাদে sin, cos, tan ইত্যাদির যে চিহ্ন হইবে, θ_1 কোণের sin, cos, tan ইত্যাদিরও যথাক্রমে সেই চিহ্ন হইবে।

(2) $\theta = 90° \times$ বিযুগ্মসংখ্যা $\pm\theta_2$ হইলে, সাংখ্যমান হিসাবে θ কোণের sin, cos, tan ইত্যাদি যথাক্রমে $= \theta_2$ কোণের cos, sin, cot ইত্যাদি হইবে এবং ইহাদের চিহ্নগুলি নিয়ম (1) অনুযায়ী হইবে।

12. কয়েকটি বিশেষ কোণের কোণানুপাত।

$\sin 180° = \sin(180° + 0°) = -\sin 0° = 0$ (অনু. 7)

$\cos 180° = \cos(180° + 0°) = -\cos 0° = -1.$

$\tan 180° = \tan(180° + 0°) = \tan 0° = 0.$

$\sin 270° = \sin(270° + 0°) = -\cos 0° = -1$ (অনু. 9)

$\cos 270° = \cos(270° + 0°) = \sin 0° = 0.$

$\tan 270° = \tan(270° + 0°) = -\cot 0° = -\infty.$

$\sin 360° = \sin(360° + 0°) = \sin 0° = 0$ (অনু. 10)

$\cos 360° = \cos(360° + 0°) = \cos 0° = 1.$

$\tan 360° = \tan(360° + 0°) = \tan 0° = 0.$

সঙ্কেত। মনে মনে জ্যামিতিক চিত্রগুলি কল্পনা করিলে ঐ চিত্রগুলি হইতে অনুপাতগুলি অনায়াসে পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. Find the value of sin 570°.

নিয়ম (1): $570° = 90° \times 6 + 30°$. ∵ 6 যুগ্মসংখ্যা, ∴ sin ঠিকই থাকিবে। আবার, ∵ 570° কোণটির সীমারেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত, ∴ sin 570° এর চিহ্ন – বলিয়া চিহ্নটি – হইবে।

∴ প্রক্রিয়া: $\sin 570° = \sin(90° \times 6 + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

নিয়ম (2): $570° = 90° \times 7 - 60°$. ∵ 7 বিযুগ্মসংখ্যা, ∴ sin এর স্থলে cos হইবে।

আবার, ∵ 570° কোণটির সীমারেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত, ∴ sin 570° এর চিহ্ন – বলিয়া চিহ্নটি – হইবে।

∴ প্রক্রিয়া: $\sin 570° = \sin(90° \times 7 - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

সাধারণ নিয়মে: $\sin 570° = \sin(360° + 210°) = \sin 210°$
$= \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

উদা. 2. Find the value of cos 870°.

নিয়ম (1): $870° = 90° \times 9 + 60°$. ∵ 9 বিযুগ্মসংখ্যা, ∴ cos এর স্থলে sin হইবে।

আবার, ∵ 870° কোণটির সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, ∴ cos 870° এর চিহ্ন – বলিয়া চিহ্নটি – হইবে।

∴ প্রক্রিয়া: $\cos 870° = \cos(90° \times 9 + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

নিয়ম (2): $870° = 90° \times 10 - 30°$. ∵ 10 যুগ্মসংখ্যা, ∴ cos ঠিকই থাকিবে। আবার, ∵ 870° কোণটির সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, ∴ cos 870° এর চিহ্ন – বলিয়া চিহ্নটি – হইবে।

∴ প্রক্রিয়া: $\cos 870° = \cos(90° \times 10 - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

সাধারণ নিয়মে: $\cos 870° = \cos(360° \times 2 + 150°) = \cos 150°$
$= \cos(90° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

উদা. 3. Find the value of tan (−1575°).

সাধারণ নিয়মে: $\tan(-1575°) = -\tan 1575°$ (অনু. 3)
$= -\tan(360° \times 4 + 135°) = -\tan 135°$
$= -\tan(90° + 45°) = -(-\cot 45°) = 1$.

উদা. 4. Find the smallest positive coterminal angle of $\sin 800°$, $\cos(-920°)$ and $\tan \frac{31}{4}\pi$.

$\sin 800° = \sin(2 \times 360° + 80°) = \sin 80°.$

$\cos(-920°) = \cos(-360° \times 3 + 160°) = \cos 160°.$

$\tan \frac{31}{4}\pi = \tan(7\pi + \frac{3}{4}\pi) = \tan(2\pi \times 3 + \frac{7}{4}\pi) = \tan \frac{7}{4}\pi = \tan(\pi + \frac{3}{4}\pi)$
$= \tan \frac{3}{4}\pi.$

$\therefore$ নির্ণেয় coterminal angle $80°, 160°, \frac{3}{4}\pi$.

উদা. 5. Express $\sin 230°$ and $\tan(-1080°)$ in terms of the ratios of a positive angle less than $45°$.

$\sin 230° = \sin(180° + 50°) = -\sin 50° = -\sin(90° - 40°)$
$= -\cos 40°.$

$\tan(-1020°) = \tan(-3 \times 360° + 60°) = \tan 60° = \tan(90° - 30°)$
$= \cot 30°.$

উদা. 6. Find the value of $\sin\theta + \cos\theta$, where $\theta = \frac{23}{4}\pi$.

$\frac{23}{4}\pi = 6\pi - \frac{1}{4}\pi = 2\pi.3 - \frac{1}{4}\pi = 360° \times 3 - 45°$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \sin(360° \times 3 - 45°) + \cos(360° \times 3 - 45°)$
$= \sin(-45°) + \cos(-45°)$
$$= -\sin 45° + \cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

উদা. 7. Find the value of $2\sin 180° + 3\cos 270° + 4\tan 360°$.

প্রদত্ত রাশি $= 2\sin(180° - 0°) + 3\cos(360° - 90°) + 4\tan(360° + 0°)$
$= 2\sin 0° + 3\cos(-90°) + 4\tan 0°$
$= 2 \times 0 + 3\cos 90° + 4 \times 0 = 0 + 3 \times 0 + 0 = 0.$

উদা. 8. Show that $\sin 780° \cos 750° - \cos(-660°)\sin(-690°) = \frac{1}{2}$.

বাম পক্ষ $= \sin(2 \times 360° + 60°)\cos(2 \times 360° + 30°)$
$- \cos(-360° \times 2 + 60°)\sin(-360° \times 2 + 30°)$
$= \sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30°$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

উদা. 9. Evaluate $\tan\frac{3\pi}{20}\tan\frac{4\pi}{20}\tan\frac{5\pi}{20}\tan\frac{6\pi}{20}\tan\frac{7\pi}{20}$.

প্রদত্ত রাশি $=\tan 27^\circ \tan 36^\circ \tan 45^\circ \tan 54^\circ \tan 63^\circ$

$=\tan 27^\circ \tan 36^\circ \tan 45^\circ \tan(90^\circ-36^\circ) \tan(90^\circ-27^\circ)$

$=\tan 27^\circ \tan 36^\circ \tan 45^\circ \cot 36^\circ \cot 27^\circ$

$=(\tan 27^\circ \cot 27^\circ)(\tan 36^\circ \cot 36^\circ) \tan 45^\circ$

$=1.1.1=1.$

উদা. 10. Find the values of $\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}$, where n is any integer.

এস্থলে n যে কোন যুগ্ম বা বিযুগ্ম সংখ্যা হইতে পারে।

(1) যদি n যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে মনে কর, $n=2k$ যেখানে k যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$$\therefore \quad \cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}=\cos\left\{2k\pi+(-1)^{2k}\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right) \quad [\because \ 2k \text{ যুগ্মসংখ্যা}]$$

$$=\cos\frac{\pi}{3} \quad [\because 2k\pi=k.360^\circ]=\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2}.$$

(2) যদি n বিযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে মনে কর, $n=2k+1$ যেখানে k যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$$\therefore \quad \cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}=\cos\left\{(2k+1)\pi+(-1)^{2k+1}\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=\cos\left\{2k\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \quad [\because 2k\pi=k.360^\circ]$$

$$=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\tfrac{1}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$ এবং $-\frac{1}{2}$.

উদা. 11. If $\tan\theta=\frac{3}{4}$, find $\sin\theta$ and $\cos\theta$.

$\because$ $\tan\theta$ এর মান ধনাত্মক, $\therefore$ (all, sin, tan, cos) এর নিয়ম হইতে দেখা যায়, θ কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে অথবা তৃতীয় পাদে থাকিবে। মনে কর, সীমারেখাটি প্রথম পাদে OP এবং তৃতীয় পাদে OQ.

XOX′এর উপর PN ও QM লম্ব টান।

$\because$ $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\therefore$ প্রথম পাদে PN $=3$ এবং ON $=4$,

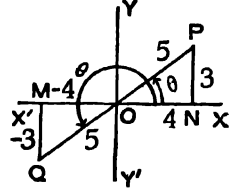
$$\therefore\quad OP=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{PN}{OP}=\frac{3}{5} \text{ এবং } \cos\theta=\frac{ON}{OP}=\frac{4}{5}.$$

আবার, $\because$ $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\therefore$ তৃতীয় পাদে QM $=-3$ এবং OM $=-4$,

$$\therefore\ OQ=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5.$$

$$\sin\theta=\frac{QM}{OQ}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5} \text{ এবং } \cos\theta=\frac{OM}{OQ}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\pm\frac{3}{5} \text{ এবং } \cos\theta=\pm\frac{4}{5}.$$

উদা. 12. If $\tan\theta=-\frac{3}{4}$ and $\cos\theta$ is negative, evaluate

$$\frac{\sin(-\theta)-\cos\theta}{\sec\theta-\operatorname{cosec}(-\theta)}.$$

$\because$ $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক, $\therefore$ (all, sin, tan, cos)এর নিয়ম হইতে দেখা যায়, θ কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অথবা চতুর্থ পাদে থাকিতে পারে। কিন্তু $\cos\theta$ এর মান ঋণাত্মক বলিয়া θ কোণের সীমারেখা চতুর্থ পাদে থাকিতে পারে না, কাজেই শুধু দ্বিতীয় পাদে থাকিবে।

মনে কর, সীমারেখাটি OQ.

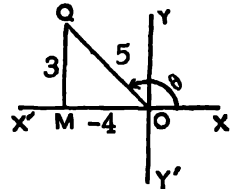
XOX′এর উপর QM লম্ব টান।

$\because$ $\tan\theta=-\frac{3}{4}$,

$\therefore$ QM $=3$ এবং OM $=-4$.

$\therefore$ $OQ=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{QM}{OQ}=\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{OM}{OQ}=-\frac{4}{5};\ \therefore \sec\theta=-\frac{5}{4},\ \operatorname{cosec}\theta=\frac{5}{3}.$$

$$\therefore\quad \text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{-\sin\theta-\cos\theta}{\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta}=\frac{-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{-\frac{5}{4}+\frac{5}{3}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{25}.$$

উদা. 13. Find the values of θ numerically less than 360° which satisfy the equation $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

আমরা জানি, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ (1) $\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) $\because$ $\sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\sin(360^\circ - 45^\circ) = \sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $\sin 315^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $-45^\circ, -135^\circ, 225^\circ$ এবং 315° কোণের $\sin = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\theta = -45^\circ, -135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

উদা. 14. Solve $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$ for θ, giving all possible values between 0° and 360°. (C. U. 1936)

সমীকরণটি হইতে, $2 - \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

বা, $4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta = 3\sin^2\theta = 3(1 - \cos^2\theta)$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$ বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$ $\therefore$ $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\because$ $\cos\theta$ ধনাত্মক, $\therefore$ θ কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে অথবা চতুর্থ পাদে থাকিবে।

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60° = \cos(360° - 60°)$

$\therefore \quad \theta = 60°$ অথবা $360° - 60° = 300°$.

$\therefore \quad \theta = 60°$ এবং $300°$.

উদা. 15. Find the values of θ, lying between 0° and 360°, that satisfy the equation $2\tan^2\theta - \sec^2\theta = 2$.

সমীকরণটি হইতে, $2\tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta = 3 \qquad \therefore \tan\theta = \pm\sqrt{3}$.

যদি $\tan\theta = \sqrt{3}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ধনাত্মক বলিয়া θ কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে অথবা তৃতীয় পাদে থাকিবে।

$\therefore \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60° = \tan(180° + 60°)$.

$\therefore \theta = 60°$ বা $240°$.

আবার, যদি $\tan\theta = -\sqrt{3}$ হয়, তবে $\tan\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া θ কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অথবা চতুর্থ পাদে থাকিবে।

$\therefore \tan\theta = -\sqrt{3} = \tan(180° - 60°) = \tan(360° - 60°)$

$\therefore \theta = 180° - 60° = 120°$ বা, $360° - 60° = 300°$.

$\therefore \theta$র নির্ণেয় মান $= 60°, 120°, 240°, 300°$.

Exercise 1

Find the value of

1. $\sin 585°$.　　2. $\cos 780°$.　　3. $\tan 1020°$.

4. $\cot 1140°$.　　5. $\sec 1200°$.　　6. $\operatorname{cosec} 1305°$.

7. $\sin(-750°)$.　　8. $\cos(-1230°)$.　　9. $\tan(-1485°)$.

Find the smallest positive coterminal angle of

10. $\sin 760°$.　　11. $\cos(-1000°)$.　　12. $\tan \frac{23}{4}\pi$.

Express in terms of ratios of positive angles less than 45°

13. $\sin 300°$.　　14. $\tan(-840°)$.　　15. $\sec(-1240°)$.

Prove that

16. $\sin(\theta - 180°) = -\sin\theta$.　　17. $\tan(\theta - \frac{3}{2}\pi) = -\cot\theta$.

Find the value of

18. $\sin(3\pi + \frac{1}{4}\pi) - \cos(3\pi - \frac{1}{4}\pi)$.

19. $\dfrac{\sin(\frac{1}{2}\pi + \theta)\cos(\pi + \theta)\cot(\frac{3}{2}\pi + \theta)}{\sin\theta\cos\theta}$.

Show that

20. $\sin\pi + 2\cos\frac{3}{2}\pi + 3\tan 2\pi = 0$.

21. $\sin 390^\circ \cos 420^\circ + \cos(-330^\circ)\sin(-300^\circ) = 1$.

Evaluate

22. $\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\frac{5\pi}{4} + \cos^2\frac{7\pi}{4}$.

23. $\tan 25^\circ \tan 35^\circ \tan 45^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ$.

24. $\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{4\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{6\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}$.

25. $\tan\frac{\pi}{20}\tan\frac{3\pi}{20}\tan\frac{5\pi}{20}\tan\frac{7\pi}{20}\tan\frac{9\pi}{20}$.

26. Simplify and evaluate, when $\theta = 225^\circ$.

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta)\cos(\pi - \theta)\tan(\frac{3}{2}\pi - \theta)}{\cot(\pi - \theta)\sec(\pi + \theta)\operatorname{cosec}(\frac{3}{2}\pi + \theta)}.$$

27. Prove that, if n is any integer,

(*i*) $\tan(n\pi + \theta) = \tan\theta$.

(*ii*) $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta$.

28. Find the value of $\sin\left\{n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{6}\right\}$, where n is any integer.

29. Find the values of $\cos\left\{n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{4}\right\}$, where n is any integer.

30. If θ lies between 180° and 270° and $\tan\theta = \frac{3}{4}$, find $\sin\theta$.

31. If $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ and $\cos\theta$ is positive, find $\tan\theta$.

32. If $\tan\theta = \frac{5}{12}$ and $\cos\theta$ is negative, find $\sin\theta$.

33. If $\cot\theta = \frac{4}{3}$, find $\sin\theta$.

34. If $\sec\theta = -2$, find $\tan\theta$.

35. If $\sin\theta = \frac{4}{5}$ and $\tan\theta$ is negative, find the value of

$$\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\tan(-\theta) + \cot\theta}.$$

36. Find the values of θ numerically less than 360° which satisfy the equation (*i*) $\sin\theta=\frac{1}{2}$, (*ii*) $\tan\theta=-\sqrt{3}$.

37. Solve for θ, giving all possible values when $0^\circ<\theta<360^\circ$.

(*i*) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$. (C. U. 1936)

(*ii*) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$. (C. U. 1954)

(*iii*) $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$. (A. U. 1955)

(*iv*) $2\cos^2\theta+\sin\theta=2$.

(*v*) $2\tan^2\theta+\sec^2\theta=2$.

38. If ABC be a triangle, show that

$$\frac{\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)}{\cos(270^\circ-A)+\sin(360^\circ-B)+\sin(180^\circ+C)}.$$

39. If ABCD be a quadrilateral, show that

$$\sin(A+B)+\sin(C+D)=0.$$

$[\because A+B=360^\circ-(C+D)]$

40. If ABCD be a cyclic quadrilateral, show that

(*i*) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$.

(*ii*) $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=0$.

$[\because A+C=B+D=180^\circ, \therefore A=180^\circ-C, B=180^\circ-D]$

Compound Angles

(Addition and Subtraction Formulæ)

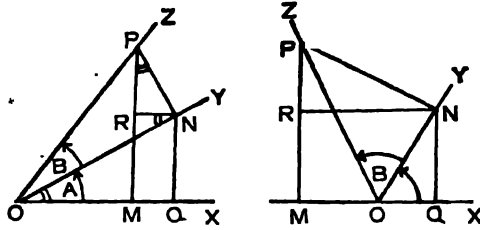
13. দুই বা ততোধিক কোণের সমষ্টিকে বা দুইটি কোণের অন্তরকে মিশ্র কোণ (Compound Angle) বলে। যেমন, A+B, A+B+C এবং A−B মিশ্র কোণ।

14. *To prove that*

(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(2) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$,

when A and B are *positive* and *acute* and (A+B) is acute or obtuse.

(1) মনে কর, ঘূর্ণমান OX সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম

আবর্তে ঘুরিয়া A কোণের সমান XOY কোণ এবং B কোণের সমান YOZ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOZ = A + B$.

অঙ্কন। ঘূর্ণমান রেখাটির শেষ অবস্থান OZ এর উপর যে কোন বিন্দু P লও। OX এর উপর PM এবং OY এর উপর PN লম্ব টান। আবার, OX এর উপর NQ এবং PM এর উপর NR লম্ব টান।

প্রমাণ। $\angle RPN = \angle PRN - \angle PNR = \angle PNO - \angle PNR = \angle RNO$
= একান্তর $\angle A$.

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin MOP = \frac{MP}{OP} = \frac{MR + RP}{OP}$$

$$= \frac{QN}{OP} + \frac{RP}{OP} = \frac{QN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{RP}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos RPN \sin B.$$

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

(2) প্রথমে (1) এর ন্যায় অঙ্কন কর।

প্রমাণ। $\angle RPN = \angle PRN - \angle PNR = \angle PNO - \angle PNR = \angle RNO$
= একান্তর $\angle A$.

$$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos MOP = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ - MQ}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} - \frac{RN}{OP} = \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{RN}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin RPN \sin B.$$

$$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

দ্রষ্টব্য। A এবং B কে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া উপপাদ্যদ্বয় প্রমাণ করা হইয়াছে। উহারা অপর যে কোন আকারের কোণ হইলে,

(i) চিত্রটি আঁকিবে এবং সংশ্লিষ্ট রেখাগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নগুলিকে যথাযথভাবে লইয়া একই প্রমাণ-প্রণালী অবলম্বনপূর্বক প্রমাণ করিবে।

অথবা, (ii) কোনরূপ চিত্র না আঁকিয়া উপপাদ্যদ্বয়ের সাহায্যে প্রমাণ করিবে। নিম্নে এই প্রণালীটি দেখান গেল।

মনে কর, সূত্রদ্বয়ে $A_1 = 90° + A$ = একটি স্থূলকোণ। তাহা হইলে,

$\sin A_1 = \sin (90° + A) = \cos A$ এবং $\cos A_1 = \cos (90° + A) = -\sin A$

$\therefore \quad \sin (A_1 + B) = \sin \{90° + (A + B)\} = \cos (A + B)$

$= \cos A \cos B - \sin A \sin B = \sin A_1 \cos B + \cos A_1 \sin B$

এবং $\cos (A_1 + B) = \cos \{90° + (A + B)\} = -\sin (A + B)$

$= -\sin A \cos B - \cos A \sin B = \cos A_1 \cos B - \sin A_1 \sin B.$

$\therefore$ A স্থূলকোণ ($= A_1$) হইলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকে।

অনুরূপে, $B_1 = 90° + B$ = একটি স্থূলকোণ হইলে অথবা A এবং B এর উভয়ে স্থূলকোণ হইলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকিবে।

$\therefore$ A এবং Bর পরিমাণ 0° এবং 180°এর ভিতর থাকিলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকিবে।

আবার, $A_2 = 90° + A_1$ এবং $B_2 = 90° + B_1$ হইলেও দেখান যায় যে, উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকে।

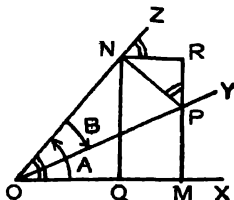
$\therefore$ A এবং Bর পরিমাণ 0° এবং 270°এর ভিতর থাকিলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকে।

এইরূপে দেখান যায় যে, A এবং Bর পরিমাণ যাহাই হউক না কেন, উপপাদ্যদ্বয় সকল স্থলেই সত্য।

15. *To prove that*

(1) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(2) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$,

when A and B are *positive* and *acute* and $A > B$.

(1) মনে কর, ঘূর্ণমান OX সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া A কোণের সমান XOZ কোণ উৎপন্ন করিল এবং তৎপর ডান আবর্তে ঘুরিয়া B কোণের সমান ZOY কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\angle XOY = A - B$.

অঙ্কন। ঘূর্ণমান রেখাটির শেষ অবস্থান OY এর উপর যে কোন বিন্দু P লও। OX এর উপর PM এবং OZ এর উপর PN লম্ব টান। আবার, OX এর উপর NQ এবং বর্ধিত MPর উপর NR লম্ব টান।

প্রমাণ। $\angle RPN = \angle PRN - \angle PNR = \angle PNZ - \angle PNR = \angle RNZ$
= অনুরূপ $\angle QON = \angle A$

$$\therefore \quad \sin(A-B) = \sin MOP = \frac{MP}{OP} = \frac{MR - PR}{OP}$$

$$= \frac{QN}{OP} - \frac{PR}{OP} = \frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP} - \frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos RPN \sin B,$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.}$$

(2) প্রথম (1) এর ন্যায় অঙ্কন কর।

প্রমাণ। $\angle RPN = \angle PRN - \angle PNR = \angle PNZ - \angle PNR = \angle RNZ$
= অনুরূপ $\angle QON = \angle A$

$$\therefore \quad \cos(A-B) = \cos MOP = \frac{OM}{OP} = \frac{OQ + QM}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP} = \frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP} + \frac{NR}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin RPN \sin B,$$

$$\therefore \quad \mathbf{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.}$$

দ্রষ্টব্য। A এবং B কে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া উপপাদ্যদ্বয় প্রমাণ করা হইয়াছে। উহারা অপর যে কোন আকারের কোণ হইলে,

(i) চিত্রটি আঁকিবে এবং সংশ্লিষ্ট রেখাগুলির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নগুলিকে যথাযথভাবে লইয়া একই প্রমাণ-প্রণালী অবলম্বনপূর্বক প্রমাণ করিবে।

অথবা, (ii) কোনরূপ চিত্র না আঁকিয়া উপপাদ্যদ্বয়ের সাহায্যে প্রমাণ করিবে। নিম্নে এই প্রণালীটি দেখান গেল।

মনে কর, সূত্রদ্বয়ে $A_1 = 90° + A$ = একটি স্থূলকোণ। তাহা হইলে,

$\sin A_1 = \sin(90° + A) = \cos A$ এবং $\cos A_1 = \cos(90° + A) = -\sin A$

$\therefore \quad \sin(A_1 - B) = \sin\{90° + (A - B)\} = \cos(A - B)$

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B = \sin A_1 \cos B - \cos A_1 \sin B$

এবং $\cos(A_1 - B) = \cos\{90° + (A - B)\} = -\sin(A - B)$

$= -\sin A \cos B + \cos A \sin B = \cos A_1 \cos B + \sin A_1 \sin B.$

$\therefore$ A স্থূলকোণ ($=A_1$) হইলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকে।

অনুরূপে, $B_1 = 90° + B =$ একটি স্থূলকোণ হইলে অথবা A এবং Bর উভয়ে স্থূলকোণ হইলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকিবে।

$\therefore$ A এবং B এর পরিমাণ দুই সমকোণ পর্যন্ত হইলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকিবে।

আবার, $A_2 = 90 + A_1$ এবং $B_2 = 90 + B_1$ হইলেও দেখান যায় যে, A এবং Bর পরিমাণ তিন সমকোণ পর্যন্ত হইলে উপপাদ্যদ্বয়ের সত্যতা বজায় থাকিবে।

এইরূপে দেখান যায় যে, A এবং Bর পরিমাণ যাহাই হউক না কেন, উপপাদ্যদ্বয় সকল স্থলেই সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B \quad \cdots \quad \text{(i)}$

$= \cos^2 B - \cos^2 A \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

$$\begin{aligned}
&\sin(A+B)\sin(A-B)\\
&= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)\\
&= \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B\\
&= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B\\
&= \sin^2 A - \sin^2 B \quad \cdots \quad \text{(i)}\\
&= (1-\cos^2 A) - (1-\cos^2 B)\\
&= \cos^2 B - \cos^2 A \quad \cdots \quad \text{(ii)}
\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B \quad \cdots \quad \text{(i)}$

$= \cos^2 B - \sin^2 A \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

$$\begin{aligned}
&\cos(A+B)\cos(A-B)\\
&= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)\\
&= \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B\\
&= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B\\
&= \cos^2 A - \sin^2 B \quad \cdots \quad \text{(i)}\\
&= (1-\sin^2 A) - (1-\cos^2 B)\\
&= \cos^2 B - \sin^2 A \quad \cdots \quad \text{(ii)}
\end{aligned}$$

16. *To prove that*

(i) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

(i) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

∴ ডানপক্ষের লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\tan(A+B)=\dfrac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

∴ ডানপক্ষের লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

17. *To prove that*

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$.

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$.

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

∴ ডানপক্ষের লব ও হরকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\cot(A+B)=\dfrac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

∴ ডানপক্ষের লব ও হরকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

18. To find the expansions of

(i) $\sin(A+B+C)$

(ii) $\cos(A+B+C)$

(iii) $\tan(A+B+C)$

(i) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$$

$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$$

$$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C$$

অথবা, $=\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}-\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\right)$

$$=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C).$$

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$

$$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$$

$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$$

অথবা, $=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B)$.

(iii) $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}$$

[লব ও হরকে $1-\tan A\tan B$ দ্বারা গুণ করিয়া]

অথবা, $\tan(A+B+C)=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)}{\cos A\cos B\cos C(1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C)}$$

[(i) ও (ii) এর ন্যায় প্রমাণ করিয়া]

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}.$$

মন্তব্য। অনুরূপ প্রণালী অবলম্বন করিয়া, 3 এর অধিক সংখ্যক কোণের সমষ্টির ত্রিকোণমিতিক বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. Find the values of sin 15°, cos 15° and tan 15°.

$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$\tan 15°=\tan(45°-30°)=\dfrac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

অথবা, $\tan 15°=\dfrac{\sin 15°}{\cos 15°}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$ ইত্যাদি।

উদা. 2. Eind the value of cos 75° and tan 75°.

$\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

অথবা, $\cos 75° = \cos(90° - 15°) = \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

$$\tan 75° = \tan(45° + 30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \div \left(1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

উদা. 3. Find the value of $\cos(A+B)$, if $\sin A = \frac{3}{5}$ and $\cos B = \frac{12}{13}$.

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \tfrac{144}{169}} = \sqrt{\tfrac{25}{169}} = \tfrac{5}{13}$$

$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{12}{13} - \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{5}{13} = \tfrac{48}{65} - \tfrac{15}{65} = \tfrac{33}{65}.$$

মন্তব্য। প্রকৃত প্রস্তাবে এস্থলে $\cos A = \pm\frac{4}{5}$ এবং $\sin B = \pm\frac{5}{13}$. যদি A এবং B সূক্ষ্মকোণ বলা থাকে, তবে স্পষ্টতঃই $\cos A = \frac{4}{5}$ এবং $\sin B = \frac{5}{13}$. যদি কিছুই বলা না থাকে, তাহা হইলেও এরূপ স্থলে A এবং B কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া $\cos A = \frac{4}{5}$ এবং $\sin B = \frac{5}{13}$ ধরা হয়।

উদা. 4. Show that

$$\sin 3\theta \cos 2\theta + \cos 3\theta \sin 2\theta = \sin 7\theta \cos 2\theta - \cos 7\theta \sin 2\theta.$$

বাম পক্ষ $= \sin(3\theta + 2\theta) = \sin 5\theta = \sin(7\theta - 2\theta)$

$$= \sin 7\theta \cos 2\theta - \cos 7\theta \sin 2\theta.$$

উদা. 5. Prove that $\tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25° = 1$.

$$\because \quad \frac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°} = \tan(20° + 25°) = \tan 45° = 1$$

$\therefore \quad \tan 20° + \tan 25° = 1 - \tan 20° \tan 25°$

$\therefore \quad \tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25° = 1.$

উদা. 6 Show that $\frac{\cos 5^\circ - \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} = \cot 50^\circ$.

$$\cos 5^\circ - \sin 5^\circ = \cos(50^\circ - 45^\circ) - \sin(50^\circ - 45^\circ)$$
$$= \cos 50^\circ \cos 45^\circ + \sin 50^\circ \sin 45^\circ - \sin 50^\circ \cos 45^\circ + \cos 50^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos 50^\circ$$

$$\cos 5^\circ + \sin 5^\circ = \cos(50^\circ - 45^\circ) + \sin(50^\circ - 45^\circ)$$
$$= \cos 50^\circ \cos 45^\circ + \sin 50^\circ \sin 45^\circ + \sin 50^\circ \cos 45^\circ - \cos 50^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin 50^\circ$$

$$\therefore \frac{\cos 5^\circ - \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos 50^\circ}{\sqrt{2}\sin 50^\circ} = \cot 50^\circ.$$

উদা. 7. Show that $\cot 2A + \tan A = \operatorname{cosec} 2A$. (C. U. 1947)

$$\cot 2A + \tan A = \frac{\cos 2A}{\sin 2A} + \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\cos 2A \cos A + \sin 2A \sin A}{\sin 2A \cos A}$$
$$= \frac{\cos(2A - A)}{\sin 2A \cos A} = \frac{\cos A}{\sin 2A \cos A} = \frac{1}{\sin 2A} = \operatorname{cosec} 2A.$$

উদা. 8. Show that $\cot(45^\circ - A) = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}$.

$$\cot(45^\circ - A) = \frac{\cot 45^\circ \cot A + 1}{\cot A - \cot 45^\circ} = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}.$$

উদা. 9. Prove that $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$

(C. U. 1944)

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)}{(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)}$$

$$=\frac{\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B}{\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B}$$

$$=\frac{\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B}{\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B}$$

$$=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$$ [অনুসিদ্ধান্ত 1 এবং 2 দেখ ।]

উদা. 10. Simplify :

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=0.$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\sin B}=\cot B-\cot A$$

অনুরূপে, $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}=\cot C-\cot B$ এবং $\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=\cot A-\cot C$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\cot B-\cot A+\cot C-\cot B+\cot A-\cot C=0.$

উদা. 11. If $a\cos(\alpha-\beta)=b\cos(\alpha+\beta)$, show that

$$(a-b)\cot\alpha+(a+b)\tan\beta=0.$$

প্রদত্ত সর্ত হইতে, $a(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$$=b(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

বা, $(a-b)\cos\alpha\cos\beta+(a+b)\sin\alpha\sin\beta=0$

$$\therefore\ (a-b)\cot\alpha+(a+b)\tan\beta=0.$$

উদা. 12. If $A+B+C=\pi$ and $\cos A=\cos B\cos C$, show that $\tan B+\tan C=\tan A$. (C. U. 1942)

$$\tan B+\tan C=\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\sin(B+C)}{\cos A}=\frac{\sin(\pi-A)}{\cos A}=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A.$$

উদা. 13. If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$, show that $\cot A\cot B\cot C=\cot D$. (C. U. 1930)

প্রদত্ত সর্ত হইতে, $\dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin(C-D)}{\sin(C+D)}$

$\therefore$ যোগ ও ভাগ ক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{\cos(A+B)-\cos(A-B)}$

$$=\frac{\sin(C-D)+\sin(C+D)}{\sin(C-D)-\sin(C+D)}$$

বা, $\dfrac{2\cos A\cos B}{-2\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin C\cos D}{-2\cos C\sin D}$

বা, $\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdot\dfrac{\cos B}{\sin B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}\cdot\dfrac{\cos D}{\sin D}$

বা, $\cot A\cot B=\tan C\cot D=\dfrac{1}{\cot C}.\cot D$

$\therefore\quad \cot A\cot B\cot C=\cot D.$

উদা. 14. If $\cos(\alpha-\beta)=-1$, show that

$\sin\alpha+\sin\beta=0$ and $\cos\alpha+\cos\beta=0$.

$\because\quad (\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$

$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=1+1+2\cos(\alpha-\beta)=2+2(-1)$ [সর্ত হইতে] $=0$,

$\therefore$ বর্গরাশি $(\sin\alpha+\sin\beta)^2$ এবং $(\cos\alpha+\cos\beta)^2$ এর প্রত্যেকে $=0$

$\therefore\quad \sin\alpha+\sin\beta=0$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=0$.

উদা. 15. If $\theta = \alpha + \beta$ and $\tan \alpha : \tan \beta = a : b$, show that

$$\sin \theta = \frac{a+b}{a-b} \sin (\alpha - \beta).$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$ [লব ও হরকে $\cos \alpha \cos \beta$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$= \frac{a+b}{a-b} \left[\because \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{a}{b} \right]$$

$$\sin \theta = \frac{a+b}{a-b} \sin (\alpha - \beta).$$

Exercise 2

1. Find the values of $\cos(-15^\circ)$, $\sin 75^\circ$ and $\cot 75^\circ$.
2. Find the value of $\sin 105^\circ + \sin 165^\circ$.
3. Find the value of $\sin (A+B)$, if $\sin A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{5}{13}$.
4. Show that $\cos (A-B) = \frac{56}{65}$, if $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$.
5. Find the value of $\operatorname{cosec} (A-B)$, if $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{8}{17}$.
6. Show that $\tan (A-B) = -\frac{16}{63}$, if $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{4}{5}$.

Prove that

7. $\sin 58^\circ 20' \cos 13^\circ 20' - \cos 58^\circ 20' \sin 13^\circ 20' = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
8. $\sin (30^\circ - A) \cos (60^\circ - B) + \cos(30^\circ - A) \sin(60^\circ - B) = \cos(A+B)$.
9. $\cos 75^\circ 25' \cos 15^\circ 25' + \cos 14^\circ 35' \cos 74^\circ 35' = \frac{1}{2}$.

[*Hints* : $\cos 14^\circ 35' \cos 74^\circ 35' = \cos (90^\circ - 75^\circ 25') \cos (90^\circ - 15^\circ 25')$
$= \sin 75^\circ 25' \sin 15^\circ 25'$].

10. (*i*) $\sin 3\theta \cos \theta + \cos 3\theta \sin \theta = \sin 5\theta \cos \theta - \cos 5\theta \sin \theta$.

(*ii*) $\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta = \sin 3\theta \cos 2\theta - \cos 3\theta \sin 2\theta$.

11. (i) $\tan 10^\circ + \tan 35^\circ + \tan 10^\circ \tan 35^\circ = 1$.

(ii) $\tan 70^\circ - \tan 25^\circ - \tan 70^\circ \tan 25^\circ = 1$.

(iii) $\cot 20^\circ \cot 25^\circ - \cot 20^\circ - \cot 25^\circ = 1$.

12. (i) $\dfrac{\cos 7^\circ + \sin 7^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 7^\circ} = \tan 52^\circ$.

(ii) $\dfrac{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ} = \cot 53^\circ$.

13. (i) $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A$.

(ii) $\cot 2\theta + \tan \theta = \operatorname{cosec} 2\theta$.

(iii) $\tan 2\theta \cot \theta - 1 = \sec 2\theta$.

14. $\dfrac{\sin (A+B)}{\sin A \sin B} = \cot A + \cot B$.

15. $\tan (45^\circ + \theta) = \dfrac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$.

16. $\tan \alpha = \dfrac{\tan (\alpha+\beta) - \tan \beta}{1 + \tan (\alpha+\beta) \tan \beta}$.

17. $\sin (45^\circ + A) \sin (45^\circ - A) = \frac{1}{2}(\cos^2 A - \sin^2 A)$.

18. $\tan (45^\circ + \theta) \tan (45^\circ - \theta) = 1$.

19. $\cos A + \cos (120^\circ + A) + \cos (120^\circ - A) = 0$. (C. U. 1953)

20. $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$. (C. U. 1936)

21. $\tan (A+B) \tan (A-B) = \dfrac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B - \sin^2 A}$.

22. $\sec (x-y) = \dfrac{\sec x \sec y}{1 + \tan x \tan y}$.

23. $\sin \alpha \sin (\beta - \gamma) + \sin \beta \sin (\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin (\alpha - \beta) = 0$.

24. $\sin (\alpha+\beta) \sin (\alpha-\beta) + \sin (\beta+\gamma) \sin (\beta-\gamma)$
$+ \sin (\gamma+\alpha) \sin (\gamma-\alpha) = 0$. [অনুসিদ্ধান্ত 1 দেখ।]

25. $\dfrac{\sin (\alpha-\beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \dfrac{\sin (\beta-\gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \dfrac{\sin (\gamma-\alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} = 0$.

26. Express $\sin 2A$ and $\cos 2A$ in terms of $\tan A$. (C. U. '31)

27. Find the expansion of $\sin(A-B+C)$.

28. Express $\cot(A+B+C)$ in terms of $\cot A$, $\cot B$ and $\cot C$.

29. (*i*) If $a\sin(\alpha+\beta)=b\sin(\alpha-\beta)$, show that

$$(a-b)\tan\alpha+(a+b)\tan\beta=0.$$

(*ii*) If $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0$, show that

$$1+\cot\alpha\tan\beta=0.$$ (C. U. 1939)

[*Hints* : সর্ত হইতে, $\cos(\alpha+\beta)=1$,

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\{1-\cos^2(\alpha+\beta)\}^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\therefore \text{বাম পক্ষ}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=0.]$$

30. If $\tan\theta=\dfrac{a\sin\alpha-b\sin\beta}{a\cos\alpha-b\cos\beta}$, show that

$$a\sin(\theta-\alpha)=b\sin(\theta-\beta).$$

31. If $A+B+C=\pi$, show that

$$\sin^2C=\cos^2A+\cos^2B+2\cos A\cos B\cos C.$$ (C. U. 1930)

32. If $A+B+C=\pi$ and $\cos A=\cos B\cos C$, show that

(*i*) $\tan B+\tan C=\tan A$.

(*ii*) $\tan B\tan C=2$. (C. U. 1942)

[*Hints* : (*ii*) $\cos A=\cos\{180^\circ-(B+C)\}=-\cos(B+C)$

$$=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$$

এবং সর্ত হইতে, $\cos A=\cos B\cos C$

$\therefore\ -\cos B\cos C+\sin B\sin C=\cos B\cos C$

$\therefore\ \sin B\sin C=2\cos B\cos C$, ইত্যাদি।]

33. If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$, show that

$$\cot A\cot B\cot C=\cot D.$$ (C. U. 1930)

34. If θ is divided into 2 parts α, β such that $\cot\alpha:\cot\beta=a:b$, show that $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{a-b}{a+b}\sin\theta$.

35. If $\cos(\alpha-\beta)=-1$, show that

$$\sin\alpha+\sin\beta=0 \text{ and } \cos\alpha+\cos\beta=0.$$

36. If $\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)=-\frac{3}{2}$, show that $\sin x+\sin y+\sin z=0$ and $\cos x+\cos y+\cos z=0$.

Transformation of Products and Sums

19. Transformation of products into sums or differences.

(গুণফলকে সমষ্টি বা অন্তরে রূপান্তর ।)

$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$ ... (i)

এবং $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$ ... (ii)

∴ (i) ও (ii) যোগ করিয়া,

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ ... ... (1)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ ... ... (2)

আবার, $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$ ... (iii)

এবং $\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)$ ... (iv)

∴ (iii) ও (iv) যোগ করিয়া,

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ ... ... (3)

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া,

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

বা $=-\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$ ... (4)

সূত্রগুলিকে একসঙ্গে দেওয়া গেল :

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ ... (1)

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ ... (2)

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ ... (3)

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

$=-\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$ ... (4)

লক্ষ্য কর, সূত্র (4)এ প্রথমে অন্তর এবং পরে সমষ্টি ।

দ্রষ্টব্য । মনে রাখিবার সঙ্কেত :

2 sin A cos B = sin (sum) + sin (diff.)

2 cos A sin B = sin (sum) − sin (diff.).

2 cos A cos B = cos (sum) + cos (diff.).

2 sin A sin B = cos (diff.) − cos (sum).

বা = −{cos (sum) − cos (diff.)}.

20. Transformation of sums or differences into products.
(সমষ্টি বা অন্তরকে গুণফলে রূপান্তর ।)

মনে কর, $A+B=C$ এবং $A-B=D$ $\therefore$ $A=\frac{C+D}{2}$ এবং $B=\frac{C-D}{2}$.

$\therefore$ সূত্র $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B\cdots(1)$ হইতে,

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2},$$

সূত্র $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\cdots(2)$ হইতে,

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2},$$

সূত্র $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B\cdots(3)$ হইতে,

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2},$$

সূত্র $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B\cdots(4)$
অর্থাৎ $\cos(A+B)-\cos(A-B)=2\sin A\sin(-B)$ হইতে,

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$$

সূত্রগুলিকে একসঙ্গে দেওয়া গেল :

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\quad\cdots\quad\cdots\quad(2)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\quad\cdots\quad\cdots\quad(3)$$

$$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

বা $=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\quad\cdots\quad\cdots\quad(4)$

দ্রষ্টব্য । [illegible]নে রাখিবার সঙ্কেত :

sin + sin = 2 sin (½ sum).cos (½ diff.).
sin − sin = 2 cos (½ sum).sin (½ diff.).
cos + cos = 2 cos (½ sum).cos (½ diff.).
cos − cos = − 2 sin (½ sum).sin (½ diff.)
বা = sin (½ sum).sin (½ diff. reversed).

উদা. 1. $2 \sin 3A \cos 2A = \sin(3A+2A) + \sin(3A-2A)$
$= \sin 5A + \sin A.$

উদা. 2. $\cos 3\theta \sin 5\theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 3\theta \sin 5\theta$
$= \frac{1}{2}\{\sin(3\theta+5\theta) - \sin(3\theta-5\theta)\}$
$= \frac{1}{2}\{\sin 8\theta - \sin(-2\theta)\} = \frac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 2\theta).$

মন্তব্য। $\cos 3\theta \cdot \sin 5\theta$ কে $\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 5\theta \cos 3\theta$ এর আকারে লিখিয়া উদা. 1এর ন্যায় কষা চলে।

উদা. 3. $2 \cos 15^\circ \cos 75^\circ = \cos(15^\circ + 75^\circ) + \cos(15^\circ - 75^\circ)$
$= \cos 90^\circ + \cos(-60^\circ)$
$= \cos 90^\circ + \cos 60^\circ$
$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

উদা. 4. $\sin 15^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 15^\circ \sin 45^\circ$
$= \frac{1}{2}\{\cos(15^\circ - 45^\circ) - \cos(15^\circ + 45^\circ)\}$
$= \frac{1}{2}\{\cos(-30^\circ) - \cos 60^\circ\}$
$= \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1).$

উদা. 5. $\sin 6\theta + \sin 4\theta = 2 \sin \frac{1}{2}(6\theta + 4\theta) \cos \frac{1}{2}(6\theta - 4\theta)$
$= 2 \sin 5\theta \cos \theta.$

উদা. 6. $\sin \theta - \sin 7\theta = 2 \cos \frac{1}{2}(\theta + 7\theta) \sin \frac{1}{2}(\theta - 7\theta)$
$= 2 \cos 4\theta \sin(-3\theta) = -2 \cos 4\theta \sin 3\theta.$

উদা. 7. $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 2 \cos \frac{2\theta + 3\theta}{2} \cos \frac{2\theta - 3\theta}{2}$

$= 2 \cos \frac{5\theta}{2} \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$

উদা. 8. $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ = 2 \sin \frac{1}{2}(105^\circ + 15^\circ) \sin \frac{1}{2}(15^\circ - 105^\circ)$
$= 2 \sin 60^\circ \sin(-45)^\circ$
$= -2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ$
$= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

উদা. 9. Show that $\sin 5\theta \cos 3\theta + \cos 4\theta \sin 2\theta = \sin 7\theta \cos \theta$.

বাম পক্ষ $= \frac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 2\theta + \sin 6\theta - \sin 2\theta)$

$= \frac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 6\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 7\theta \cos \theta$

$= \sin 7\theta \cos \theta$.

উদা. 10. Prove that $\sin^2 5\theta - \sin^2 3\theta = \sin 8\theta \sin 2\theta$.

বাম পক্ষ $= (\sin 5\theta + \sin 3\theta)(\sin 5\theta - \sin 3\theta)$

$= 2 \sin 4\theta \cos \theta . 2 \cos 4\theta \sin \theta$

$= 2 \sin 4\theta \cos 4\theta . 2 \cos \theta \sin \theta$

$= (\sin 8\theta + \sin 0)(\sin 2\theta - \sin 0) = \sin 8\theta \sin 2\theta$.

উদা. 11. Prove that

$$(\sin 5\alpha + \sin \alpha) \sin 2\alpha + (\cos 5\alpha - \cos \alpha) \cos 2\alpha = 0.$$

প্রদত্ত রাশি $= 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha + 2 \sin 3\alpha \sin(-2\alpha) \cos 2\alpha$

$= 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha - 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha = 0$.

উদা. 12. Prove that $\dfrac{\sin 6\theta \cos \theta - \cos 4\theta \sin 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 4\theta \sin \theta} = \tan 3\theta$.

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\frac{1}{2}(\sin 7\theta + \sin 5\theta) - \frac{1}{2}(\sin 7\theta - \sin \theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos \theta) - \frac{1}{2}(\cos 3\theta - \cos 5\theta)}$

$= \dfrac{\sin 5\theta + \sin \theta}{\cos \theta + \cos 5\theta} = \dfrac{2 \sin 3\theta \cos 2\theta}{2 \cos 3\theta \cos 2\theta} = \tan 3\theta$.

উদা. 13. Prove that $\cos 70° + \cos 50° - \cos 10° = 0$.

প্রদত্ত রাশি $= 2 \cos \frac{1}{2}(70° + 50°) \cos \frac{1}{2}(70° - 50°) - \cos 10°$

$= 2 \cos 60° \cos 10° - \cos 10° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10° - \cos 10° = 0$.

উদা. 14. Prove that $\sin 65° - \cos 35° = \sin 5°$.

$\sin 65° - \cos 35° = \sin 65° - \cos(90° - 55°) = \sin 65° - \sin 55°$

$= 2 \cos 60° \sin 5° = 2.\frac{1}{2} \sin 5° = \sin 5°$.

উদা. 15. Show that $\dfrac{\cos 15° - \sin 15°}{\cos 15° + \sin 15°} = \sqrt{3}$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos(90° - 75°) - \sin 15°}{\cos(90° - 75°) + \sin 15°} = \dfrac{\sin 75° - \sin 15°}{\sin 75° + \sin 15°}$

$= \dfrac{2 \cos 45° \sin 30°}{2 \sin 45° \cos 30°} = \dfrac{\sin 30°}{\cos 30°} = \tan 60° = \sqrt{3}$.

উদা. 16 Show that $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$.

বাম পক্ষ $= \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4} \cos 20^\circ (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ) = \frac{1}{4} \cos 20^\circ (-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ)$

$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{4} \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8} \cdot 2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

$= -\frac{1}{8} \cos 20^\circ + \frac{1}{8}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$

$= \frac{1}{8} \cos 60^\circ = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

উদা. 17. Prove that $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \dfrac{A+B}{2}$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)} = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} = \tan \dfrac{A+B}{2}$.

উদা. 18. Prove that $\dfrac{\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}{\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta} = \cot 3\theta$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{(\cos 5\theta + \cos \theta) + (\cos 4\theta + \cos 2\theta)}{(\sin 5\theta + \sin \theta) + (\sin 4\theta + \sin 2\theta)}$

$= \dfrac{2 \cos 3\theta \cos 2\theta + 2 \cos 3\theta \cos \theta}{2 \sin 3\theta \cos 2\theta + 2 \sin 3\theta \cos \theta}$

$= \dfrac{2 \cos 3\theta (\cos 2\theta + \cos \theta)}{2 \sin 3\theta (\cos 2\theta + \cos \theta)} = \dfrac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} = \cot 3\theta$.

উদা. 19. Express $4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$ as the sum of 4 sines.

প্রদত্ত রাশি $= 2 \sin \alpha . 2 \cos \beta \cos \gamma$

$= 2 \sin \alpha \{\cos (\beta+\gamma) + \cos (\beta-\gamma)\}$

$= 2 \sin \alpha \cos (\beta+\gamma) + 2 \sin \alpha \cos (\beta-\gamma)$

$= \sin (\alpha+\beta+\gamma) + \sin (\alpha-\beta-\gamma) + \sin (\alpha+\beta-\gamma)$
$+ \sin (\alpha-\beta+\gamma)$.

উদা. 20. Express $\cos A + \cos B + \cos C + \cos (A+B+C)$ as the product of 3 cosines. (A. U. 1945)

প্রদত্ত রাশি $= (\cos A + \cos B) + \{\cos C + \cos (A+B+C)\}$

$= 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2} + 2 \cos \dfrac{A+B+2C}{2} \cos \left(\dfrac{-A-B}{2}\right)$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

উদা. 21. If $\sin 2\alpha=4\sin 2\beta$, show that

$$5\tan(\alpha-\beta)=3\tan(\alpha+\beta).$$

$\because\ \sin 2\alpha=4\sin 2\beta,\ \therefore\ \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}=\dfrac{4}{1}$

$\therefore\ \dfrac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}=\dfrac{4-1}{4+1}=\dfrac{3}{5}$

বা, $\dfrac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{3}{5}$ বা, $\cot(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$

$$\therefore\ 5\tan(\alpha-\beta)=3\tan(\alpha+\beta).$$

উদা. 22. If $\sin x-\sin y=\frac{1}{2}$ and $\cos x+\cos y=\frac{2}{3}$, show that

$$\tan\tfrac{1}{2}(x-y)=3.$$

$\because\ \sin x-\sin y=\frac{1}{2},\ \therefore\ 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{2}\ \cdots\ (1)$

$\because\ \cos x+\cos y=\frac{2}{3},\ \therefore\ 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=\frac{2}{3}\ \cdots\ (2)$

$\therefore$ (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\tan\frac{1}{2}(x-y)=3.$

উদা. 23. If $\operatorname{cosec} A-\sec A=\operatorname{cosec} B-\sec B$, show that

$$\tan A\tan B+\cot\tfrac{1}{2}(A+B)=0.$$

সর্ত হইতে, $\operatorname{cosec} A-\operatorname{cosec} B=\sec A-\sec B$

বা, $\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{1}{\cos A}-\dfrac{1}{\cos B}$

বা, $\dfrac{\sin B-\sin A}{\sin A\sin B}=\dfrac{\cos B-\cos A}{\cos A\cos B}$

$$\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin B-\sin A}{\cos B-\cos A}=-\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}$$

$$=-\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(B+A)\sin\frac{1}{2}(A-B)}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\therefore\ \tan A\tan B+\cot\tfrac{1}{2}(A+B)=0.$$

উদা. 24. Prove that

$$\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n=2\cot^n\frac{A-B}{2}.$$

or zero, according as n is even or odd. (P. U. 1933)

$$\text{বাম পক্ষ}=\left\{\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}\right\}^n+\left\{\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)}\right\}^n$$

$$=\{\cot\tfrac{1}{2}(A-B)\}^n+\{-\cot\tfrac{1}{2}(A-B)\}^n$$

এখন, n যুগ্ম হইলে,

$$\text{বাম পক্ষ}=\cot^n\tfrac{1}{2}(A-B)+\cot^n\tfrac{1}{2}(A-B)=2\cot^n\tfrac{1}{2}(A-B)$$

এবং n বিযুগ্ম হইলে বাম পক্ষ $=\cot^n\frac{1}{2}(A-B)-\cot^n\frac{1}{2}(A-B)=0.$

Exercise 3

Express as a sum or difference :

1. $2\sin 3\theta\cos 2\theta$.
2. $2\cos 2\theta\sin 4\theta$.
3. $\cos 4\theta\cos 6\theta$.
4. $\frac{1}{2}\sin(A+B)\sin(A-B)$.

Express in the form of a product :

5. $\sin 20°+\sin 30°$.
6. $\sin 5\theta-\sin 7\theta$.
7. $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha$.
8. $\cos(A+B)-\cos(A-B)$

Find the value of

9. $4\sin 15°\sin 75°$.
10. $\cos 105°+\cos 15°$.

Prove that

11. $\sin 4\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta=\sin 3\theta\cos 2\theta$.
12. $\cos 3\theta\cos\theta-\cos 4\theta\cos 2\theta=\sin 5\theta\sin\theta$.
13. $\sin^2 3\theta-\sin^2\theta=\sin 4\theta\sin 2\theta$.
14. $(\sin 3\alpha+\sin\alpha)\sin\alpha+(\cos 3\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha=0$.
15. $(\sin 5\alpha+\sin 3\alpha)\sin\alpha+(\cos 5\alpha-\cos 3\alpha)\cos\alpha=0$.
16. $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$.

17. $\dfrac{\sin 4\theta \cos \theta - \cos 3\theta \sin 2\theta}{\cos 4\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin 2\theta} = \tan 2\theta.$

18. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0.$

19. $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0.$

20. $\sin 40^\circ - \sin 80^\circ + \sin 20^\circ = 0.$

21. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$

22. $\sin 80^\circ - \cos 50^\circ - \sin 20^\circ = 0.$

23. $\dfrac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}.$ 24. $\dfrac{\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ} = \cot 25^\circ.$

25. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$

26. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}.$ (P. U. 1942)

27. $\dfrac{\sin 3\theta - \sin \theta}{\cos 3\theta + \cos \theta} = \tan \theta.$ 28. $\dfrac{\cos 5\theta + \cos 3\theta}{\sin 5\theta - \sin 3\theta} = \cot \theta.$

29. $\dfrac{\cos A + \cos 3A}{\sin A + \sin 3A} = \cot 2A.$ 30. $\dfrac{\cos A - \cos 2A}{\sin A + \sin 2A} = \tan \dfrac{A}{2}.$

31. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}.$

32. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}.$

33. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \dfrac{A+B}{2}$ 34. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2}.$

35. $\dfrac{\sin (A+B) - 2 \sin A + \sin (A-B)}{\cos (A+B) - 2 \cos A + \cos (A-B)} = \tan A.$

36. $\dfrac{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \cot 4\alpha.$

37. $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin \alpha}{\cos 7\alpha + \cos 3\alpha - \cos 5\alpha - \cos \alpha} = \tan 2\alpha.$

38. Express $4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ as the sum of 4 cosines.

39. Express $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha + \cos 15\alpha$ as the product of

40. Show that $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

41. If $\sin 2\alpha=k\sin 2\beta$, show that

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{k-1}{k+1}\tan(\alpha+\beta).$$

42. If $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2}{3}$ and $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{4}$, show that

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\tfrac{4}{3}.$$

43. If $a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta=1$, show that

$$\frac{a}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{b}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

[*Hints* : বজ্রগুণনের প্রণালী অবলম্বন করিয়া কষ।]

44. If $\operatorname{cosec}A+\sec A=\operatorname{cosec}B+\sec B$, then

$$\tan A\tan B=\cot\tfrac{1}{2}(A+B).$$ (P. U. 1936)

45. Prove that

$$\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n=2\cot^n\frac{A-B}{2}\text{ or zero}$$

according as n is even or odd. (P. U. 1933)

Multiple Angles

(গুণিতক কোণ)

21. গুণিতক কোণ। 2A কোণটি A কোণের দ্বিগুণ; সুতরাং 2A কোণটি একটি গুণিতক কোণ (Multiple angle). অনুরূপে, 3A, 4A প্রভৃতি কোণগুলি গুণিতক কোণ।

22. 2A কোণের কোণানুপাত।

$\because$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, [অনু. 14]

$\therefore$ B-র স্থলে A বসাইয়া,

$$\sin 2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A=2\sin A\cos A \quad \cdots (1)$$

$\because$ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$. [অনু. 14]

∴ Bর স্থলে A বসাইয়া,

$$\cos 2A = \cos A \cos A - \sin A \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$$

বা, [(2) হইতে] $= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2 \cos^2 A - 1$

$$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 \quad \cdots (2)$$

∵ $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, ∴ Bর স্থলে A বসাইয়া,

$$\tan 2A = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \cdots (3)$$

∵ $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$, ∴ Bর স্থলে A বসাইয়া,

$$\cot 2A = \frac{\cot A \cot A - 1}{\cot A + \cot A} = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \quad \cdots (4)$$

অনুসিদ্ধান্ত। (3) হইতে, $1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A$ ··· (5)

এবং (4) হইতে, $1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A$ ··· (6)

∴ ভাগ করিয়া, $\dfrac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \dfrac{2 \sin^2 A}{2 \cos^2 A} = \tan^2 A$ ··· (7)

$$1 + \sin 2A = \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A$$
$$= (\sin A + \cos A)^2 \quad \cdots \cdots (8)$$

$$1 - \sin 2A = \sin^2 A + \cos^2 A - 2 \sin A \cos A$$
$$= (\sin A - \cos A)^2 = (\cos A - \sin A)^2 \quad \cdots (9)$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \quad \cdots (10)$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A \left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$= \frac{1}{\sec^2 A}(1 - \tan^2 A) = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \quad \cdots (11)$$

23. 3A কোণের কোণানুপাত।

$$\sin 3A = \sin(2A+A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$
$$= 2\sin A\cos A.\cos A + (1-2\sin^2 A).\sin A$$
$$= 2\sin A\cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$$
$$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$$
$$= 3\sin A - 4\sin^3 A.$$
$$\therefore\ \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \quad \cdots \quad \cdots \quad (12)$$

$$\cos 3A = \cos(2A+A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$$
$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A.\sin A$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\sin^2 A\cos A$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A$$
$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$
$$\therefore\ \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \quad \cdots \quad \cdots \quad (13)$$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর, sin 3Aর মান sin দ্বারা এবং cos 3Aর মান cos দ্বারা প্রকাশ করা হইয়াছে। সুতরাং sin 3Aর মান নির্ণয় করিতে cos 2Aর মান sin দ্বারা এবং cos 3Aর মান নির্ণয় করিতে cos 2Aর মান cos দ্বারা প্রকাশ করিয়া লওয়া হইয়াছে।

$$\tan 3A = \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A}$$
$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\cdot\tan A}$$
$$= \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{(1-\tan^2 A) - 2\tan A.\tan A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$
$$\therefore\ \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \quad \cdots \quad \cdots (14)$$

মন্তব্য। অনুরূপ প্রণালী অবলম্বন করিয়া A কোণের যে কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাতগুলিকে A কোণের কোণানুপাত দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. Find the value of sin 2A when

(i) $\sin A = \frac{4}{5}$, (ii) $\cos A = \frac{5}{13}$ and (iii) $\tan A = \frac{2}{3}$.

(i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\sin A.\sqrt{1-\sin^2 A} = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

(ii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\sqrt{1-\cos^2 A}\cdot\cos A = 2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$.

(iii) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{4}{3}\times\frac{9}{13} = \frac{12}{13}$.

উদা. 2. Find the value of cos 2A when

(i) $\sin A = \frac{1}{2}$, (ii) $\cos A = \frac{2}{3}$ and (iii) $\tan A = \frac{3}{4}$.

(i) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2(\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(ii) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2(\frac{2}{3})^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$.

(iii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{16}\times\frac{16}{25} = \frac{7}{25}$.

উদা. 3. Find the value of tan A when $\sin 2A = \frac{12}{13}$.

$$\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \sin 2A = \frac{12}{13}$$

বা, $6\tan^2 A - 13\tan A + 6 = 0$

বা, $(3\tan A - 2)(2\tan A - 3) = 0$

$\therefore\ \tan A = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

উদা. 4. Find the value of cos 3A when $\sin A = \frac{3}{5}$

$\cos A = (1-\sin^2 A)^{\frac{1}{2}} = (1-\frac{9}{25})^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$.

$\therefore\ \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A = 4(\frac{4}{5})^3 - 3.\frac{4}{5}$

$= \frac{256}{125} - \frac{12}{5} = \frac{256-300}{125} = -\frac{44}{125}$.

উদা. 5. Show that $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$$= \frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha.$$

উদা. 6. Show that $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\alpha)$.

বাম পক্ষ $= (\cos^2\alpha)^3 + (\sin^2\alpha)^3$

$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha)$

$= 1 \times \{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha\}$

$= 1 - 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= 1 - \frac{3}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

$= 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2\alpha = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\alpha)$.

উদা. 7. Show that $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \tan(\alpha+\beta)$.

বাম পক্ষের লব $= (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\ 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\ 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

বাম পক্ষের হর $= \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\beta\cos\beta)$

$= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$

$= \frac{1}{2}.\ 2\cos\frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta)\sin\frac{1}{2}(2\alpha - 2\beta)$

$= \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$.

উদা. 8. Show that $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{(1 + \cos 2\alpha) + \cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)} = \tan\alpha.$$

উদা 9. Show that $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta$. (C. U. 1938)

বাম পক্ষ $=\frac{(1-\cos 2\theta)+\sin 2\theta}{(1+\cos 2\theta)+\sin 2\theta}=\frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}=\tan\theta.$

উদা. 10. Show that $4(\cos^3 5°+\sin^3 25°)=3(\cos 5°+\sin 25°)$.

$\because$ $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$ এবং $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$,

$\therefore$ বাম পক্ষ $=4\cos^3 5°+4\sin^3 25°$

$=(\cos 3.5°+3\cos 5°)+(3\sin 25°-\sin 3.25°)$

$=\cos 15°+3\cos 5°+3\sin 25°-\sin 75°$

$=3\cos 5°+\sin 25°)$ $[\because \cos 15°=\sin 75°]$

উদা. 11. Show that $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°}-\frac{1}{\cos 20°}=4$.

বাম পক্ষ $=\frac{\sqrt{3}\cos 20°-\sin 20°}{\sin 20°\cos 20°}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°-\frac{1}{2}\sin 20°\right)}{\sin 20°\cos 20°}$

$=\frac{2(\cos 30°\cos 20°-\sin 30°\sin 20°)}{\sin 20°\cos 20°}=\frac{2\cos(30°+20°)}{\sin 20°\cos 20°}$

$=\frac{2\cos 50°}{\sin 20°\cos 20°}=\frac{2\sin 40°}{\sin 20°\cos 20°}=\frac{2.\,2\sin 20°\cos 20°}{\sin 20°\cos 20°}=4.$

উদা. 12. Show that

$$\frac{1}{\tan 3A-\tan A}-\frac{1}{\cot 3A-\cot A}=\cot 2A.$$

বাম পক্ষের দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{1/\tan 3A-1/\tan A}=\frac{\tan 3A\tan A}{\tan A-\tan 3A}$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\frac{1}{\tan 3A-\tan A}+\frac{\tan 3A\tan A}{\tan 3A-\tan A}=\frac{1+\tan 3A\tan A}{\tan 3A-\tan A}$

$=\frac{1}{\tan(3A-A)}=\frac{1}{\tan 2A}=\cot 2A.$

উদা. 13. Prove that

$\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha.$

$\because \quad \tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha},$

$\therefore \quad \tan 3\alpha (1 - \tan 2\alpha \tan \alpha) = \tan 2\alpha + \tan \alpha$

বা, $\tan 3\alpha - \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha = \tan 2\alpha + \tan \alpha$

$\therefore \quad \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha.$

উদা. 14. Show that $\cos 5\theta = 16 \cos^5\theta - 20 \cos^3\theta + 5 \cos \theta.$

$\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta) = \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta$

$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \times 2\sin\theta\cos\theta$

$= (8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta) - 2\sin^2\theta\cos\theta\,(3 - 4\sin^2\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta) \times \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 1)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2\cos\theta\,(-4\cos^4\theta + 5\cos^2\theta - 1)$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$

উদা. 15. Prove that $\dfrac{\cos 2\alpha\,(1-\cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha\,(1-\cos 2\alpha)} = \cot \alpha.$

বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos 2\alpha . 2\sin^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha . 2\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin^2\alpha}$

$= \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha.$

উদা. 16. Show that $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}.$ (B. H. U. 1947)

বাম পক্ষ $= \dfrac{1/\cos 8A - 1}{1/\cos 4A - 1}$

$= \dfrac{1-\cos 8A}{\cos 8A} \times \dfrac{\cos 4A}{1-\cos 4A} = \dfrac{2\sin^2 4A . \cos 4A}{\cos 8A . 2\sin^2 2A}$

$$=\frac{2\sin 4A\cos 4A.\sin 4A}{\cos 8A\;2\sin^2 2A}=\frac{\sin 8A.\,2\sin 2A\cos 2A}{\cos 8A.\,2\sin^2 2A}$$

$$=\tan 8A\times\frac{\cos 2A}{\sin 2A}=\tan 8A\cot 2A=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}.$$

উদা. 17. Prove that $\dfrac{\sin(\alpha+3\beta)+\sin(3\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}=2\cos(\alpha+\beta)$.

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(4\alpha+4\beta)\cos\frac{1}{2}(-2\alpha+2\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta)\cos\frac{1}{2}(2\alpha-2\beta)}$$

$$=\frac{2\sin 2(\alpha+\beta)\cos\{-(\alpha-\beta)\}}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{2.2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}=2\cos(\alpha+\beta).$$

উদা. 18. Prove that $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ-\theta)}=\sin 2\theta$.

$45^\circ-\theta=A$ ধর। তাহা হইলে,

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\frac{1-\sin^2 A/\cos^2 A}{1+\sin^2 A/\cos^2 A}=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$$

$$=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos 2A=\cos(90^\circ-2\theta)=\sin 2\theta.$$

উদা. 19. Show that $\cos^2 A+\cos^2(A+\frac{1}{3}\pi)+\cos^2(A-\frac{1}{3}\pi)=\frac{3}{2}$.

(C. U. 1943)

$$\text{বাম পক্ষ}=\tfrac{1}{2}\{2\cos^2 A+2\cos^2(A+60^\circ)+2\cos^2(A-60^\circ)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{1+\cos 2A+1+\cos(2A+120^\circ)+1+\cos(2A-120^\circ)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}[3+\cos 2A+\{\cos(2A+120^\circ)+\cos(2A-120^\circ)\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}(3+\cos 2A+2\cos 2A\cos 120^\circ)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{3+\cos 2A+2\cos 2A(-\tfrac{1}{2})\}=\tfrac{3}{2}.$$

উদা. 20. Show that $\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$

$$=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta).$$

$$\tan\theta\,(1+\sec 2\theta)=\tan\theta\left(1+\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$=\tan\theta\left(1+\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right) \qquad \text{[অনু. 22 (14)]}$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta.$$

$\therefore\quad \tan\theta\,(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)=\tan 2\theta\,(1+\sec 2^2\theta)$

$=\tan 2^2\theta$ [পূর্বের ন্যায় করিয়া]

অনুরূপে, $\tan\theta\,(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta$

$$\therefore\quad \frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta).$$

উদা. 21. Show that $\dfrac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}$.

$$=(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1).$$

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=4\cos^2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)+1.$

$=2\cos 2\theta+1$

$\therefore\ (2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)=(2\cos 2\theta+1)(2\cos 2\theta-1)$

$=2\cos 2^2\theta+1$ [পূর্বের ন্যায় করিয়া]

অনুরূপে, $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$

$=2\cos 2^n\theta+1$

$$\therefore\quad \frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\quad-1)(2\cos 2\theta-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1).$$

উদা. 22. If $2\tan\alpha=3\tan\beta$, prove that

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}. \qquad \text{(C. U. 1946)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{2}\tan\beta-\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan\beta\tan\beta} \qquad \text{[সর্ত হইতে]}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta}=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{4\cos^2\beta+6\sin^2\beta} \qquad \text{| লব ও হরকে } 4\cos^2 \text{ দ্বারা গুণ করিয়া}$$

$$=\frac{\sin 2\beta}{4(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+2\sin^2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{4.1+1-\cos 2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$

উদা. 23. If α and β are acute angles and $\cos 2\alpha = \dfrac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$, show that $\tan \alpha = \sqrt{2} \tan \beta$. (C.U. 1941)

সর্ত হইতে, 'যোগ ও ভাগ ক্রিয়া' দ্বারা

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{(3-\cos 2\beta)-(3\cos 2\beta - 1)}{(3-\cos 2\beta)-(3\cos 2\beta - 1)}$$

বা, $\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \dfrac{4(1-\cos 2\beta)}{2(1+\cos 2\beta)} = \dfrac{4.2\sin^2\beta}{2.2\cos^2\beta}$

বা, $\tan^2\alpha = 2\tan^2\beta$ $\therefore$ $\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$.

Exercise 4

1. Find the value of sin 2A when
   (i) $\sin A = \frac{3}{5}$, (ii) $\cos A = \frac{12}{13}$ and (iii) $\tan A = \frac{3}{5}$.

2. Find the value of cos 2A when
   (i) $\sin A = \frac{2}{3}$, (ii) $\cos A = \frac{3}{4}$ and (iii) $\tan A = \frac{4}{5}$.

3. Find the value of tan A when
   (i) $\sin 2A = \frac{4}{5}$ and (ii) $\cos 2A = \frac{12}{13}$.

4. Find the value of
   (i) sin 3A when $\sin A = \frac{1}{3}$.
   (ii) cos 3A when $\cos A = \frac{2}{3}$.

Prove that

5. $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$.

6. $\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \cot\theta$.

7. $\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan^2\theta$.

8. $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos 2\theta$.

9. $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$.

10. $\dfrac{\tan 2\theta}{\tan\theta} = 1 + \sec 2\theta$.

11. $\tan\alpha + \cot\alpha = 2\,\mathrm{cosec}\, 2\alpha$.

12. $\mathrm{cosec}\, 2\alpha + \cot 2\alpha = \cot\alpha$.

13. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$.

14. $\cos^4 A + \sin^4 A = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2A$.

15. $\cos^8\theta - \sin^8\theta = \cos 2\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \sin 4\theta$.

16. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=2\sec 2\alpha.$

17. $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}=\tan(\alpha+\beta).$

18. $\dfrac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A}=\tan A.$ 19. $\dfrac{1+\sin 2A+\cos 2A}{1+\sin 2A-\cos 2A}=\cot A.$

20. $4(\cos^3 12^\circ+\sin^3 18^\circ)=3(\cos 12^\circ+\sin 18^\circ).$

21. (i) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos 20^\circ}=4.$ (ii) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4.$

22. $\dfrac{\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot 3\alpha}-\dfrac{\tan\alpha}{\tan 3\alpha-\tan\alpha}=1.$

[*Hints* : বাম পক্ষের প্রথম পদ $=\dfrac{\tan 3\alpha}{\tan 3\alpha-\tan\alpha}$.]

23. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A.$

24. $\cos 4\alpha-\cos 4\beta$

$$=8(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\sin\beta)(\cos\alpha+\sin\beta).$$

[*Hints* : ডান পক্ষ হইতে আরম্ভ করিয়া কর।]

25. (i) $\sin 4\theta=4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.$

(ii) $\sin 8\theta=8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta.$

26. (i) $\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1.$

(ii) $\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta.$

27. $\cot 3\theta=\dfrac{\cot^3\theta-3\cot\theta}{3\cot^2\theta-1}.$

[*Hints* : $\cot 3\theta=\cot(\theta+2\theta)=\dfrac{\cot\theta\cot 2\theta-1}{\cot 2\theta+\cot\theta}$. এখন $\cot 2\theta$ এর মান বসাও।]

28. $\tan 4\theta=\dfrac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$

[*Hints* : $\tan 4\theta=\tan(\theta+3\theta)=\dfrac{\tan\theta+\tan 3\theta}{1-\tan\theta\tan 3\theta}$. এখন $\tan 3\theta$ এর মান বসাও।]

29. $\sin^3\theta \sin 3\theta + \cos^3\theta \cos 3\theta = \cos^3 2\theta$.

30. $\dfrac{\cos 2\theta(1-\cos 4\theta)}{\sin 4\theta(1-\cos 2\theta)} = \cot\theta$.

31. $\dfrac{\sec 8\theta - 1}{\sec 4\theta - 1} = \dfrac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta}$.

32. $\cos^2(45^\circ - \theta) - \sin^2(45^\circ - \theta) = \sin 2\theta$.

33. $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ-\theta)} = \sin 2\theta$.

34. $\cot A + \cot(60^\circ + A) + \cot(120^\circ + A) = 3\cot 3A$.

35. $\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta} = (1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)$.

36. $\dfrac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

$$= (2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta - 1).$$

37. If $\cos\theta = 1$, show that

(i) $\cos 2\theta = 1$, (ii) $\cos 3\theta = 1$ and (iii) $\cos 4\theta = 1$.

38. If $2\cos A = a + a^{-1}$, prove that $2\cos 2A = a^2 + a^{-2}$.

39. If $\tan\theta = x/y$, find the value of $x\sin 2\theta + y\cos 2\theta$

40. If $2\tan\alpha = 3\tan\beta$, prove that

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$ (C. U. 1946)

41. If α and β are acute angles and $\cos 2\alpha = \dfrac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$, show that

$$\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta.$$ (C. U. 1941)

42. If $(2^n+1)\alpha = \pi$, show that

$$2^n \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 2^2\alpha \cos 2^3\alpha \cdots \cos 2^{n-1}\alpha = 1.$$

[*Hints* : $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha$ $= \dfrac{1}{2^2}\sin 2^2\alpha, \cdots$ $\therefore$ $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 2^2\alpha\cdots\cos 2^{n-1}\alpha$ [illegible] $\sin 2^n\alpha = \dfrac{1}{2^n}\sin(\pi-\alpha) = \dfrac{1}{2^n}\sin\alpha$. $\therefore$ বামপক্ষ $= 1$.]

অংশ কোণ

24. কোন কোণের $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ প্রভৃতি অংশসমূহকে ঐ কোণের **অংশ কোণ** (Submultiple angles) বলে। $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{3}A$ প্রভৃতি কোণ A কোণের অংশ কোণ।

25 অনু. 22 ও 23এ আমরা প্রমাণ করিয়াছি :

(1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

(3) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (4) $\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

(5) $1-\cos 2A = 2\sin^2 A$ (6) $1+\cos 2A = 2\cos^2 A$

(7) $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A$ (8) $1+\sin 2A = (\sin A + \cos A)^2$

(9) $1-\sin 2A = (\sin A - \cos A)^2 = (\cos A - \sin A)^2$

(10) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (11) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(12) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ (13) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(14) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

এই সূত্রগুলি প্রমাণ করিয়া (1) হইতে (11)এ Aর স্থলে $\frac{1}{2}A$ এবং (12) হইতে (14)এ Aর স্থলে $\frac{1}{3}A$ লিখিয়া আমরা যথাক্রমে নিম্নের সূত্রগুলি পাই :

(1) $\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$

(2) $\cos A = \cos^2\frac{1}{2}A - \sin^2\frac{1}{2}A = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A = 2\cos^2\frac{1}{2}A - 1$

(3) $\tan A = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}$ **(4)** $\cot A = \dfrac{\cot^2\frac{1}{2}A - 1}{2\cot\frac{1}{2}A}$

(5) $1-\cos A = 2\sin^2\frac{1}{2}A$ **(6)** $1+\cos A = 2\cos^2\frac{1}{2}A$

(7) $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = \tan^2\frac{1}{2}A$ **(8)** $1+\sin A = (\sin\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}A)^2$

(9) $1-\sin A = (\sin\frac{1}{2}A - \cos\frac{1}{2}A)^2 = (\cos\frac{1}{2}A - \sin\frac{1}{2}A)^2$

(10) $\sin A = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}A}{1+\tan^2\frac{1}{2}A}$ **(11)** $\cos A = \dfrac{1-\tan^2\frac{1}{2}A}{1+\tan^2\frac{1}{2}A}$

(12) $\sin A = 3 \sin \frac{1}{3}A - 4 \sin^3 \frac{1}{3}A$

(13) $\cos A = 4 \cos^3 \frac{1}{3}A - 3 \cos \frac{1}{3}A$

(14) $\tan A = \dfrac{3 \tan \frac{1}{3}A - \tan^3 \frac{1}{3}A}{1 - 3 \tan^2 \frac{1}{3}A}$

26. $\frac{1}{2}A$ কোণের কোণানুপাতসমূহকে $\cos A$ দ্বারা প্রকাশ।

$\because \cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}A, \quad \therefore \sin^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$

$$\therefore \sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos A)}.$$

আবার, $\because \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2}A - 1, \therefore \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(1 + \cos A)$

$$\therefore \cos \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos A)}.$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$$

এখন অপর কোণানুপাতগুলি অতি সহজে নির্ণয় করা যায়।

টীকা। চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা (Ambiguity of signs)।

$\frac{1}{2}A$ কোণের পরিমাণ দেওয়া না থাকায় কোণটির সীমারেখা যে কোন পাদে অবস্থিত থাকিতে পারে এবং সীমারেখাটির অবস্থানভেদে $\sin \frac{1}{2}A$ ও $\cos \frac{1}{2}A$ এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে।

'All, sin, tan, cos' এর নিয়মানুসারে $\frac{1}{2}A$ কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে $\sin \frac{1}{2}A$র মান ধনাত্মক হইবে এবং প্রথম ও চতুর্থ পাদে থাকিলে $\cos \frac{1}{2}A$র মান ধনাত্মক হইবে, অন্যান্য স্থলে উহাদের মানগুলি ঋণাত্মক হইবে। কাজেই $\frac{1}{2}A$র পরিমাণ দেওয়া থাকিলে চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

উদা. 1. If $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, find the value of $\cos 22\frac{1}{2}°$.

$$\cos 22\tfrac{1}{2}° = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos 45°)} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}} = \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{2}}{4}} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

এখন, $\because \cos 22\frac{1}{2}°$ স্পষ্টতঃই ধনাত্মক, $\therefore \cos 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

উদা. 2. If $\cos 210^\circ$ is $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of $\sin 105^\circ$.

$$\sin 105^\circ = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 210^\circ)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

এখন, $\because$ 105° কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত,

$\therefore$ $\sin 105^\circ$ ধনাত্মক ;

$$\therefore \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

উদা. 3. If $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of $\cos 165^\circ$.

$$\cos 165^\circ = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 330^\circ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

এখন, $\because$ 165° কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত,

$\therefore$ $\cos 165^\circ$ ঋণাত্মক ; $\therefore$ $\cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

27. $\frac{1}{2}A$ কোণের কোণানুপাতসমূহকে $\sin A$ দ্বারা প্রকাশ।

$\because$ $\sin^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}A=1$

এবং $2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A=\sin A$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $(\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}A)^2=1+\sin A$

এবং বিয়োগ করিয়া, $(\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A)^2=1-\sin A$

$\therefore$ $\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}$

এবং $\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1-\sin A}$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$

এবং বিয়োগ করিয়া, $2\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}$.

এখন অপর কোণানুপাতগুলিকে অতি সহজে নির্ণয় করা যায়।

টীকা। চিহ্ন সম্বন্ধে অনিশ্চয়তা।

$$\sin \tfrac{1}{2}A+\cos \tfrac{1}{2}A=\sqrt{2}\left(\sin \tfrac{1}{2}A\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}+\cos \tfrac{1}{2}A\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\,(\sin \tfrac{1}{2}A \cos 45^\circ+\cos \tfrac{1}{2}A \sin 45^\circ)$$
$$=\sqrt{2}\sin (\tfrac{1}{2}A+45^\circ).$$

অনুরূপে, $\sin \frac{1}{2}A-\cos \frac{1}{2}A=\sqrt{2}\sin (\frac{1}{2}A-45^\circ)$.

আমরা জানি, কোন কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে, উহার sin ধনাত্মক হয়; সুতরাং $(\frac{1}{2}A+45^\circ)$ কোণের সীমারেখা ঐ পাদদ্বয়ে থাকিলে $\sin \frac{1}{2}A+\cos \frac{1}{2}A$ বা $\sqrt{1+\sin A}$ ধনাত্মক হইবে। অনুরূপে $(\frac{1}{2}A-45^\circ)$ কোণের সীমারেখা প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে থাকিলে $\sin \frac{1}{2}A-\cos \frac{1}{2}A$ বা $\sqrt{1-\sin A}$ ধনাত্মক হইবে। অন্যান্য স্থলে মানগুলি ঋণাত্মক হইবে। কাজেই $\frac{1}{2}A$র মান দেওয়া থাকিলে $\sqrt{1+\sin A}$ এবং $\sqrt{1-\sin A}$ এর চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না।

উদা. 4. If $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, find the values of $\sin 15^\circ$ and $\cos 15^\circ$

$$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=+\sqrt{1+\sin 30^\circ}=\sqrt{1+\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

[$\because$ $\sin 15^\circ$ এবং $\cos 15^\circ$ এর উভয়েই ধনাত্মক]

এবং $\sin 15^\circ-\cos 15^\circ=-\sqrt{1-\sin 30^\circ}=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

[$\because$ $\sin 15^\circ-\cos 15^\circ=\sqrt{2}\sin (15^\circ-45^\circ)=-\sqrt{2}\sin 30^\circ$, যাহা ঋণাত্মক]

$\therefore$ যোগ করিয়া, $\sin 15^\circ=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}})=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

এবং বিয়োগ করিয়া, $\cos 15^\circ=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}})=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

এখন অপর কোণানুপাতগুলিকে অতি সহজে নির্ণয় করা যায়।

উদা. 5. If $\sin 570^\circ=-\frac{1}{2}$, find the values of $\sin 285^\circ$ and $\cos 285^\circ$.

$$\sin 285^\circ+\cos 285^\circ=\pm\sqrt{1+\sin 570^\circ}=\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$\sin 285^\circ-\cos 285^\circ=\pm\sqrt{1-\sin 570^\circ}=\pm\sqrt{1+\tfrac{1}{2}}=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

এখন, $(\frac{1}{2}\cdot 570^\circ+45^\circ)$ কোণের বা 330° কোণের সীমারেখা চতুর্থ পাদে অবস্থিত ;

$\therefore$ $\sin 285^\circ+\cos 285^\circ$ ঋণাত্মক,

$\therefore$ $\sin 285^\circ+\cos 285^\circ=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ ... ... (1)

আবার, $(\frac{1}{2}\cdot 570^\circ-45^\circ)$ কোণের বা 240° কোণের সীমারেখা তৃতীয় পাদে অবস্থিত ;

$\therefore$ $\sin 285^\circ-\cos 285^\circ$ ঋণাত্মক,

$\therefore$ $\sin 285^\circ-\cos 285^\circ=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ ... ... (2)

$\therefore$ (1)+(2) লইয়া, $\sin 285^\circ=\frac{1}{2}(-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}})=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

এবং (1)−(2) লইয়া, $\cos 285^\circ=\frac{1}{2}(-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

28. **tan $\frac{1}{2}$A কে tan A দ্বারা প্রকাশ।**

$\because$ $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}$ [অনু 25 (3)],

$\therefore$ $\tan A-\tan A\tan^2\frac{1}{2}A=2\tan\frac{1}{2}A$

বা, $\tan A\tan^2\frac{1}{2}A+2\tan\frac{1}{2}A-\tan A=0$

ইহা tan $\frac{1}{2}$Aর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। $\therefore$ সমাধান করিয়া,

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\tan A(-\tan A)}}{2\tan A}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{1+\tan^2 A}}{2\tan A}=\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}.$$

টীকা। $\frac{1}{2}$A কোণের পরিমাণ জানা থাকিলে চিহ্ন সম্বন্ধে কোন অনিশ্চয়তা থাকে না ; কারণ $\frac{1}{2}$A কোণের সীমারেখা প্রথম ও তৃতীয় পাদে থাকিলে tan $\frac{1}{2}$A ধনাত্মক হইবে, নতুবা উহা ঋণাত্মক হইবে।

উদা. 6 If $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, find the value of $\tan 15^\circ$.

$$\tan 15^\circ=\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 30^\circ}-1}{\tan 30^\circ}=\frac{\pm\sqrt{1+\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\sqrt{3}=\pm 2-\sqrt{3}$$

এখন, ∵ $\tan 15^\circ$ স্পষ্টতঃই ধনাত্মক, ∴ $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$.

29. $\frac{1}{3}$A কোণের কোণানুপাতকে A কোণের কোণানুপাত দ্বারা প্রকাশ।

$$\sin A=3\sin\tfrac{1}{3}A-4\sin^3\tfrac{1}{3}A,$$
$$\cos A=4\cos^3\tfrac{1}{3}A-3\cos\tfrac{1}{3}A$$

এবং $\tan A=\dfrac{3\tan\frac{1}{3}A-\tan^3\frac{1}{3}A}{1-3\tan^2\frac{1}{3}A}$ [অনু. 25]

∴ এই ত্রিঘাত সমীকরণত্রয়কে সমাধান করিয়া $\sin\frac{1}{3}A$ কে $\sin A$ দ্বারা, $\cos\frac{1}{3}A$ কে $\cos A$ দ্বারা এবং $\tan\frac{1}{3}A$ কে $\tan A$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

30. 18°, 36°, 54°, 72° কোণের কোণানুপাত।

মনে কর, $A=18^\circ$. তাহা হইলে, $5A=90^\circ$ ∴ $2A=90^\circ-3A$.

∴ $\sin 2A=\sin(90^\circ-3A)=\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A$

বা, $2\sin A\cos A=\cos A\,(4\cos^2A-3)$

∴ $2\sin A=4\cos^2A-3$ [∵ $\cos A=\cos 18^\circ\neq 0$]

$=4(1-\sin^2A)-3=1-4\sin^2A$

বা, $4\sin^2A+2\sin A-1=0$

∴ $\sin A=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot4(-1)}}{2\cdot4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2\cdot4}$

$=\dfrac{-2\pm2\sqrt{5}}{2\cdot4}=\dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$.

এখন, প্রথম পাদে অবস্থিত যাবতীয় কোণের কোণানুপাত ধনাত্মক ;

∴ $\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

$\cos 18^\circ=+\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\frac{1}{16}(6-2\sqrt{5})}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\}^2$

$=1-\frac{1}{8}(6-2\sqrt{5})=1-\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2}$
$= \sqrt{1-\frac{1}{16}(6+2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$
$\sin 54° = \sin(90°-36°) = \cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$
$\cos 54° = \cos(90°-36°) = \sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$
$\sin 72° = \sin(90°-18°) = \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\cos 72° = \cos(90°-18°) = \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$

31. 3° কোণের এবং উহার গুণিতক কোণসমূহের কোণানুপাত।

$\sin 3° = \sin(18°-15°) = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°$
$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
$= \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1).$
$\cos 3° = \cos(18°-15°) = \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°$
$= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
$= \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$

3°, 15°, 18°, 30°, 36° এবং 45° কোণসমূহের কোণানুপাতগুলির সাহায্যে 3° এর যে কোন গুণিতক কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা যায় ; কারণ, $6° = 36° - 30°$, $9° = 45° - 36°$, $12° = 30° - 18°$, $21° = 36° - 15°$, $24° = 30° - 6°$, ইত্যাদি। 3° এর কোন গুণিতক কোণ 45° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে উহার পূরক কোণের কোণানুপাতসমূহ হইতে কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করিবে। যেমন,

$\sin 48° = \cos 42° = \cos(45° - 3°) =$ ইত্যাদি।

উদা. 7. Show that $\sin^2 24° - \sin^2 6° = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1).$

বাম পক্ষ $= \sin(24°+6°)\sin(24°-6°)$ [অনুসি. 1, অনু. 15]
$= \sin 30° \sin 18° = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1).$

উদা. 8. Show that $\cos^2 24° - \sin^2 6° = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

বাম পক্ষ $= \cos(24°+6°)\cos(24°-6°)$ [অনুসি. 2, অনু. 15]
$= \cos 30° \cos 18° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

উদা. 9. Prove that $(\cos^2 66^\circ - \sin^2 6^\circ)(\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ) = \frac{1}{16}$.

(C. U. 1949)

বাম পক্ষ $= \cos(66^\circ + 6^\circ)\cos(66^\circ - 6^\circ) . \cos(48^\circ + 12^\circ)\cos(48^\circ - 12^\circ)$

[অনুসি. 2, অনু. 15]

$$= \cos 72^\circ \cos 60^\circ \cos 60^\circ \cos 36^\circ$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \tfrac{5-1}{64} = \tfrac{1}{16}.$$

উদা. 10. If $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ and $\cos\beta = \frac{4}{5}$, find the value of $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, α and β being positive acute angles.

$\because$ সর্তানুসারে, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ,

$\therefore$ $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ধনাত্মক ; $\therefore$ $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = +\sqrt{\tfrac{1}{2}\{1+\cos(\alpha-\beta)\}}$

এখন, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} + \sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

[$\because$ α এবং β সূক্ষ্মকোণ]

$$= \tfrac{12}{25} + \sqrt{1-\tfrac{9}{25}}\cdot\sqrt{1-\tfrac{16}{25}} = \tfrac{12}{25} + \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{24}{25}$$

$\therefore$ $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{24}{25})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{49}{25}} = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}.$

উদা. 11. Show that

$$\frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{\cos(n+1)\theta + 2\cos n\theta + \cos(n-1)\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta.$$

বাম পক্ষ $= \dfrac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{\{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta\} + 2\cos n\theta}$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}\cdot 2n\theta \sin\frac{1}{2}\cdot 2\theta}{2\cos\frac{1}{2}\cdot 2n\theta\cos\frac{1}{2}\cdot 2\theta + 2\cos n\theta}$$

$$= \frac{2\cos n\theta\sin\theta}{2\cos n\theta\cos\theta + 2\cos n\theta} = \frac{2\cos n\theta\sin\theta}{2\cos n\theta(\cos\theta+1)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta.$$

উদা. 12. Show that $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}$.

$$\cos\theta = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta}{1} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta + \sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}$$

[লব ও হরকে $\cos^2\frac{1}{2}\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

উদা. 13. Prove that $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ}$

$$= \frac{2\sin 6^\circ \sin 66^\circ}{2\cos 6^\circ \cos 66^\circ} \times \frac{2\sin 42^\circ \sin 78^\circ}{2\cos 42^\circ \cos 78^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 72^\circ} \times \frac{\cos 36^\circ - \cos 120^\circ}{\cos 36^\circ + \cos 120^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} \times \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\}}{4\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\}} \times \frac{4\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}\}}{4\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}\}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{9-5}{5-1} = 1.$$

উদা 14. Prove that $\tan 7\frac{1}{2}^\circ = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$.

$$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ} = \frac{2\sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}{2\sin 7\frac{1}{2}^\circ \cos 7\frac{1}{2}^\circ} = \frac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\sqrt{6}-3-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1) = \sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1).$$

উদা. 15. Show that $2\cos 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$$\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 45^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \cos 11\tfrac{1}{4}^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}})}.$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\therefore\ 2\cos 11\tfrac{1}{4}^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

উদা. 16. If $\sin\alpha+\sin\beta=a$ and $\cos\alpha+\cos\beta=b$, show that

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

$\because\ \sin\alpha+\sin\beta=a,\ \therefore\ 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=a$

$\because\ \cos\alpha+\cos\beta=b,\ \therefore\ 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=b$

$\therefore$ ভাগ করিয়া, $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{a}{b}.$

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{1+\tan^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

[লব ও হরকে $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{1-a^2/b^2}{1+a^2/b^2}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$$

উদা. 17. If $\tan\alpha=\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$, show that one of the values of $\tan\frac{1}{2}\alpha$ is $\tan\frac{1}{2}\beta\tan\frac{1}{2}\gamma$.

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{\sec^2\alpha}=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=1\bigg/\left\{1+\left(\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}{(\cos\beta+\cos\gamma)^2+\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

$$=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}{(\cos\beta+\cos\gamma)^2+(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)}$$

$$=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}{1+2\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma}=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}{(1+\cos\beta\cos\gamma)^2}$$

$\therefore$ $\cos\alpha$ এর একটি মান $=+\dfrac{\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\beta\cos\gamma}$

$$\therefore \quad \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta-\cos\gamma}{1+\cos\beta\cos\gamma+\cos\beta+\cos\gamma}$$

$$=\frac{(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)}$$

$$\therefore \quad \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\beta\cdot 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{2\cos^2\frac{1}{2}\beta\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\frac{1}{2}\gamma}$$

$\therefore$ $\tan^2\frac{1}{2}\alpha=\tan^2\frac{1}{2}\beta\tan^2\frac{1}{2}\gamma$ $\quad\therefore$ $\tan\frac{1}{2}\alpha=\pm\tan\frac{1}{2}\beta\tan\frac{1}{2}\gamma$

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}\alpha$ এর একটি মান $=\tan\frac{1}{2}\beta\tan\frac{1}{2}\gamma$.

মন্তব্য। অনু. 28 এর সাহায্যেও উদাহরণটির সমাধান করা চলে।

উদা. 18. If $\tan\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\frac{1}{2}\beta$, show that

$$\cos\beta=\frac{\cos\alpha-e}{1+e\cos\alpha}.$$ (Pat. U. 1940; A. U. '44, '46)

শর্ত হইতে, $\tan^2\frac{1}{2}\beta=\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{1}{2}\alpha$

$$\therefore \quad \cos\beta=\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\beta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\beta}=\frac{1-\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{(1-e)\cos^2\frac{1}{2}\alpha-(1+e)\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{(1-e)\cos^2\frac{1}{2}\alpha+(1+e)\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{(\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha)-e(\cos^2\frac{1}{2}\alpha+\sin^2\frac{1}{2}\alpha)}{(\sin^2\frac{1}{2}\alpha+\cos^2\frac{1}{2}\alpha)-e(\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha)}=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}.$$

উদা. 19. Prove that $2\sin\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}$ and determine which are the correct signs when $270^\circ > A > 180^\circ$.

(B. H. U. I., 1931)

অনু. 27 এর ন্যায় করিয়া,

$$\sin\tfrac{1}{2}A + \cos\tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{1+\sin A}$$

এবং $\sin\frac{1}{2}A - \cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1-\sin A}$

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2\sin\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}$.

আবার, $\frac{1}{2}A$ কোণ 90° ও 135° এর ভিতর বলিয়া $(\frac{1}{2}A + 45^\circ)$ কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত এবং $(\frac{1}{2}A - 45^\circ)$ কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে অবস্থিত।

$\therefore$ $\sin\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{2}\sin(\frac{1}{2}A + 45^\circ)$ (টীকা, অনু. 27)
= একটি ধনাত্মক রাশি

এবং $\sin\frac{1}{2}A - \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{2}\sin(\frac{1}{2}A - 45^\circ)$ = একটি ধনাত্মক রাশি

$\therefore$ $\sin\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}A = +\sqrt{1+\sin A}$

এবং $\sin\frac{1}{2}A - \cos\frac{1}{2}A = +\sqrt{1-\sin A}$

$\therefore$ $2\sin\frac{1}{2}A = +\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$ $\therefore$ + চিহ্নদ্বয় শুদ্ধ।

Exercise 5

1. If $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, find the value of $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$.

2. If $\cos 210^\circ$ is $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of $\cos 105^\circ$.

3. If $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of $\sin 165^\circ$.

4. If $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, find the value of $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$.

5. If $\tan 45^\circ = 1$, find the value of $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$.

6. Find the values of

   (i) $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$

   [প্রদত্ত রাশি $= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ$]

   (ii) $2\sin 15^\circ \sin 75^\circ$.

   [প্রদত্ত রাশি $= 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$]

7. Show that $\sin 15° - \cos 15° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. (B. H. U. 1938)

[[*Hints* : অনু. 27 এর টীকা দেখ।]

8. Show that (*i*) $\sin^2 24° - \sin^2 6° = \frac{1}{8}(\sqrt{5} - 1)$.

(*ii*) $\cos^2 48° - \sin^2 12° = \frac{1}{8}(\sqrt{5} + 1)$.

9. Prove that $(\sin^2 24° - \sin^2 6°)(\sin^2 42° - \sin^2 12°) = \frac{1}{16}$.

10. Show that $(\cos^2 51° - \sin^2 21°)(\cos^2 33° - \sin^2 3°) = \frac{3}{16}$.

11. If $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ and α lies between 180° and 270°, find the values of $\sin \frac{1}{2}\alpha$ and $\cos \frac{1}{2}\alpha$. (Pat. U. 1942)

12. If $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ and $\cos \beta = \frac{12}{13}$, find the value of $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, α and β being positive acute angles.

Prove that

13. $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \frac{1}{2}\theta$.

14. $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \cot \frac{1}{2}\theta$.

15. $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

16. $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

17. $\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \tan^2 \frac{1}{2}\theta$.

18. $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \cot \frac{1}{2}\theta$.

19. $\sec \theta + \tan \theta = \tan (45° + \frac{1}{2}\theta)$. (C. U. 1939)

20. $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \tan^2(90° + \frac{1}{2}\theta)$.

21. $\frac{2 \sin \theta + \sin 2\theta}{2 \sin \theta - \sin 2\theta} = \cot^2 \frac{1}{2}\theta$.

22. $\sin A = \frac{2 \tan \frac{1}{2}A}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}A}$.

23. $\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}A}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}A}$.

24. $\frac{\cos A \sin 2A}{(1 + \cos A)(1 + \cos 2A)} = \tan \frac{1}{2}A$.

25. $\frac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A} = \tan \frac{1}{2}A$.

26. $\sin 3A + \sin 2A - \sin A = 4 \sin A \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{3}{2}A$.

27. $\frac{\sin (n - 1)A - \sin (n + 1)A}{\cos (n + 1)A - 2 \cos nA + \cos (n - 1)A} = \cot \frac{1}{2}A$.

28. (*i*) $\cot 6^\circ \cot 42^\circ \cot 66^\circ \cot 78^\circ = 1.$

(*ii*) $16 \cos \frac{2}{15}\pi \cos \frac{4}{15}\pi \cos \frac{8}{15}\pi \cos \frac{14}{15}\pi = 1.$ (B. H. U. 1947)

29. $\cos^4 \frac{1}{8}\pi + \cos^4 \frac{3}{8}\pi + \cos^4 \frac{5}{8}\pi + \cos^4 \frac{7}{8}\pi = \frac{3}{2}.$ (Pat. U. 1938)

30. $\tan \frac{1}{24}\pi = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$

31. $2 \cos \frac{1}{16}\pi = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$

32. $2 \sin \frac{1}{16}\pi = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$

33. If $\cos \alpha + \cos \beta = a$ and $\sin \alpha + \sin \beta = b$, show that

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

34. If $\cos \theta = \dfrac{\cos \alpha - \cos \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$, prove that one value of $\tan \frac{1}{2}\theta$ is $\tan \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta$. (Pat. U. 1942)

35. If $\tan \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2}\beta$, show that

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha - e}{1 - e \cos \alpha}.$$ (Pat. U. 1940 ; A. U. 1944, '46)

36. Prove that $2 \sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$ and determine which are the correct signs when $270^\circ > A > 180^\circ$.

(B. H. U. I., 1931)

Find the proper signs to be applied to the radicals in the following two formulae :

37. $2 \sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$, when $\frac{1}{2}A = 140^\circ$.

38. $2 \cos \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A}$, when $A = -230^\circ$.

39. If $A = 340$, show that

$$\tan \frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A} - 1}{\tan A}.$$

[*Hints* : অনু. 28 দেখ। $\tan \frac{1}{2}A = \tan 170^\circ$, যাহার মান ঋণাত্মক। হর $\tan A = \tan 340^\circ$, যাহার মান ঋণাত্মক। ∴ লব $\sqrt{1 + \tan^2 A} - 1$ ধনাত্মক হইবে ; ∴ $\sqrt{1 + \tan^2 A}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক।]

40. Show that

$$\sin x = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}.$$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী

(Trigonometrical Identities)

32 তিন বা ততোধিক কোণের ভিতর কোন সম্বন্ধ বিদ্যমান থাকিলে বিশেষতঃ তিনকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহাদের কোণানুপাতঘটিত অনেক প্রয়োজনীয় অভেদ পাওয়া যায়। শেষোক্ত অভেদগুলি প্রমাণ করিবার জন্য পূরক ও সম্পূরক কোণের কোণানুপাতসমূহের যথেষ্ট সাহায্য লইতে হয়।

(1) যদি $A+B+C=180^\circ$ হয়, তবে উহাদের যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয়টির সম্পূরক হয়।

$$\therefore\ B+C=180^\circ-A,\ C+A=180^\circ-B,\ A+B=180^\circ-C$$

$$\therefore\ \sin(B+C)=\sin A,\ \sin(C+A)=\sin B,\ \sin(A+B)=\sin C;$$

$$\cos(B+C)=-\cos A,\ \cos(C+A)=-\cos B,$$
$$\cos(A+B)=-\cos C;$$

$$\tan(B+C)=-\tan A,\ \tan(C+A)=-\tan B,$$
$$\tan(A+B)=-\tan C.$$

(2) যদি $A+B+C=180^\circ$ হয়, তবে $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ$ এবং ইহাদের যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয়টির পূরক।

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=90^\circ-\tfrac{1}{2}A,$$
$$\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}A=90^\circ-\tfrac{1}{2}B,\ \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B=90^\circ-\tfrac{1}{2}C$$

$$\therefore\ \sin(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=\cos\tfrac{1}{2}A,$$
$$\sin(\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}A)=\cos\tfrac{1}{2}B,\ \sin(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)=\cos\tfrac{1}{2}C;$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=\sin\tfrac{1}{2}A,$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}A)=\sin\tfrac{1}{2}B,\ \cos(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)=\sin\tfrac{1}{2}C;$$
$$\tan(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=\cot\tfrac{1}{2}A,$$
$$\tan(\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}A)=\cot\tfrac{1}{2}B,\ \tan(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)=\cot\tfrac{1}{2}C.$$

উদা. 1. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

(C. U. 1931, '33, '35, '37, '38, '53)

$\because\ 2A+2B+2C=360^\circ,\ \therefore\ \sin 2C=\sin\{360^\circ-2(A+B)\}$

$$=-\sin 2(A+B);$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(\sin 2A+\sin 2B)-\sin 2(A+B)$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$=2\sin(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin(A+B).2\sin A\sin B$

$=4\sin A\sin B\sin C.\quad [\because A+B=180^\circ-C]$

উদা. 2. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$

(C. U. 1910, '29, '50)

$\because A+B+C=180^\circ$, $\therefore \sin C=\sin\{180^\circ-(A+B)\}=\sin(A+B)$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(\sin A+\sin B)+\sin(A+B)$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$+2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B).2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$

$=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.\quad [\because \frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C]$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য উপরের উদাহরণ দুইটি একই প্রণালীতে সমাধান করা হইয়াছে।

উদা. 3. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$

$\because 2A+2B+2C=360^\circ,$

$\therefore \cos 2C=\cos\{360^\circ-2(A+B)\}=\cos 2(A+B)$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2(A+B)$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1$

$=2\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$

$=2\cos(A+B).2\cos A\cos B-1$

$=-4\cos A\cos B\cos C-1.\quad [\because A+B=180^\circ-C]$

উদা. 4. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C+1.$

$\because A+B+C=180^\circ,$

$\therefore \cos C=\cos\{180^\circ-(A+B)\}=-\cos(A+B)$

$\therefore$ বাম পক্ষ $= (\cos A + \cos B) - \cos(A+B)$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B) - 2\cos^2\tfrac{1}{2}(A+B) + 1$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B) - \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\} + 1$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B + 1$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C + 1. \quad [\because \tfrac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C]$$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য উপরের উদাহরণ দুইটি একই প্রণালীতে সমাধান করা হইয়াছে। লক্ষ্য কর, উপরের চারিটি উদাহরণের সমাধানপ্রণালী অনুরূপ।

উদা. 5. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C.$$

$\because 2A+2B+2C = 360^\circ, \quad \therefore 2A+2B = 360^\circ - 2C$

$\therefore \tan(2A+2B) = \tan(360^\circ - 2C) = \tan(-2C) = -\tan 2C$

বা, $\dfrac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B} = -\tan 2C$

বা, $\tan 2A + \tan 2B = -\tan 2C(1 - \tan 2A \tan 2B)$

$\therefore \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

উদা. 6. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$\because A+B+C = 180^\circ, \quad \therefore A+B = 180^\circ - C$

$\therefore \tan(A+B) = \tan(180^\circ - C) = -\tan C$

বা, $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

বা, $\tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য উপরের উদাহরণ দুইটি একই প্রণালীতে সমাধান করা হইয়াছে।

উদা. 7. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 4\sin\frac{\pi - A}{4}\sin\frac{\pi - B}{4}\sin\frac{\pi - C}{4} + 1$$

$$\text{or, } = 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4} + 1.$$

$\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\therefore \sin\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{A+B}{2}$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)+\cos\frac{A+B}{2}$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+1-2\sin^2\frac{A+B}{4}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\left(\cos\frac{A-B}{4}-\sin\frac{A+B}{4}\right)+1$$

$$=2\sin\frac{\pi-C}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\right\}+1$$

$$=2\sin\frac{\pi-C}{4}\left(2\sin\tfrac{1}{2}\cdot\frac{A-B+2\pi-A-B}{4}\times\sin\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2\pi-A-B-A+B}{4}\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi-C}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-A}{4}+1$$

$$=4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}+1$$

বা, $=4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}+1.$

উদা. 8. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

$\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\therefore \cos\frac{C}{2}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right\}=\sin\frac{A+B}{2}$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{A+B}{2}$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A+B}{4}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\left(\cos\frac{A-B}{4}+\sin\frac{A+B}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi-C}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-C}{4}\left(2\cos\tfrac{1}{2}\cdot\frac{A-B+2\pi-A-B}{4}\right.$$

$$\left.\times\cos\tfrac{1}{2}\cdot\frac{A-B-2\pi+A+B}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi-C}{4}\cdot 2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-A}{4}$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য উপরের উদাহরণ দুইটি একই প্রণালীতে সমাধান করা হইয়াছে।

উদা 9. If $A+B+C=180°$, prove that

$$\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B+\tan\tfrac{1}{2}B\tan\tfrac{1}{2}C+\tan\tfrac{1}{2}C\tan\tfrac{1}{2}A=1.$$

(C. U. 1936, '39)

$\because\ \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=90°,\quad\therefore\ \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B=90°-\tfrac{1}{2}C$

$\therefore\ \tan(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)=\tan(90°-\tfrac{1}{2}C)=\cot\tfrac{1}{2}C$

বা, $\dfrac{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B}{1-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B}=\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}C}$

বা, $\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}C+\tan\tfrac{1}{2}B\tan\tfrac{1}{2}C=1-\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B$

$\therefore\ \tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B+\tan\tfrac{1}{2}B\tan\tfrac{1}{2}C+\tan\tfrac{1}{2}C\tan\tfrac{1}{2}A=1.$

উদা. 10. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

$\because A+B+C=180^\circ$,

$\therefore \sin^2 C=\sin^2\{180^\circ-(A+B)\}=\sin^2(A+B)$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)+1-\cos^2(A+B)$

$=2-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)-\cos^2(A+B)$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2(A+B)$

$=2-\cos(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2-\cos(180^\circ-C).\,2\cos A\cos B$

$=2+\cos C.2\cos A\cos B=2+2\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 11. If $A+B+C=90^\circ$, prove that

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1.$$

(C. U. 1943, '58)

$\because A+B+C=90^\circ$, $\therefore \sin^2 C=\sin^2\{90^\circ-(A+B)\}=\cos^2(A+B)$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$
$+\cos^2(A+B)$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2(A+B)$

$=1-\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)$

$=1-\cos(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=1-\cos(90^\circ-C).2\sin A\sin B$

$=1-2\sin A\sin B\sin C$

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1.$

উদা. 12. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

(C. U. 1937, '47)

$\because A+B+C=180^\circ$, $\therefore \cos^2 C=\cos^2\{180^\circ-(A+B)\}=-\cos^2(A+B)$

$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)-\cos^2(A+B)$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)-\cos^2(A+B)$

$$= 1+\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2(A+B)$$
$$= 1+\cos(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$
$$= 1+\cos(180^\circ - C).2\cos A\cos B$$
$$= 1-2\cos A\cos B\cos C$$
$$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

উদা. 13. If $A+B+C=360^\circ$, prove that

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$$

$\because A+B+C=360^\circ$, $\therefore \cos^2 C=\cos^2\{360^\circ-(A+B)\}=\cos^2(A+B)$

$$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2A)+\tfrac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2(A+B)$$
$$=1+\tfrac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2(A+B)$$
$$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)$$
$$=1+\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$$
$$=1+\cos(360^\circ-C).2\cos A\cos B$$
$$=1+2\cos A\cos B\cos C$$
$$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=1.$$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য পূর্ববর্তী উদাহরণ চারিটি একই প্রণালীতে সমাধান করা হইয়াছে।

উদা. 14. If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(B-C)+\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}(C-A)+\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$=\sin A+\sin B+\sin C.$$

$\because \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=90^\circ$,

$\therefore \cos\tfrac{1}{2}A=\cos\{90^\circ-\tfrac{1}{2}(B+C)\}=\sin\tfrac{1}{2}(B+C)$

অনুরূপে, $\cos\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}(C+A)$ এবং $\cos\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)+\sin\tfrac{1}{2}(C+A)\cos\tfrac{1}{2}(C-A)$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$=\tfrac{1}{2}(\sin B+\sin C)+\tfrac{1}{2}(\sin C+\sin A)+\tfrac{1}{2}(\sin A+\sin B)$$
$$=\sin A+\sin B+\sin C.$$

উদা. 15. If $\alpha+\beta+\gamma=180°$, prove that

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

বাম পক্ষ $=\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$

$=\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$

$=\cos\{180-(\alpha+\beta)\}\sin(180°-\gamma)+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$

$=-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$

$=\sin\gamma\{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\}$

$=\sin\gamma(\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

উদা. 16. If $\alpha+\beta=\gamma$, prove that

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$ (C. U. 1940)

বাম পক্ষ $=\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta)+\cos^2\gamma$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha+1+\cos 2\beta)+\cos^2\gamma$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+\cos^2\gamma$

$=1+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma$

$=1+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\cos(\alpha+\beta)$

$=1+\cos\gamma\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}$

$=1+\cos\gamma.2\cos\alpha\cos\beta=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

উদা. 17. If $A+B+C=2S$, prove that $\cos^2 S+\cos^2(S-A)+\cos^2(S-B)+\cos^2(S-C)=2+2\cos A\cos B\cos C.$

(A. U. 1956)

বাম পক্ষ $=\frac{1}{2}\{1+\cos 2S+1+\cos 2(S-A)+1+\cos 2(S-B)+1+\cos 2(S-C)\}$

$=\frac{1}{2}[4+\{\cos 2S+\cos 2(S-A)\}+\{\cos 2(S-B)+\cos 2(S-C)\}]$

$=\frac{1}{2}\{4+2\cos\frac{1}{2}(2S+2S-2A)\cos\frac{1}{2}(2S-2S+2A)+2\cos\frac{1}{2}(4S-2B-2C)\cos(B-C)\}$

$=\frac{1}{2}\{4+2\cos\frac{1}{2}(4S-2A)\cos A+2\cos\frac{1}{2}(4S-2B-2C)\cos\frac{1}{2}(-2B+2C)\}$

$$=2+\cos(2S-A)\cos A+\cos(2S-B-C)\cos(B-C)$$
$$=2+\cos(B+C)\cos A+\cos A\cos(B-C)$$
$$=2+\cos A\{\cos(B+C)+\cos(B-C)\}$$
$$=2+\cos A\times 2\cos B\cos C=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

উদা. 18. If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the angles of a quadrilateral, prove that $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=-4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\times\cos\frac{1}{2}(\alpha+\delta)$.

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos\gamma+\cos\delta=\cos\gamma+\cos\{360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)\}$$
$$=\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)\}$
$$=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\{180^\circ-\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\}$$
$$=-4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta).$$

উদা. 19. If $\cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)=\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\delta)$, prove that $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=\tan\delta$.

সর্ত হইতে, $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma-\delta)}$

$$\therefore \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta}{\sin\gamma\cos\delta-\cos\gamma\sin\delta}$$

$\therefore$ 'যোগ ও ভাগ ক্রিয়া' দ্বারা, $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos\gamma\sin\delta}{\sin\gamma\cos\delta}$

বা, $\tan\alpha\tan\beta=\cot\gamma\tan\delta$

$\therefore$ $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=\tan\delta.$

উদা. 20. If $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$, show that
$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

বাম পক্ষ $=(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(4\cos^3\beta-3\cos\beta)$
$$+(4\cos^3\gamma-3\cos\gamma)$$

$$= 4(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma)-3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$= 4(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma) \quad [\text{ প্রদত্ত সর্ত হইতে }]$$
$$= 4.3 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$
$$[\because a+b+c=0 \text{ হইলে, } a^3+b^3+c^3=3abc]$$
$$= 12 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

উদা 21. Prove that $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)$
$$= \tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha).$$

$\because (\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0, \therefore (\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)=-(\gamma-\alpha)$

$\therefore \tan\{(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)\}=\tan\{-(\gamma-\alpha)\}=-\tan(\gamma-\alpha)$

বা, $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)}=-\tan(\gamma-\alpha)$

বা, $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)$
$$=-\tan(\gamma-\alpha)\{1-\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\}$$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)$
$$=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha).$$

উদা. 22. If $x+y+z=xyz$, prove that
$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$

প্রদত্ত সর্তে $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$ এবং $z=\tan\gamma$ বসাইয়া,

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

$$\therefore \tan\alpha(1-\tan\beta\tan\gamma)=-(\tan\beta+\tan\gamma)$$

$$\therefore \tan\alpha=-\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=-\tan(\beta+\gamma)=\tan\{180^\circ-(\beta+\gamma)\}$$

$$\therefore \alpha=180^\circ-(\beta+\gamma) \quad \therefore \alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

$\therefore \tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\tan 2\alpha\tan 2\beta\tan 2\gamma$ [উদা. 5]

বা, $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\dfrac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$

$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\cdot\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$$

বা, $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$

বা, $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

$\therefore\ x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$

উদা. 23 If $x+y+z=xyz$, prove that

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

প্রদত্ত সর্তে $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$ এবং $z=\tan\gamma$ বসাইয়া,

$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=180°$ [উদা. 22 এর ন্যায় করিয়া]

$\therefore\ 3\alpha+3\beta+3\gamma=540°\quad\therefore\ 3\alpha+3\beta=540°-3\gamma$

$\therefore\ \tan(3\alpha+3\beta)=\tan(540°-3\gamma)=\tan\{360°+(180°-3\gamma)\}$

$=\tan(180°-3\gamma)=-\tan 3\gamma$

বা, $\frac{\tan 3\alpha+\tan 3\beta}{1-\tan 3\alpha\tan 3\beta}=-\tan 3\gamma$

বা, $\tan 3\alpha+\tan 3\beta=-\tan 3\gamma(1-\tan 3\alpha\tan 3\beta)$

$\therefore\ \tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma=\tan 3\alpha\tan 3\beta\tan 3\gamma$

বা, $\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}+\frac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}+\frac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}$

$=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdot\frac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}\cdot\frac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}$

$\therefore\ \frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$

দ্রষ্টব্য। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য উপরের উদাহরণ তিনটি একই প্রণালীতে সমাধান করা হইয়াছে।

Exercise 6

If $A+B+C=180°$, prove that

1. $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C.$
2. $\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C=1-4\sin A\cos B\sin C.$
3. $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

4. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$

5. $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C - 1.$

6. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$

7. $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$ (C. U. 1955)

8. $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C.$ (Pat. U. 1940)

9. $\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \cos B \sin C.$

10. $\sin^2 \frac{1}{2}A - \sin^2 \frac{1}{2}B + \sin^2 \frac{1}{2}C = 1 - 2 \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$

11. $\sin^2 \frac{1}{2}A + \sin^2 \frac{1}{2}B + \sin^2 \frac{1}{2}C = 1 - 2 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$

12. $\cos^2 \frac{1}{2}A + \cos^2 \frac{1}{2}B + \cos^2 \frac{1}{2}C = 2 + 2 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$ (C. U.)

13. $\sin \frac{1}{2}A + \sin \frac{1}{2}B + \sin \frac{1}{2}C$
$= 1 + 4 \sin \frac{1}{4}(\pi - A) \sin \frac{1}{4}(\pi - B) \sin \frac{1}{4}(\pi - C).$ (Pat. U. 1939)

14. $\cos \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B - \cos \frac{1}{2}C$
$= 4 \cos \frac{1}{4}(\pi + A) \cos \frac{1}{4}(\pi + B) \cos \frac{1}{4}(\pi - C).$

15. $\tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B + \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C + \tan \frac{1}{2}C \tan \frac{1}{2}A = 1.$

16. $\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$

17. $\sin (A + B - C) + \sin (B + C - A) + \sin (C + A - B)$
$= 4 \sin A \sin B \sin C.$

18. $\sin (A + 2B) + \sin (B + 2C) + \sin (C + 2A)$
$= 4 \sin \frac{1}{2}(A - B) \sin \frac{1}{2}(B - C) \sin \frac{1}{2}(C - A).$

19. $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$ (C. U. 1949)

20. $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$

21. $\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\cos A - \cos B + \cos C + 1} = \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}C.$

22. If $A + B + C = 0$, prove that
$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$
$= \sin A \sin B \sin C.$

23. If $A + B + C = 90^\circ$, prove that
$\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B$
$= \cos A \cos B \cos C.$

24. If $A+B+C=90^\circ$, prove that
$\tan A \tan B+\tan B \tan C+\tan C \tan A=1.$ (Pat. U. 1939)

25. If α, β and γ be the angles of a triangle, show that
$\sin(\beta+2\gamma)+\sin(\gamma+2\alpha)+\sin(\alpha+2\beta)$
$=4 \sin \frac{1}{2}(\beta-\gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma-\alpha) \sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$ (Pat. U. 1942)

26. If $A+B+C=\pi$, and $\cos A=\cos B \cos C$, show that
$$\tan A=\tan B+\tan C.$$ (C. U. 1942)

✓27. If $A+B+C=180^\circ$, and $\sin(A+\frac{1}{2}C)=n \sin \frac{1}{2}C$, show that
$$\tan \tfrac{1}{2}A \tan \tfrac{1}{2}B=\frac{n-1}{n+1}.$$ (P. U. 1945)

28. If $A+B=C$, prove that
$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2 \cos A \cos B \cos C=1.$ (Pat. U. 1943)

29. If $A+B+C=2S$, prove that
$\sin(S-A)+\sin(S-B)+\sin(S-C)-\sin S=4 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$

30. If $\cos(A+B) \sin(C+D)=\cos(A-B) \sin(C-D)$, show that
$$\cot A \cot B \cot C=\cot D.$$ (C. U. 1930)

31. If A, B, C, D be the angles of a quadrilateral, show that
$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\tan A \tan B \tan C \tan D}=\cot A+\cot B+\cot C+\cot D.$$

32. Show that $\tan(2\alpha-\beta-\gamma)+\tan(2\beta-\gamma-\alpha)+\tan(2\gamma-\alpha-\beta)$
$$=\tan(2\alpha-\beta-\gamma) \tan(2\beta-\gamma-\alpha) \tan(2\gamma-\alpha-\beta).$$

33. If $\alpha+\beta+\gamma=0$, prove that
$\tan(\alpha+\beta-\gamma)+\tan(\beta+\gamma-\alpha)+\tan(\gamma+\alpha-\beta)$
$=\tan(\alpha+\beta-\gamma) \tan(\beta+\gamma-\alpha) \tan(\gamma+\alpha-\beta).$

34. If $x+y+z=xyz$, prove that
$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$ (U. P. B. '52)

(IV) যদি $b^2 < 4ac$ হয়, তবে $b^2 - 4ac$ ঋণাত্মক এবং $\sqrt{b^2 - 4ac}$ কল্পিত হইবে। সুতরাং বীজ দুইটি কল্পিত ও অসমান হইবে।

(V) যদি $b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ হয় এবং a, b, c মূলদ হয়, তবে বীজ দুইটি বাস্তব, মূলদ ও অসমান হইবে।

(VI) যদি $b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ না হয় তবে a, b, c মূলদ হইলেও বীজ দুইটি অমূলদ হইবে।

[দ্রষ্টব্য ঃ—উপরে দেখা যায় যে, x এর বীজদ্বয়ের বর্গমূলচিহ্নের মধ্যবর্তী $b^2 - 4ac$-এর সাহায্যে বীজগুলির প্রকৃতি নিরূপণ করা গিয়াছে। এইজন্য $b^2 - 4ac$ রাশিটিকে নিরূপক (Discriminant) বলা হয়। অতএব, উপরের তত্ত্বগুলিকে নিম্নরূপেও প্রকাশ করা যায়। যথা,

(I) যদি নিরূপক শূন্য হয়, তবে বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান (অভিন্ন) হইবে।

(II) নিরূপক যদি ধনাত্মক হয়, তবে বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান (ভিন্ন) হইবে।

(III) নিরূপকটি ঋণাত্মক হইলে বীজদ্বয় কাল্পনিক ও অসমান হইবে।

(VI) নিরূপক পূর্ণবর্গ রাশি হইলে বীজদ্বয় মূলদ হইবে, উহা পূর্ণবর্গ না হইলে বীজদ্বয় অমূলদ হইবে।]

8. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ও সহগের সম্বন্ধ।

[If $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, find the sum and the product of the roots] [C. U. '51]

মনে কর, $ax^2 + bx + c = 0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুইটি α ও β.

অতএব, $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ হইবে।

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

এবং $\alpha\beta = \dfrac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a\times 2a}$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

এখন, $ax^2+bx+c=0$ কে x^2 এর সহগ a দ্বারা ভাগ করিয়া $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ এই আকারে প্রকাশ করা যায়।

অতএব সমীকরণটির ঐ আকার হইতে দেখা যাইতেছে যে,

(i) **বীজ দুইটির সমষ্টি = পরিবর্তিত চিহ্নযুক্ত x এর সহগ**

এবং (ii) **বীজ দুইটির গুণফল = x বর্জিত তৃতীয় পদ।**

4. বীজ হইতে সমীকরণ গঠন।

(A) প্রদত্ত দুইটি বীজ হইতে সমীকরণ গঠন।

যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হয় তাহা হইলে x এর সহগ হইবে $-(\alpha+\beta)$ এবং x বিহীন পদটি হইবে $\alpha\beta$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ হইবে, অর্থাৎ x^2-(বীজদ্বয়ের সমষ্টি) $x+$ বীজদ্বয়ের গুণফল $=0$.

অথবা, $\because$ α ও β দুইটি বীজ, $\therefore$ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, অর্থাৎ সমীকরণটি $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$.

(B) যে সমীকরণের বীজদ্বয় কোন প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের দ্বারা গঠিত তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে কর, যে সমীকরণের বীজদ্বয় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি গঠন করিতে হইবে।

মনে কর $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β; সুতরাং $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ হইল।

α ও β এর অন্যোন্যক (reciprocal) $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$. অতএব, এখানে $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ বীজদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষণে, নির্ণেয় সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$;

এবং ঐ বীজদ্বয়ের গুণফল $\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2 - \left(-\frac{b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0$,

বা $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$ অর্থাৎ $cx^2 + bx + a = 0$.

5. Conjugate Roots (প্রতিযোগী বীজ)

তোমরা করণীর অধ্যায়ে শিখিয়াছ যে, $\alpha + \sqrt{\beta}$ করণীর প্রতিযোগী করণী (conjugate surd) হয় $\alpha - \sqrt{\beta}$ সেইরূপ $p + \sqrt{q}$ এই বীজের প্রতিযোগী বীজ হইবে $p - \sqrt{q}$.

উপপাদ্য (1). মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের অমূলদ বীজ দুইটি পরস্পর প্রতিযোগী হয়, অর্থাৎ একটি বীজ $\alpha + \sqrt{\beta}$ হইলে অপর বীজটি $\alpha - \sqrt{\beta}$ হইবে।

মনে কর, $ax^2 + bx + c = 0$ এই সমীকরণের একটি বীজ $\alpha + \sqrt{\beta}$. এই বীজের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ বলিয়া

$$a(\alpha + \sqrt{\beta})^2 + b(\alpha + \sqrt{\beta}) + c = 0$$

বা, $(a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c) + \sqrt{\beta}(2a\alpha + b) = 0$;

এখানে বামপক্ষের দুইটি অংশের মধ্যে একটি অংশ মূলদ এবং অন্যটি অমূলদ বা করণী এবং দুই অংশের যোগফল শূন্য। কিন্তু একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

অতএব, ঐক্ষেত্রে অংশদ্বয়ের প্রত্যেকটি শূন্য হইলে তবে উহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে।

$\therefore$ এখানে $a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c = 0$, এবং $2a\alpha + b = 0 \cdots (1)$.

এক্ষণে, ax^2+bx+c এই রাশিতে x এর মান $\alpha-\sqrt{\beta}$ ধরিয়া পাই,

$$a(\alpha-\sqrt{\beta})^2+b(\alpha-\sqrt{\beta})+c$$
$$=(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)-\sqrt{\beta}(2a\alpha+\beta)$$
$$=0-\sqrt{\beta}\times 0 \text{ [(1) হইতে]}=0.$$

অতএব, $\alpha-\sqrt{\beta}$ ইহাও $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ।

উপপাদ্য (II). বাস্তব সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের কাল্পনিক বীজদ্বয় পরস্পর প্রতিযোগী হয় অর্থাৎ একটি বীজ $p+iq$ হইলে অপর বীজটি হইবে $p-iq$.

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ $p+iq$.

এই বীজটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ বলিয়া

$$a(p+iq)^2+b(p+iq)+c=0,$$

বা, $(ap^2-aq^2+bp+c)+i(2apq+bq)=0.$

$\therefore\ ap^2-aq^2+bp+c=0$, এবং $2apq+bq=0\cdots(1)$

এক্ষণে ax^2+bx+c রাশিতে x এর মান $p-iq$ বসাইয়া পাই

$$=a(p-iq)^2+b(p-iq)+c$$
$$=(ap^2-aq^2+bp+c)-i(2apq+bq)$$
$$=0-i\times 0 \text{ [(1) হইতে]}=0.$$

অতএব, $p-iq$ ইহাও $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ।

উদাহরণমালা 1

[বীজের ধর্ম]

উদা. 1. Discuss the nature of the roots of the equation $4x^2=9$,

$\because\ 4x^2=9,\quad \therefore\ 4x^2-9=0.$

এখানে $a=4$, $b=0$ এবং $c=-9$, $\quad\therefore\ -\frac{c}{a}=\frac{9}{4}.$

অতএব, বীজ দুইটি বাস্তব, বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট কিন্তু পরস্পর সমান।

উদা. 2. Examine the nature of the roots of the equations (i) $2x^2-6x+3=0$ and (ii) $4x^2-12x+9=0$.

(i) এখানে $a=2$, $b=-6$, $c=3$

$\therefore\ b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times3=36-24=12$; ইহা ধনাত্মক, কিন্তু পূর্ণবর্গ নহে। সুতরাং বীজ দুইটি বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

(ii) এখানে $a=4$, $b=-12$, $c=9$,

$\therefore\ b^2-4ac=(-12)^2-4.4.9=144-144=0$,

সুতরাং বীজ দুইটি বাস্তব, মূলদ ও সমান।

উদা. 3. Discuss the nature of the roots of

(i) $x^2-6x+2=0$; (ii) $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$. [G. U. '48]

(i) এস্থলে $a=1$, $b=-6$, $c=2$. $\therefore\ b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times2$ $=36-8=28$, ইহা ধনাত্মক, কিন্তু পূর্ণবর্গ নহে।

$\therefore$ বীজ দুইটি বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।

আবার, এখানে বীজদ্বয়ের গুণফল $\frac{c}{a}$ (অর্থাৎ 2) ধনাত্মক বলিয়া উভয় বীজই ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবার কথা কিন্তু উহাদের যোগফল $-\frac{b}{a}$ এর মান অর্থাৎ 6 ধনাত্মক বলিয়া উহারা ধনাত্মক হইবে।

(ii) এস্থলে $a=1$, $b=-2\sqrt{7}$ (অমূলদ) এবং $c=-2$.

$\therefore\ b^2-4ac=(-2\sqrt{7})^2-4\times1\times-2=28+8=36=6^2$, ইহা পূর্ণবর্গ, কিন্তু bর মান অমূলদ, $\therefore$ বীজদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান। উহাদের একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক (কারণ উহাদের গুণফল $=-2$)

উদা. 4. Show that the roots of the equation $3x^2+4x-7=0$ are rational.

এখানে $a=3$, $b=4$, $c=-7$, $\therefore\ b^2-4ac=4^2-4\times3\times-7$ $=16+84=100$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

$\therefore$ বীজ দুইটি বাস্তব ও মূলদ।

উদা. 5. Show that the roots of $2x^2+3x+5=0$ are imaginary.

এখানে $a=2$, $b=3$, $c=5$, $\therefore$ $b^2=9$ এবং $4ac=4.2.5=40$.

$\therefore$ $b^2<4ac$, সুতরাং বীজদ্বয় কাল্পনিক (imaginary)

উদা. 6. Show that the roots of the equation $99x^2+100x=101$ are real. [A. U. '21]

সমীকরণটি $99x^2+100x-101=0$,

এখানে $a=99$, $b=100$, $c=-101$

$\therefore$ $b^2=(100)^2=10000$, এবং $4ac=4\times 99\times -101=-39996$.

$\therefore$ $b^2>4ac$, সুতরাং বীজদ্বয় বাস্তব (real).

✓উদা. 7. Find p, if $x^2+10x+p=0$ has equal roots.

এখানে $a=1$, $b=10$, $c=p$,

$\because$ বীজ দুইটি সমান (স্বীকার), $\therefore$ $b^2=4ac$, বা $10^2=4p$,

বা, $4p=100$, $\therefore p=25$.

উদা. 8. Find m if $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ have (i) equal and (ii) reciprocal roots. [C. U. '36]

(i) যদি নিরূপক $b^2-4ac=0$ হয়, তবে বীজ দুইটি সমান হইবে।

$\therefore$ এখানে $\{-2(5+2m)\}^2-4\times 1\times 3(7+10m)=0$,

বা, $4(25+4m^2+20m)-12(7+10m)=0$,

বা, $(25+4m^2+20m)-3(7+10m)=0$,

বা, $4m^2-10m+4=0$, বা, $2m^2-5m+2=0$,

বা, $(m-2)(2m-1)=0$, $\therefore$ $m=\frac{1}{2}$ বা 2.

(ii) বীজ দুইটি পরস্পর অন্যোন্যক হইলে $\alpha=\frac{1}{\beta}$ হইবে অর্থাৎ $\alpha\beta=1$ হইবে। আবার প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3(7+10m)}{1}=21+30m.$$

$\therefore$ $21+30m=1$, বা, $30m=-20$ $\therefore$ $m=-\frac{2}{3}$.

উদা. 9. Find the sum, difference and the product of the roots of $x^2-6x-4=0$.

মনে কর, বীজদ্বয় α ও β. এখানে $a=1,\ b=-6,\ c=-4$

$$\therefore \text{ বীজদ্বয়ের যোগফল} = \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6,$$

$$\text{বীজদ্বয়ের গুণফল} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4,$$

$$\text{এবং বীজদ্বয়ের অন্তর} = \alpha-\beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \sqrt{6^2-4\times-4}$$

$$= \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

উদা. 10. Are the roots of $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$ free from surds though the part of the roots arising from $\sqrt{b^2-4ac}$ is not a surd? If not, why not? [C. U. '46, এর অংশ]

প্রদত্ত সমীকরণে $a=1,\ b=-2\sqrt{3}$ এবং $c=-13$.

$$\therefore \quad \text{বীজদ্বয়} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

এস্থলে $\sqrt{b^2-4ac}=8$, সুতরাং ইহা মূলদ হইলেও, bএর মান অমূলদ সংখ্যা ($-2\sqrt{3}$) হওয়ায়, বীজ দুইটিতে অমূলদ সংখ্যা থাকিবে। অতএব বীজদ্বয় করণীমুক্ত হইতে পারে না, উহারা অমূলদ হইবে।

উদা. 11. Solve (*a*) $x^2-2\sqrt{17}x-8=0$, (*b*) $x^2-10x+8=0$. Distinguish between the roots of the two equations and try to account for the difference. [C. U. '47]

[সমীকরণ দুইটির সমাধান নিজে কর।]

(*a*) প্রথম সমীকরণে $a=1,\ b=-2\sqrt{17},\ c=-8$,

$$\text{সুতরাং বীজদ্বয়} = \frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{(-2\sqrt{17})^2-4\times-8}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{100}}{2} = \sqrt{17}\pm5$$

এখানে বীজদ্বয়েব সমষ্টি $= -\frac{b}{a} = 2\sqrt{17}$ (ধনাত্মক)

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} \quad -8$ (ঋণাত্মক)।

(b) দ্বিতীয় সমীকরণে $a=1, b \quad -10, c=8,$

সুতরাং বীজদ্বয় $\frac{10+\sqrt{100-32}}{2} = \frac{10+\sqrt{68}}{2} \quad 5\pm\sqrt{17}$

এস্থলে বীজদ্বয়েয় সমষ্টি $= -\frac{b}{a} = 10$ (ধনাত্মক)

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a} \quad -8$ (ধনাত্মক)

অতএব দেখা যাইতে যে, প্রথম সমীকরণে $\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{100} = 10$ বলিয়া উহা মূলদ , কিন্তু b (অর্থাৎ $-2\sqrt{17}$) অমূলদ বলিয়া বীজ দুইটিও অমূলদই হইবে।

আব, দ্বিতীয় সমীকরণে $\sqrt{b^2-4ac} - \sqrt{68} - 2\sqrt{17}$ বলিয়া উহা অমূলদ, সুতরাং এস্থলে b (অর্থাৎ -10) মূলদ হওয়া সত্বেও বীজ দুইটি অমূলদই থাকিয়া যাইতেছে।

আরও দেখা যায় যে, প্রথম সমীকরণেব বীজদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং অন্যটি ঋণাত্মক , কিন্তু দ্বিতীয় সমীকরণের দুইটি বীজই ধনাত্মক। ইহার কারণ, প্রথম ক্ষেত্রে বীজদ্বয়ের গুণফল ঋণাত্মক বলিয়া একটি ধনাত্মক, অপরটি ঋণাত্মক হইবেই। আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বীজদ্বযের গুণফল ধনাত্মক বলিয়া দুইটি বীজই ধনাত্মক বা দুইটিই ঋণাত্মক হইতে পারে , কিন্তু এস্থলে বীজদ্বয়ের সমষ্টি ধনাত্মক হওয়ায় দুইটি বীজই ধনাত্মক হইবে।

[মান নির্ণয়]

উদা. 12. If α and β are the roots of $x^2+px+q=0$, find the value of $\alpha^3+\beta^3$ and $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

এখানে, $\alpha+\beta = -p$ এবং $\alpha\beta = q$.

একক্ষণে, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-p)^3-3q\times -p$

$=-p^3+3pq$; এবং $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-p}{q}$.

উদা. 13. If α and β are the roots of $ax^2+bx+c=0$, find an expression for $\alpha^2+\beta^2$ in terms of a, b, c. [A. U. '19]

এখানে $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, $\therefore$ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

উদা. 14. If α and β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, find the value of $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}$.

[C. U. 1943]

$\because$ $ax^2+bx+c=0$, $\therefore$ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

$\therefore$ এখানে $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3.\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}\cdots$ (1)

আবার, $\because$ α প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ,

$\therefore$ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, বা $\alpha(a\alpha+b)+c=0$, $\therefore$ $a\alpha+b=-\frac{c}{\alpha}$.

অনুরূপে $a\beta^2+b\beta+c=0$,

$\therefore$ $\beta(a\beta+b)+c=0$, $\therefore$ $a\beta+b=-\frac{c}{\beta}$.

এক্ষণে, $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}=\frac{1}{-\frac{c^3}{\alpha^3}}+\frac{1}{-\frac{c^3}{\beta^3}}=-\frac{\alpha^3}{c^3}-\frac{\beta^3}{c^3}$

$=-\frac{\alpha^3+\beta^3}{c^3}=-\frac{3abc-b^3}{a^3c^3}$ [(1) হইতে] $=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$.

উদা. 15. If α, β and α', β' be the roots of $x^2-px+q=0$ and $x^2-p'x+q'=0$ respectively, find the value of $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\beta')^2$. [C. U. '13]

$\because$ $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β,

$\therefore$ $\alpha+\beta=p$ এবং $\alpha\beta=q$.

আবার, $\because$ $x^2-p'x+q'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α' ও β',

$\therefore$ $\alpha'+\beta'=p'$ এবং $\alpha'\beta'=q'$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি

$$=\alpha^2+\alpha'^2-2\alpha\alpha'+\beta^2+\alpha'^2-2\beta\alpha'+\alpha^2+\beta'^2-2\alpha\beta'$$
$$+\beta^2+\beta'^2-2\beta\beta'=2(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha'^2+\beta'^2)-2\alpha'(\alpha+\beta)$$
$$-2\beta'(\alpha+\beta)=2(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha'^2+\beta'^2)-2(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+2\{(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'\}-2(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')$$
$$=2(p^2-2q)+2(p'^2-2q')-2pp'.$$

[সমীকরণ গঠন]

উদা. 16. Form the quadratic equation whose roots are 4 and -7.

এখানে, $\because$ $\alpha+\beta=4-7=-3$ এবং $\alpha\beta=4\times-7=-28$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2+3x-28=0$.

উদা. 17. If α and β be the roots of $ax^2+bx+c=0$, form an equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}$ and $\frac{\beta}{\alpha}$. [C. U. 1877 ; P. U.]

$\because$ α ও β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ,

$\therefore$ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. উদ্দিষ্ট সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$.

এক্ষণে $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}$

$$=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$; এবং $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0,$

অর্থাৎ $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0.$

উদা. 18. Form the equation whose roots α and β satisfy the condition $\alpha^2+\beta^2=113$ and $\alpha\beta=28.$

এখানে $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=113+2\times28=169$

$\therefore$ $\alpha+\beta=\sqrt{169}=13,$ এবং $\alpha\beta=28$ (স্বীকার)

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-13x+28=0.$

উদা. 19. Form an equation whose roots are the squares of the roots of the equation $x^2+x+1=0.$ [A. U. '20]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β, সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটির বীজদ্বয় α^2 ও β^2 হইবে। প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\alpha+\beta=-1$ এবং $\alpha\beta=1$; $\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times1=-1$ এবং $\alpha^2\beta^2=(1)^2=1.$ $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2+x+1=0.$

উদা. 20. Form the quadratic whose roots are the reciprocals of the roots of $x^2-7x+12=0.$

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β, সুতরাং উদ্দিষ্ট সমীকরণের বীজ $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ হইবে।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\alpha+\beta=7$ এবং $\alpha\beta=12,$

$\therefore$ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{12}$, বা, $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=\frac{7}{12}$, এবং $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{12}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2-\frac{7}{12}x+\frac{1}{12}=0,$ বা $12x^2-7x+1=0.$

উদা. 21. Form the two quadratic equations of which the roots are (a) $2+\sqrt{7}$ and $2-\sqrt{7}$, and (b) $\sqrt{7}+2$ and $\sqrt{7}-2$ respectively. Distinguish between the co-efficients of the two equations and try to explain the difference.

[C. U. '48]

(a) এস্থলে বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7}=4$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})=(2)^2-(\sqrt{7})^2$

$=4-7=-3$, $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইবে $x^2-4x-3=0$.

(b) এস্থলে বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\sqrt{7}+2+\sqrt{7}-2=2\sqrt{7}$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=(\sqrt{7})^2-(2)^2$

$=7-4=3$ $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-2\sqrt{7}x+3=0$.

প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি 4 বলিয়া xএর সহগ -4 হইয়াছে, এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $2\sqrt{7}$ হওয়ায় xএর সহগ $-2\sqrt{7}$ হইয়াছে। আবার, প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল -3 বলিয়া তৃতীয় পদ -3 হইয়াছে, কিন্তু দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $+3$ হওয়ায় তৃতীয় পদ $+3$ হইয়াছে। অতএব, প্রথম সমীকরণে সকল পদই মূলদ সহগযুক্ত, কিন্তু দ্বিতীয় সমীকরণে একটি পদ অমূলদ সহগযুক্ত।

✓উদা. 22. If p and q are roots of the equation $x^2+7x+12=0$, find the equation whose roots are $(p+q)^2$ and $(p-q)^2$.

[C. U. '54]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $p+q=-7$ এবং $pq=12$.

যে সমীকরণটি গঠন করিতে হইবে তাহার প্রদত্ত বীজদ্বয় $(p+q)^2$ ও $(p-q)^2$.

$\therefore$ ঐ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=(p+q)^2+(p-q)^2=2(p^2+q^2)$

$=2\{(p+q)^2-2pq\}=2(49-24)=50$;

এবং ঐ বীজদ্বয়ের গুণফল $=(p+q)^2(p-q)^2=(-7)^2\{(p+q)^2-4pq\}$

$=49(49-4\times 12)=49$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-50x+49=0$.

উদা. 23. If a is not equal to b, but $a^2=5a-3$ and $b^2=5b-3$, find the equation whose roots are $\frac{a}{b}$ and $\frac{b}{a}$.

[C. U. '50]

এখানে a ও b সমান নহে বলিয়া এবং $a^2=5a-3$ ও $b^2=5b-3$ হওয়ায় বুঝা যায় যে, $x^2=5x-3$ অর্থাৎ $x^2-5x+3=0$ সমীকরণের a ও b দুইটি বীজ [$\because$ ঐ বীজ দুইটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ]।

$\therefore$ এখানে $a+b=5$ এবং $ab=3$ · (1),

নির্ণেয় সমীকরণের প্রদত্ত বীজ দুইটি $\frac{a}{b}$ ও $\frac{b}{a}$.

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{25-6}{3}=\frac{19}{3}$,

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{19}{3}x+1=0$, বা $3x^2-19x+3=0$.

[সাধারণ বীজ ও বিবিধ]

উদা. 24. Find the condition that $ax^2+bx+c=0$ and $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ may have a common root, and also find that common root.

মনে কর, উভয়ের সাধারণ বীজ r. সুতরাং সমীকরণ দুইটি হইতে পাই

$$ar^2+br+c=0 \cdots (1)$$

এবং $$a_1r^2+b_1r+c_1=0 \cdots (2)$$

এখন বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই $\frac{r^2}{bc_1-b_1c}=\frac{r}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b} \cdots (3)$

অতএব, $\left(\frac{r}{ca_1-c_1a}\right)^2=\frac{r^2}{bc_1-b_1c}\times\frac{1}{ab_1-a_1b}$

$\therefore$ $\boldsymbol{(ca_1-c_1a)^2=(bc_1-b_1c)(ab_1-a_1b)}$, ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

আবার, (3) হইতে $\frac{r}{ca_1-c_1a}=\frac{1}{ab_1-a_1b}$; এবং $\frac{r}{bc_1-b_1c}=\frac{1}{ca_1-c_1a}$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ বীজ $(r)=\frac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b}$, অথবা, $\frac{\text{[illegible]}}{ca_1-c_1a}$.

✓ উদা. 25. If r be the ratio of the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$. [C. U. '34]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ p, সুতরাং উহার অপর বীজ pr ($\because$ বীজদ্বয়ের অনুপাত $=r$)।

একণে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$$p+pr=-\frac{b}{a}\cdots\cdots(1) \text{ এবং } p.pr=\frac{c}{a}, \text{ বা } p^2r=\frac{c}{a}\cdots\cdots(2)$$

(1) হইতে পাই $p(1+r)=-\frac{b}{a}$, $\therefore p^2(1+r)^2=\frac{b^2}{a^2}$; বা $p^2=\frac{b^2}{a^2(1+r)^2}$

এবং (2) হইতে পাই $p^2r=\frac{c}{a}$, $\therefore\ p^2=\frac{c}{ar}$.

$$\therefore\ \frac{c}{ar}=\frac{b^2}{a^2(1+r)^2}, \text{ বা } \frac{a^2(1+r)^2}{ar}=\frac{b^2}{c}.$$

$$\text{বা, } \frac{a(1+r)^2}{r}=\frac{b^2}{c}, \therefore\ \frac{(1+r)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}.$$

✓ উদা. 26. If the roots of $x^2+2px+q=0$ and $x^2+2qx+p=0$ differ by a constant, show that $p+q+1=0$ unless $p=q$. [C. U. '44]

মনে কর, α ও β প্রথম সমীকরণটির দুইটি বীজ,

সুতরাং $\alpha+\beta=-2p$ এবং $\alpha\beta=q\cdots\cdots(1)$

মনে কর m ও n দ্বিতীয় সমীকরণটির দুইটি বীজ,

$\therefore\ m+n=-2q$ এবং $mn=p\cdots\cdots(2)$.

এখানে প্রদত্ত সর্ত হইল সমীকরণ দুইটির বীজগুলির অন্তরফল ধ্রুবক।

$\therefore \quad \alpha - m = k$ (ধ্রুবক) এবং $\beta - n = k$ (ধ্রুবক),

$\therefore \quad \alpha - m = \beta - n, \;\therefore\; \alpha - \beta = m - n.$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$$= (-2p)^2 - 4.q = 4p^2 - 4q,$$

এবং (2) হইতে পাই $(m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn = 4.q^2 - 4p.$

$\therefore \quad 4p^2 - 4q = 4q^2 - 4p \quad (\because \; \alpha - \beta = m - n),$

বা, $4p^2 - 4q^2 + 4p - 4q = 0$, বা, $p^2 - q^2 + p - q = 0$,

বা, $(p+q)(p-q) + (p-q) = 0$, বা, $(p-q)(p+q+1) = 0.$

এক্ষণে $\because$ p ও q অসমান, $\therefore$ $p - q$ শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore \quad p + q + 1 = 0.$

উদা. 27. What relation must exist between the constants of the equation $x^2 + px + q = 0$, so that the sum of the roots may be equal to three times their difference. [C. U. '47]

মনে কর, বীজদ্বয় α ও β এবং $\alpha > \beta$.

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $\alpha + \beta = 3(\alpha - \beta)$ ......(1)

আবার সমীকরণটি হইতে $\alpha + \beta = -p$ এবং $\alpha\beta = q$......(2).

এক্ষণে (1) হইতে বর্গ করিয়া পাই $(\alpha + \beta)^2 = 9(\alpha - \beta)^2$,

বা, $(-p)^2 = 9(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) = 9\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}$

বা. $p^2 = 9(p^2 - 4q)$, বা, $8p^2 = 36q$, বা, $2p^2 = 9q$.

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত হইল $2p^2 = 9q$.

উদা. 28. Find the value of $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$, when $x = \sqrt{-2} - 1$.

$\because \quad x = \sqrt{-2} - 1, \quad \therefore \quad x + 1 = \sqrt{-2},$

$\therefore \quad x^2 + 2x + 1 = -2$ (বর্গ করিয়া), বা $x^2 + 2x + 3 = 0$

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশিমালা $= x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3)$

$$- (x^2 + 2x + 3) + 12$$

$$= 12 \; [\because \; x^2 + 2x + 3 = 0]।$$

উদা. 29. If the roots of $ax^2+2bx+c=0$ be α, β and those of the equation $Ax^2+2Bx+C=0$ be $\alpha+\delta$ and $\beta+\delta$, show that $\frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2$. [C. U. '12]

প্রথম সমীকরণ সমাধান করিয়া পাই

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

$\because$ উহার বীজদ্বয় α ও β (স্বীকার)

$\therefore$ $\alpha-\beta=$ বীজদ্বয়ের অন্তর $=\frac{2\sqrt{b^2-ac}}{a}$......(1)

আবার $Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণটি হইতে পাই

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

$\therefore$ ইহার বীজদ্বয়ের অন্তর $=\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A}$......(2)

$\because$ এই বীজদ্বয় $\alpha+\delta$ ও $\beta+\delta$ (স্বীকার)

$\therefore$ ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর $=(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\alpha-\beta=$ প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তর।

$$\therefore\quad \frac{2\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A},\ \text{বা}\ \frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

$$\therefore\quad \frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}\ (\text{বর্গ করিয়া}),\ \therefore \frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\frac{a^2}{A^2}=\left(\frac{a}{A}\right)^2.$$

উদা. 30. Let $f(x)\equiv ax^2+bx+c=(x-\alpha)Q+R$, where $f(x)$ is the quadratic expression defined above. Q is the quotient and R the remainder when $f(x)$ is divided by $x-\alpha$, being a number.

(a) Show that $Q=a(x+\alpha)+b$, and $R=f(\alpha)$.

(*b*) If α is a root of the quadratic equation $f(x)=0$, deduce from the above values of Q and R the following :—

(i) $f(x)$ is exactly divisible by $x-\alpha$, (ii) $f(x)=0$ has two roots, distinct or equal and that (iii) the sum of the roots is equal to $-\frac{b}{a}$. [C. U. '51]

(*a*)

$$x-\alpha \;\Big)\; ax^2+bx+c \;\Big(\; ax+(a\alpha+b)$$
$$\underline{ax^2-a\alpha x}$$
$$(a\alpha+b)x+c$$
$$\underline{(a\alpha+b)x-a\alpha^2-\alpha b}$$
$$a\alpha^2+b\alpha+c$$

$\therefore\ Q=ax+a\alpha+b=a(x+\alpha)+b$ (প্রমাণিত হইল) ;

এবং $R=a\alpha^2+b\alpha+c$.

আবার, $\because\ f(x)\equiv ax^2+bx+c,$

$\therefore\ f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c,\quad \therefore\ R=f(\alpha).$

(*b*). (i) $\because\ f(x)=0$ এর একটি বীজ α,

$\therefore\ f(\alpha)=0,\ \therefore\ R=f(\alpha)=0$ [উপরে প্রমাণিত (*a*) হইতে]

অতএব R অর্থাৎ ভাগশেষ শূন্য হওয়ায় $f(x)$ সম্পূর্ণরূপে $x-\alpha$ দ্বারা বিভাজ্য হইল।

(ii) $f(x)=0$ হইলে, $(x-\alpha)Q=0$ হইল,

অর্থাৎ $(x-\alpha)\{a(x+\alpha)+b\}=0,\quad \therefore\ x=\alpha$, অথবা $-\alpha-\frac{b}{a}$.

অতএব $f(x)=0$ সমীকরণের α ও $(-\alpha-\frac{b}{a})$ এই দুইটি বীজ আছে এবং ঐ বীজ দুইটি ভিন্ন হইবে যদি $b\neq 0$, আর বীজ দুইটি সমান হইবে যদি $b=0$ হয়।

(iii) ঐ বীজ দুইটির সমষ্টি $=\alpha-\alpha-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}$.

[দ্রষ্টব্য :—যদি একটি রাশির মান অন্য একটি রাশির মানের উপর নির্ভর করে, তবে প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির অপেক্ষক (function) বলে। যথা, x^2 এর

কিংবা x^2+2x+3 এর মান x এর মানের উপর নির্ভর করে, সুতরাং x^2 বা x^2+2x+3 প্রত্যেকটি x এর অপেক্ষক হইল। x এর অপেক্ষককে সংক্ষেপে $f(x)$ লেখা হয়। অনুরূপে রাশিমালায় x, y, z প্রভৃতি থাকিলে উহাকে $x, y, z\cdots$ প্রভৃতির অপেক্ষক (function) বলা হয়। যে রাশি বা রাশিগুলির মানের উপর অপেক্ষকটির মান নির্ভর করে তাহাকে বা সেইগুলিকে **চল** (variable) বা **স্বাধীন চল** (independent variable) বলে।

অপেক্ষকটিতে বা রাশিমালায় চল রাশিগুলি ভিন্ন অন্য যে রাশিগুলি থাকে, তাহাদিগকে **ধ্রুব** বা **ধ্রুবক** (constants) বলে। যথা, x^2+2x+3 অপেক্ষকটিতে 2 ও 3 constants. অনুরূপে ax^2+bx+c এর a, b, c ধ্রুবক।

যদি $f(x)=x^2+2x+3$ হয়, তবে $f(2)=2^2+2\times2+3=11$,
$f(0)=0+2\times0+3=3$ হইবে।]

Exercise 1

Examine the nature of the roots of the following equations :—

1. $x^2-7x+12=0$. 2. $4x^2=25$. 3. $4x^2-4x+1=0$.

4. (a) $2x^2-x+2=0$, (b) $x^2-6x+2=0$.

5. Show that the roots of the equation $4x^2+25x=81$ are real.

6. Show that the roots of $63x^2-62x=221$ are rational.

7. Show that the roots of $2x^2-3x+4=0$ are imaginary.

8. If $x^2+7x+p=0$ has equal roots, find p.

9. Find the sum, difference and the product of the roots of $x^2-17x+72=0$. [A. U. '29]

10. Prove that the roots of $x^2+3x+1=0$ are reciprocal to each other.

11. Show that the roots of $qx^2+px+q=0$ are reciprocal to each other.

12. If α and β are the roots of $ax^2+bx+c=0$, shew that $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Form the equation whose roots are :—

13. 3, 4 ; 14. 5, −7 ; 15. $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$;

16. $a+b, a-b$; 17. a^2+a+1, a^2-a+1.

18. Form the equation whose roots α and β satisfy the relation $\alpha\beta=768$ and $\alpha^2+\beta^2=1600$. [A. U. '18]

19. Form the equation whose roots are the squares of the roots of $x^2+3x+2=0$.

20. If α and β are the roots of $ax^2+bx+c=0$, find the value of (i) $\alpha-\beta$, (ii) $\alpha^2+\beta^2$, (iii) $\alpha^3+\beta^3$, (iv) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$, (v) $\alpha^4\beta^{-2}+\beta^4\alpha^{-2}$.

21. If α and β are the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find the value of $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$. [C. U. '46]

22. Form the equation whose roots are reciprocals of the roots of $x^2+3x+4=0$.

23. If α and β are the roots of $ax^2+bx+c=0$, form the equation whose roots are 2α, 2β.

24. Form the equation whose roots are the reciprocals of the roots of $x^2-x+1=0$. [A. U. '25]

25. If the equations $x^2+ax+b=0$ and $x^2+a'x+b'=0$ have a common root, show that it must be either $\dfrac{ab'-ba'}{b-b'}$, or $\dfrac{b-b'}{a'-a}$.

26. Prove that the roots of $(b+c)x^2-(a+b+c)x+a=0$ are rational. [U. U. '47]

27. If α, β are the roots of the equation $x^2-px+q=0$, find the value of $\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$. [C. U. '41]

28. Show that if the roots of the equation $(a^2+b^2)x^2+2(bc+ad)x+(c^2+d^2)=0$ be real, they are equal. [P. U. '37]

29. If α and β are the roots of $3x^2-6x+4=0$, find the value of $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$. [C. U. '43]

30. If α, β be the roots of the equation $21x^2-x-2=0$, form the equation whose roots are $\alpha\beta$ and $\alpha^2+\beta^2$.

31. If α and β be the roots of $x^2+x+1=0$, form the equation whose roots are α^2 and β^2 Explain why you get the same equation as the given one [A. U. '24]

32 If α, β be the roots of the equation $x^2-px+q=0$, find the equation whose roots are $(2\alpha-\beta)$, $(2\beta-\alpha)$ [C. U. '28]

33 If α, β be the roots of the equation $x^2+x+1=0$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}$ and $\frac{\beta}{\alpha}$ Account for the identity of the equation thus obtained with the original equation. [C. U. '22].

34. If α and β be the roots of $ax^2+bx+c=0$, form the equation whose roots are $(\alpha+\beta)^2$ and $(\alpha-\beta)^2$. [C. U. '24]

35. If α and β be the roots of $x^2+px+q=0$, show that $\frac{\alpha}{\beta}$ is a root of the equation $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$. [C. U. '31]

36. If α, β be roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ and α_1, β_1 be the roots of $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, form the equation having the roots $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1$ and $\alpha\beta_1+\alpha_1\beta$.

37. Find the value of :

(i) $x^3-7x^2+13x-10$, when $x=3+\sqrt{2}$

(ii) $x^3-10x^2+35x-30$, when $x=4+\sqrt{-3}$

(iii) $x^4+7x^3+21x^2+29x+19$, when $x=\sqrt{-3}-2$

(iv) $4x^3-24x^2+49x-40$, when $x=\frac{1}{2}(3+2\sqrt{-1})$

38. If p and q be the roots of the equation $3x^2+6x+2=0$, show that the equation whose roots are $\frac{-p^2}{q}$ and $\frac{-q^2}{p}$ will be $3x^2-18x+2=0$. [C. U. '55]

39. If α, β be the roots of $ax^2+bx+c=0$, show that the equation whose roots are $\frac{1}{\alpha+\beta}$ and $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ is
$bcx^2+(b^2+ca)x+ab=0$. [P. U. '37]

40. If α and β be the roots of the equation $x^2-px+q=0$, form the equation whose roots are

(i) $\frac{q}{p-\alpha}$ and $\frac{q}{p-\beta}$; [P. U. '44]

(ii) $\frac{1}{\alpha}+\beta^{-1}$, $\alpha\beta$.

41. If one root of the equation $x^2-px+q=0$ be twice the other, show that $2p^2=9q$. [C. U. '37]

42. If the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ bear to one another the ratio of $2:3$; show that $6b^2=25ac$. [C. U. '49]

43. If the roots of $ax^2+bx+c=0$ be the square roots of the equation $px^2+qx+r=0$, show that $pb^2+a^2q=2apc$ and $pc^2=a^2r$.

44. Form the quadratic equation with rational coefficients one of whose roots is $4-\sqrt{5}$.

45. If the roots of $lx^2+mx+m=0$ be in the ratio $p:q$, show that $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{m}{l}}=0$. [C. U. '48]

[Hints ! মনে কর মূল দুইটি $p\alpha$ ও $q\alpha$.]

46. If the difference of the roots of the equation $x^2-px+q=0$ be unity, show that $p^2+4q^2=(1+2q)^2$. [A. U. '17]

47. If α and β be the roots of
$x^2-(1+k^2)x+\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)=0$, shew that $\alpha^2+\beta^2=k^2$.
[C. U. 1909]

48. If one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ be four times the other, show that $4b^2=25ac$. [C. U. '40]

49. If the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ bear to one another the ratio 3 : 4, prove that $12b^2=49ac$. [C.U.'45]

50. Find the relation which exists between a, b, c, when one root of $ax^2-bx+c=0$ is five times the other. [C.U. '55]

51. Determine the values of m for which $3x^2+4mx+2=0$ and $2x^2+3x-2=0$ may have a common root. [C. U. '34]

52. If one root of the equation $x^2+px+q=0$ be the square of the other, shew that $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.[C.U.'43]

53. If the roots of $x^2+Px+q=0$ be α, β and the roots of $x^2+px+Q=0$ be γ, δ, find the roots of $x^2+px+q=0$ in terms of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. [C. U. '14]

54. If the difference of the roots of the equation $x^2-px+q=0$ be the same as that of equation $x^2-qx+p=0$, show that $p+q+4=0$ unless $p=q$. [C. U. '41]

55. Express the roots of the equation
$q^2x^2-(p^2-2q)x+1=0$ in terms of those of $x^2+px+q=0$.
[C. U. '32]

56. If $x^2+bx+ca=0$ and $x^2+cx+ab=0$ have a common root, prove that their other roots satisfy the equation
$x^2+ax+bc=0$. [P. U. '19]

57. Prove that the arithmetic mean of the roots of $x^2-2ax+b^2=0$ is the geometric mean of the roots of $x^2-2bx+a^2=0$ and vice-versa. [C. U. '52]

58. If $x^2+px+q=0$ and $x^2+qx+p=0$ have a common root, show that either $p=q$, or $(p+q+1)=0$. [C. U. '39]

59. If the equations $x^2+px+q=0$ and $x^2+p'x+q'=0$ have a common root, show that it must be either
$\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ or $\frac{q-q'}{p'-p}$. [C. U. '14]

60. Find the condition that of the equation $ax^2+bx+c=0$
(i) the roots are reciprocals, (ii) both the roots are zero,
(ii) both the roots are negative.

61. Let $f(x)=ax^2+bx+c$, when a, b, c are real numbers.

(a) What can you say about the roots of the equation $f(x)=0$ in the following cases ?

(i) $b=0, ac \lessgtr 0$; (ii) $c=0, ab\neq 0$; (iii) $b=c=0, a\neq 0$;
(iv) $a=0, bc\neq 0$

(b) If $a\neq 0$ show that the roots of $f(x)$ are either both real or both imaginary.

(c) If x be real, find the least value of $f(x)$ when $a=2$, $b=-4, c=10$. [C. U. '52]

6. দ্বিঘাত রাশির উৎপাদক

ax^2+bx+c দ্বিঘাত রাশির সাধারণ রূপ।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α ও β.

$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

অতএব, $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
$=a\{x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)\}=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

7. x ও y দুইটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত দ্বিঘাত রাশিমালার উৎপাদক

x ও y দুইটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত দ্বিঘাত রাশিমালার সাধারণ আকার হইল $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$.

এখানে a, b, c, f, g, h এক একটি ধ্রুবক। এইরূপ রাশিমালার সহগ-গুলির মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সর্তে উহার দুইটি একঘাত উৎপাদক পাওয়া যায়।

একণে, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এই সমীকরণটি x-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে সাজাইয়া পাই

$$ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-2(hy+g)\pm\sqrt{4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

$$=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

$\therefore$ উপরের অনুচ্ছেদ নং 6 অনুসারে

$$ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)$$

$=a(x-x$এর একটি বীজ$)(x-x$এর অপর বীজ$)$

$$=a\left\{x+\frac{(hy+g)-\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}\times$$

$$\left\{x+\frac{(hy+g)+\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালার লব্ধ উৎপাদক দুইটি একঘাত উৎপাদক হইবে যদি $(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$ একটি পূর্ণবর্গ হয়, অর্থাৎ যদি $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$ একটি পূর্ণবর্গ হয় (সরল করিয়া)।

একণে, $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$ পূর্ণবর্গ হইবার সর্ত্ত হইল

$$\{2(gh-af)\}^2-4(h^2-ab)(g^2-ac)=0,$$

বা, $(gh-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$

বা, $g^2h^2+a^2f^2-2afgh=h^2g^2-ach^2-abg^2+a^2bc,$

বা, $a^2bc+2afgh-a^2f^2-abg^2-ach^2=0,$

বা, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$, ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত।

8. দ্বিঘাত রাশির চিহ্ন (Sign)।

ax^2+bx+c দ্বিঘাত রাশির সাধারণ রূপ। ইহার চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি হইতে নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা দেখিয়াছি (অনুচ্ছেদ 6) যে $ax^2+bx+c=0$ এর α ও β দুইটি বীজ হইলে, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ হয়।

এক্ষণে α ও β বীজদ্বয় (i) বাস্তব ও সমান হইতে পারে, অথবা (ii) বাস্তব ও অসমান হইতে পারে, অথবা (iii) কাল্পনিক হইতে পারে।

(i) **মনে কর α ও β বাস্তব ও সমান অর্থাৎ $\alpha=\beta$,**

সুতরাং $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$$=a(x-\alpha)(x-\alpha)=a(x-\alpha)^2$$

$=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি [$\because$ $(x-\alpha)^2$ ধনাত্মক]

অতএব a এর যে চিহ্ন ax^2+bx+c এরও সেই চিহ্ন হইবে।

(ii) **মনে কর α ও β বাস্তব ও অসমান।**

(a) এক্ষণে x যদি α ও β অপেক্ষা বড় হয়, তবে $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ দুইটিই ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ তখন $a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি,

অতএব aএর চিহ্ন ও ax^2+bx+c এর চিহ্ন একই হইবে।

(b) x যদি α ও β দুইটির অপেক্ষা ছোট হয়, তবে $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে, সুতরাং উহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ তখন ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ তখন $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\times$একটি ধনাত্মক রাশি।

অতএব a এর যে চিহ্ন ax^2+bx+c এরও সেই চিহ্ন হইবে।

(c) x যদি α অপেক্ষা বড়, কিন্তু β অপেক্ষা ছোট হয়, তবে $(x-\alpha)$ ধনাত্মক এবং $(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে, সুতরাং উহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে।

(d) x যদি α অপেক্ষা ছোট কিন্তু β অপেক্ষা বড় হয়, তবে $(x-\alpha)$ ঋণাত্মক এবং $(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে, সুতরাং উহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, (c) ও (d) উভয়ক্ষেত্রেই $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=a\times$ একটি ঋণাত্মক রাশি

$\therefore$ এই উভয়ক্ষেত্রে ax^2+bx+c এর চিহ্ন a এর চিহ্নের বিপরীত হইবে

(iii) **মনে কর α ও β বীজদ্বয় কাল্পনিক** এবং ধর $\alpha=p+iq$ ও $\beta=p-iq$.

একক্ষণে, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a\{x-(p+iq)\}\{x-(p-iq)\}$

$=a\{(x-p)+iq\}\{(x-p)-iq\}=a\{(x-p)^2-(iq)^2\}$

$=a\{(x-p)^2+q^2\}$ $[\because (i)^2=-1]$

$=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি।

অতএব a এর যে চিহ্ন ax^2+bx+c এরও সেই চিহ্ন হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের আলোচনা হইতে স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে, x-এর সমস্ত বাস্তব মানেই a-এর যে চিহ্ন হইবে ax^2+bx+c রাশিটিরও সেই চিহ্ন হইবে। কেবল যখন $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হইবে এবং x-এর মান বীজদ্বয়ের মানের মধ্যবর্ত্তী কোন মান হইবে তখনই মাত্র রাশিটির চিহ্ন a-এর যে চিহ্ন তাহার বিপরীত চিহ্ন হইবে।

9. দ্বিঘাত রাশির গরিষ্ঠ (বা চরম) ও লঘিষ্ঠ (বা অবম) মান।

ax^2+bx+c হইল দ্বিঘাত রাশির সাধারণ রূপ।

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\cdots\cdots(1)$$

(i) **মনে কর, a ধনাত্মক।**

একক্ষণে, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ পূর্ণবর্গ বলিয়া x এর যে কোন বাস্তব মানে উহা ঋণাত্মক হইবে না।

$\therefore \quad a(x+\frac{b}{2a})^2 \nless 0$ (0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে)।

অতএব (1) হইতে পাই যে, ax^2+bx+c এর মান কখন $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা কম হইতে পারে না [$\because \quad a(x+\frac{b}{2a})^2$ ঋণাত্মক নহে।]

আর যদি $x+\frac{b}{2a}=0$ হয়, তবে ax^2+bx+c এর মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এর সমান হইবে, কিন্তু উহা অপেক্ষা কম হইবে না।

$\therefore$ ax^2+bx+c এর **লঘিষ্ঠ মান** হইল $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

[দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে ax^2+bx+c এর মান যথেচ্ছ বড় হইতে পারে বলিয়া উহার একটি চরম মান নির্ণয় করা যায় না।]

(ii) **মনে কর, a ঋণাত্মক।**

এক্ষণে, $(x+\frac{b}{2a})^2$ ধনাত্মক বলিয়া $a(x+\frac{b}{2a})^2$ ঋণাত্মক হইবে ($\because$ a ঋণাত্মক)। অতএব (1) হইতে পাই যে, ax^2+bx+c এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

আর যদি $x+\frac{b}{2a}=0$ হয়, তবে ax^2+bx+c এর মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এর সমান হইবে, কিন্তু উহা অপেক্ষা বড় হইবে না।

$\therefore$ ax^2+bx+c এর **চরম** (গরিষ্ঠ) **মান** হইল $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$।

[দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে ax^2+bx+c এর মান যথেচ্ছ ছোট হইতে পারে বলিয়া ইহার কোন অবম (লঘিষ্ঠ) মান নির্ণয় করা সম্ভব নহে।]

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. Find the sign of $2x^2-5x+6$ for real values of x.

$$2x^2-5x+6=2(x^2-\tfrac{5}{2}x+3)=2\{(x-\tfrac{5}{4})^2+3-\tfrac{25}{16}\}$$
$$=2\{(x-\tfrac{5}{4})^2+\tfrac{23}{16}\}$$

$\because$ x বাস্তব, $\therefore$ $(x-\frac{5}{4})^2$ ঋণাত্মক নহে ;

সুতরাং $(x-\frac{5}{4})^2+\frac{23}{16}$ ধনাত্মক।

অতএব প্রদত্ত রাশি xএর যে কোন বাস্তব মানে ধনাত্মক হইবে।

উদা. 2. If x be real, show that the least value of $4x^2-4x+1$ is zero and the corresponding value of x is $\frac{1}{2}$.

[C. U. 1937]

$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ।

অতএব xএর বাস্তব মানে $(2x-1)^2$ এর মান হয় শূন্য অথবা কোন ধনাত্মক রাশি হইবে।

$\therefore$ উহার লঘিষ্ঠ মান $=0$.

আবার, $(2x-1)^2$ এর মান যখন শূন্য, তখন $2x-1=0$, $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$.

উদা. 3. Prove that for real values of x, the expression $3x^2-6x+8$ can never be less than 5. [C. U. '35]

$$3x^2-6x+8=3(x^2-2x+1)+5=3(x-1)^2+5.$$

এক্ষণে, x এর যে কোন বাস্তব মানে $(x-1)^2$ ঋণাত্মক নহে।

$\therefore$ $3(x-1)^2+5$ এর মান কখনই 5 অপেক্ষা কম হইতে পারে না।

অতএব, $3x^2-6x+8$ এর মান কখন 5 অপেক্ষা কম হইতে পারে না এবং লঘিষ্ঠ মান যখন 5 তখন $x=1$ হইবে।

উদা. 4. For what value of x is $2x^2+5x-3$ negative? What is its least value? [C. U. '50]

$$2x^2+5x-3=2x^2+6x-x-3=(x+3)(2x-1)$$
$$=2(x+3)(x-\tfrac{1}{2}).$$

x এর মান যখন -3 অপেক্ষা ছোট তখন উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক ; সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ রাশিটি ধনাত্মক। আবার যখন xএর মান $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বড় হয়, তখন উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ রাশিটি ধনাত্মক হয়।

যখন xএর মান -3 অথবা $\frac{1}{2}$ হয় তখন রাশিটির মান শূন্য হয়। পুনরায়, যখন xএর মান -3 অপেক্ষা বড় কিন্তু $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(x+3)$ ধনাত্মক ও $(x-\frac{1}{2})$ ঋণাত্মক হয়। অতএব উহাদের গুণফল অর্থাৎ রাশিটির মান ঋণাত্মক হয়।

অতএব, দেখা যাইতেছে, xএর -3 ও $\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী যে কোন মানেই প্রদত্ত রাশিটি ঋণাত্মক হইবে।

আবার, $2x^2+5x-3=2\{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\}$

$$=2\{x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2-(\frac{5}{4})^2-\frac{3}{2}\}$$

$$=2(x+\frac{5}{4})^2-2.\frac{25}{16}-3=2(x+\frac{5}{4})^2-\frac{49}{8}.$$

এখন, x এর কোন বাস্তব মানেই $(x+\frac{5}{4})^2$ ঋণাত্মক হইবে না, সুতরাং $2(x+\frac{5}{4})^2-\frac{49}{8}$, অর্থাৎ রাশিটির মান কখনই $-\frac{49}{8}$ অপেক্ষা ছোট হইবে না।

অতএব, রাশিটির নির্ণেয় লঘিষ্ঠ মান $-\frac{49}{8}$.

উদা. 5. Show that $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ lies between 7 and $\frac{1}{7}$, if x be real. [C. U. '40]

মনে কর, $y=\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$.

$\therefore \quad y(x^2+3x+4)=x^2-3x+4,$

বা, $x^2(y-1)+3x(y+1)+4(y-1)=0$, ইহা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

x বাস্তব বলিয়া সমীকরণের নিরূপক (discriminant) ঋণাত্মক নহে। এখানে নিরূপক $=\{3(y+1)\}^2-16(y-1)^2=-(7y^2-50y+7)$
$=-7(y-\frac{1}{7})(y-7)$

$\therefore$ x বাস্তব বলিয়া $-7(y-\frac{1}{7})(y-7) \nless 0$ (ঋণাত্মক নহে)

বা $7(y-\frac{1}{7})(y-7) \ngtr 0$ (ধনাত্মক নহে)

এখন, y এর মান $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়; সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়। আবার y এর মান 7 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয়, সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়।

যখন y এর মান $\frac{1}{7}$ অথবা 7 এর সমান হয়, তখন নিরূপকটি শূন্য হয়। পুনরায়, যখন y এর মান $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা বড় কিন্তু 7 অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(y-\frac{1}{7})$ ধনাত্মক ও $(y-7)$ ঋণাত্মক। অতএব, উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ঋণাত্মক হয়।

✓ উদা. 6. If x be real, prove that $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$ cannot lie between 1 and -7. [C. U. '44]

মনে কর, $y=\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$

বা, $y(x^2-4x+3)=2x^2-2x+4$,

বা, $x^2(y-2)-2x(2y-1)+(3y-4)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

x বাস্তব বলিয়া সমীকরণটির নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

এখানে, নিরূপক $=4(2y-1)^2-4(y-2)(3y-4)$.

x বাস্তব বলিয়া $4(2y-1)^2-4(y-2)(3y-4) \nless 0$

বা, $4(y^2+6y-7) \nless 0$,

বা, $4(y+7)(y-1) \nless 0$.

এখন, y এর মান -7 অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়; সুতরাং উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়। আবার, y এর মান 1 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয়; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়।

যখন y-এর মান -7 বা 1-এর সমান হয় তখন নিরূপকটি শূন্য হয়।

আবার, যখন y-এর মান -7 অপেক্ষা বড় কিন্তু 1 অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(y+7)$ ধনাত্মক ও $(y-1)$ ঋণাত্মক হয়, সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ঋণাত্মক হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, x বাস্তব হইলে y-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান -7 ও 1এর মধ্যবর্তী কোন মানই হইবে না।

উদা. 7. Show that for real values of x, $\dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ is capable of having all real values. [C. U. '47]

মনে কর, $y=\dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$, বা, $y(x^2+4x+2)=2x^2+4x+1$,

বা, $x^2(y-2)+4x(y-1)+(2y-1)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\because$ x বাস্তব, $\therefore$ সমীকরণটির নিরূপক অর্থাৎ

$16(y-1)^2-4(y-2)(2y-1) \nless 0$,

বা, $8y^2-12y+8 \nless 0$, বা, $8(y^2-\frac{3}{2}y)+8 \nless 0$,

বা, $8\{y^2-\frac{3}{2}y+(\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\}+8 \nless 0$, বা, $8(y-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{2} \nless 0$.

এখানে দেখা যাইতেছে, $(y-\frac{3}{4})^2$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি। সুতরাং y-এর কোন বাস্তব মানেই রাশিটি ঋণাত্মক হইতে পারে না। অতএব, y-এর যে কোন বাস্তব মানেই $8(y-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{2}$ রাশিটি সতত ধনাত্মক হইবে।

অতএব, x বাস্তব হইলে y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

উদা. 8. Find the limits between which $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ must lie for the real values of x.

মনে কর, $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, বা, $y(x^2+x+1)=x^2-x+1$.

বা, $x^2(y-1)+x(y+1)+(y-1)=0$; ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

সুতরাং xএর বাস্তব মানের জন্য সমীকরণের নিরূপকটি ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ $(y+1)^2-4(y-1)^2 \nless 0$, বা, $-3y^2+10y-3 \nless 0$,

বা, $-\{3y^2-9y-y+3\} \nless 0$, বা, $-(3y-1)(y-3) \nless 0$,

বা, $-3(y-\frac{1}{3})(y-3) \nless 0$, বা, $3(y-\frac{1}{3})(y-3) \ngtr 0$.

এখন y-এর মান $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়। আবার, y-এর মান 3 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয়; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়।

যখন y-এর মান $\frac{1}{3}$ বা 3-এর সমান হয় তখন নিরূপকটি শূন্য হয়। আবার, যখন y-এর মান $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা বড় কিন্তু 3 অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(y-\frac{1}{3})$ ধনাত্মক ও $(y-3)$ ঋণাত্মক হয়; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ঋণাত্মক হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, x বাস্তব হইলে y-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান $\frac{1}{3}$ হইতে আরম্ভ করিয়া 3 পর্যন্ত যে কোন মানই হইতে পারে।

উদা. 9. Show that the greatest and least values of $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$ for all real values of x, are $\frac{5}{4}$ and 1 corresponding to the values of 1 and 2 respectively of x. [C. U. '42]

$$\text{মনে কর,} \quad y=\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$$

বা, $y(5x^2-18x+17)=6x^2-22x+21$,

বা, $x^2(5y-6)-2x(9y-11)+(17y-21)=0\cdots\cdots(1)$,

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং x-এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য সমীকরণ (1)-এর নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ, $4(9y-11)^2-4(5y-6)(17y-21) \nless 0,$

বা, $-4(4y-5)(y-1) \nless 0$, [সরল করিয়া উৎপাদকে পরিণত করিয়া পাই]

বা, $-16-(y\frac{5}{4})(y-1) \nless 0$, বা, $16(y-\frac{5}{4})(y-1) \ngtr 0.$

এখন, y-এর মান 1 অপেক্ষা ছোট হইলে, উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয় ; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপক ধনাত্মক হয়। আবার যখন y-এর মান $\frac{5}{4}$ হইতে বড় হয় তখন উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয় ; সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপক ধনাত্মক হয়।

যখন y-এর মান 1 বা $\frac{5}{4}$ হয় তখন নিরূপকটি শূন্য হয়।

আবার যখন y-এর মান 1 হইতে বড় কিন্তু $\frac{5}{4}$ হইতে ছোট হয় তখন $(y-1)$ ধনাত্মক ও $(y-\frac{5}{4})$ ঋণাত্মক হয়, সুতরাং উহাদের গুণফল অর্থাৎ নিরূপকটি ঋণাত্মক হয়।

অতএব দেখা যাইতেছে x বাস্তব হইলে, y-এর মান 1 হইতে আরম্ভ করিয়া $\frac{5}{4}$ পর্যন্ত যে কোন মানই হইতে পারে ; সুতরাং x-এর বাস্তব মানের জন্য y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির লঘিষ্ঠ মান 1 এবং গরিষ্ঠ মান $\frac{5}{4}$ হইবে।

পুনরায় সমীকরণ (1)-এ $y=1$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$x^2-4x+4=0, \quad \text{বা,} \quad (x-2)^2=0, \quad \therefore \quad x=2;$$

এবং সমীকরণ (1)-এ $y=\frac{5}{4}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$x^2-2x+1=0, \quad \text{বা,} \quad (x-1)^2=0, \quad \therefore \quad x=1;$$

সুতরাং যখন $x=2$ হয়, তখন রাশিটির লঘিষ্ঠ মান 1 পাওয়া যায় এবং $x=1$ হইলে প্রদত্ত রাশির গরিষ্ঠ মান $\frac{5}{4}$ পাওয়া যায়।

উদা. 10. If x be real and a have any value between 1 and 3, show that $\frac{ax^2+x-2}{a+x-2x^2}$ can have any real value.

মনে কর, $y=\frac{ax^2+x-2}{a+x-2x^2}$, বা, $y(a+x-2x^2)=ax^2+x-2$

বা, $x^2(2y+a)-x(y-1)-(ay+2)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং x-এর মান বাস্তব বলিয়া সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ $(y-1)^2+4(2y+a)(ay+2) \nless 0$

বা, $(8a+1)y^2+2(2a^2+7)y+(8a+1) \nless 0,$

বা, $(8a+1)\{y^2+2.\frac{2a^2+7}{8a+1}\ y+1\} \nless 0$

বা, $(8a+1)\left\{\left(y+\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2+1-\left(\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2\right\} \nless 0.$

উপরের সর্ত সিদ্ধ হইতে হইলে, $(8a+1) \nless 0 \cdots\cdots(1)$

এবং $\left\{\left(y+\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2+1-\left(\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2\right\} \nless 0 \cdots\cdots(2)$ এই (1) ও (2) সর্তদ্বয় সিদ্ধ হইতে হইবে।

এখন ২য় সর্ত হইতে দেখা যায় যে y-এর যে কোন মানেই $\left(y+\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2$ সতত $\geqslant 0$ হইবে কারণ ইহা একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

সুতরাং ২য় সর্ত সিদ্ধ হইবে যখন $1-\left(\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2 \nless 0$

বা, যখন $\left(\frac{2a^2+7}{8a+1}\right)^2 \ngtr 1$ বা, যখন $(2a^2+7)^2 \ngtr (8a+1)^2$

বা, যখন $(2a^2+7)^2-(8a+1)^2 \ngtr 0,$

বা, যখন $(2a^2+8a+8)(2a^2-8a+6) \ngtr 0,$

বা, যখন $4(a^2+4a+4)(a^2-4a+3) \ngtr 0,$

বা, যখন $4(a+2)^2(a-1)(a-3) \ngtr 0.$

এখানে $(a+2)^2$ পূর্ণবর্গ রাশি বলিয়া ঋণাত্মক নহে। সুতরাং উপরের সর্ত সিদ্ধ হইবে যখন $(a-1)(a-3) \ngtr 0.$

এক্ষণে, উদা. 9 কে অনুসরণ করিয়া দেখা যায় যে উপরের সর্ত সিদ্ধ হইতে হইলে 'a' এর মান 1 ও 3এর মধ্যবর্তী থাকিতে হইবে। আরও দেখা যায় যে aএর 1 ও 3এর মধ্যবর্তী মানের জন্য ১ম সর্ত অর্থাৎ $(8a+1) \nless 0$ ও সিদ্ধ হয়।

অতএব যদি x বাস্তব হয় এবং aএর মান 1 ও 3এর মধ্যবর্তী থাকে, তবে অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

উদা. 11. If x and y are two real quantities connected by the equation $x^2+12xy+4y^2-26x-44y+89=0$, then x cannot lie between 4 and 1 and y between $\frac{5}{2}$ and 1.

প্রদত্ত সমীকরণকে x-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করিয়া পাওয়া যায়,

$x^2+2x(6y-13)+(4y^2-44y+89)=0$. যেহেতু x বাস্তব,

$\therefore$ সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ $4(6y-13)^2-4(4y^2-44y+89) \not< 0$.

বা, $4(32y^2-112y+80) \not< 0$, বা, $64(2y^2-7y+5) \not< 0$,

বা, $64(2y-5)(y-1) \not< 0$, বা, $128(y-\frac{5}{2})(y-1) \not< 0$.

[এখানে পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণ দর্শাইয়া লিখিবে।]

সুতরাং দেখা যাইতেছে x বাস্তব হইলে y-এর মান $\frac{5}{2}$ ও 1-এর মধ্যবর্তী কোন মান হইবে না।

পুনরায়, প্রদত্ত সমীকরণকে y-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করিয়া পাওয়া যায়, $4y^2+4y(3x-11)+(x^2-26x+89)=0$. যেহেতু y বাস্তব, সুতরাং সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক নহে।

অর্থাৎ, $16(3x-11)^2-16(x^2-26x+89) \not< 0$,

বা, $16(8x^2-40x+32) \not< 0$, বা, $128(x^2-5x+4) \not< 0$,

বা, $128(x-4)(x-1) \not< 0$.

[এখানেও পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণ দর্শাইয়া লিখিবে]

সুতরাং দেখা যাইতেছে, y বাস্তব হইলে x-এর মান 4 ও 1এর মধ্যবর্তী কোন মানই হইবে না।

উদা. 12. If $p>1$, then for real values of x, the expression $\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ lies between $\frac{p-1}{p+1}$ and $\frac{p+1}{p-1}$.

মনে কর, $y=\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$.

বা, $y(x^2+2x+p^2)=x^2-2x+p^2$.

বা, $x^2(y-1)+2x(y+1)+p^2(y-1)=0$, ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং x বাস্তব বলিয়া ইহার নিরূপক ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $4(y+1)^2-4p^2(y-1)^2 \nless 0$

বা, $-4\{y^2(p^2-1)-2y(p^2+1)+(p^2-1)\} \nless 0$,

বা, $-4(p^2-1)\{y^2-2\dfrac{p^2+1}{p^2-1}y+1\} \nless 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+1-\left(\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2\right\} \ngtr 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+\dfrac{(p^2-1)^2-(p^2+1)^2}{(p^2-1)^2}\right\} \ngtr 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2+\dfrac{-4p^2}{(p^2-1)^2}\right\} \ngtr 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}\right)^2-\left(\dfrac{2p}{p^2-1}\right)^2\right\} \nless 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}+\dfrac{2p}{p^2-1}\right)\left(y-\dfrac{p^2+1}{p^2-1}-\dfrac{2p}{p^2-1}\right)\right\} \ngtr 0$,

বা, $4(p^2-1)\left\{y-\dfrac{(p-1)^2}{p^2-1}\right\}\left\{y-\dfrac{(p+1)^2}{p^2-1}\right\} \ngtr 0$,

বা, $4(p^2-1)\left(y-\dfrac{p-1}{p+1}\right)\left(y-\dfrac{p+1}{p-1}\right) \ngtr 0$.

এখন যেহেতু $p>1$ $\therefore$ p^2-1 ঋণাত্মক নহে এবং $\dfrac{p+1}{p-1}>\dfrac{p-1}{p+1}$.

[এখানে পূর্বের উদাহরণগুলির ন্যায় কারণগুলি দর্শাইবে।]

সুতরাং x বাস্তব হইলে y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির মান $\dfrac{p-1}{p+1}$ ও $\dfrac{p+1}{p-1}$ এর মধ্যবর্তী যে কোন মান হইবে।

উদা. 13. Show that the expression
$2x^2+xy-8x-6y^2+5y+6$ is resolvable into two linear factors.

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ এই সাধারণ আকারের রাশিমালাটি দুইটি একঘাত উৎপাদকে পরিণত হইতে পারে,

যদি $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ হয়।

এখানে প্রদত্ত রাশিমালায় $a=2$, $h=\frac{1}{2}$, $b=-6$,
$g=-4$, $f=\frac{5}{2}$ এবং $c=6$.

$\therefore$ এখানে $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=(2\times-6\times6)$
$+(2\times\frac{5}{2}\times-4\times\frac{1}{2})-(2\times\frac{25}{4})-(-6\times16)-(6\times\frac{1}{4})$
$=-72-10-\frac{25}{2}+96-\frac{3}{2}=-96+96=0.$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা দুইটি একঘাত উৎপাদকে পরিণত হইতে পারে।

উদা. 14. For what value of p is the expression
$3x^2+7xy-5x-py^2+7y-2$ capable of resolution into two linear factors?

প্রদত্ত রাশিটিতে $a=3$, $h=\frac{7}{2}$, $b=-p$, $g=-\frac{5}{2}$, $f=\frac{7}{2}$, $c=-2$.

$\therefore$ $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=(3\times-p\times-2)$
$+(2\times\frac{7}{2}\times-\frac{5}{2}\times\frac{7}{2})-3\times\frac{49}{4}+p\times\frac{25}{4}+2\times\frac{49}{4}$
$=6p+\frac{25}{4}p-\frac{245}{4}-\frac{147}{4}+\frac{49}{2}=\frac{49}{4}p-\frac{294}{4}.$

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশিকে দুইটি একঘাত উৎপাদকে পরিণত করা যাইবে যদি $\frac{49}{4}p-\frac{294}{4}=0$ হয়,

$\therefore$ $\frac{49}{4}p-\frac{294}{4}=0$, বা, $\frac{49}{4}p=\frac{294}{4}$, $\therefore$ $p=6$.

উদা. 15. Find the two linear factors of the expression
$5x^2+13xy-6y^2-7x+13y-6$.

এখানে $5x^2+13xy-6y^2=5x^2+15xy-2xy-6y^2$
$=(x+3y)(5x-2y)$,

অতএব, মনে কর $5x^2+13xy-6y^2-7x+13y-6$
$=(x+3y+a)(5x-2y+b)$.

∵ উভয় পক্ষেই দ্বিঘাত পদগুলি $(5x^2+13xy-6y^2)$ একই

∴ $-7x+13y-6 \equiv a(5x-2y)+b(x+3y)+ab$

$$\equiv (5a+b)x+(3b-2a)y+ab$$

$5a+b=-7\cdots(1)$, $3b-2a=13\cdots(2)$, এবং $ab=-6\cdots(3)$.

এক্ষণে, (1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটিই a ও b এর একই মানে সিদ্ধ না হইলে প্রদত্ত রাশির কোন উৎপাদক হইবে না।

এক্ষণে, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $a=-2$, $b=3$ এবং ঐ দুই মান দ্বারা সমীকরণ (3)-টিও সিদ্ধ হয়।

∴ নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় হইল $x+3y-2$ ও $5x-2y+3$.

Exercise 2

If x be real, find the sign of :

1. $2x^2+5x+4$ 2. $12x-3x^2-15$ 3. $4x^2-3x+1$.

4. If x is real, between what values of x will the function $2x^2-11x+14$ be positive ?

5. Find the maximum value of $(1-x)(2+3x)$ for real values of x. [C. U. '46]

✓6. Prove that $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ lies between 3 and $\frac{1}{3}$ for real values of x. [C. U. '55]

✓7. If x be real, prove that $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ can have no value between 5 and 9. [C. U. '54 ; G. U. '48]

8. Find the maximum and the minimum values of $\dfrac{5(x^2-\frac{x}{5}+1)}{x^2+x+1}$ when x is real.

9. Find the limits between which the expression $\dfrac{x^2-4x+9}{x^2+4x+9}$ must lie for real values of x. [C. U. '48]

10. If x is real, prove that $\dfrac{3x^2+38x-85}{x^2+2x-7}$ can have no value between 7 and 11. [G. U. '49]

11. If x be real, show that $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ must lie between 1 and $-\frac{1}{11}$. [C. U. '53 ; P. U. '41]

12. If x be real, show that the value of $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+4)}$ cannot lie between $\frac{25}{49}$ and 1.

13. Show that the expression $\dfrac{p^2}{1-x}-\dfrac{q^2}{1+x}$ is capable of having all real values for real values of x.

14. Prove that $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}$ cannot lie between 1 and 9 for any real values of x.

15. For real values of x, find the greatest and least values of $\dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$. [P. U. '40]

16. Show that the greatest and least values of $\dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$ for all real values of x are 4 and -5 corresponding to the values 1 and 2 respectively of x. [Pat. U. '40]

17. Show that the expression $2x^2+3xy+5x-2y^2+5y+3$ can be resolved into two linear factors.

18. Find the two linear factors of

$$3x^2+7xy-5x-6y^2+7y-2.$$

19. Find the values of m which will make $2x^2+mxy+3y^2-5y-2$ equivalent to the product of two linear factors.

20. Find m so that x^2-7x+m and $x^2-13x+3m$ may have a common factor.

21. If the expressions px^2-qx+r and qx^2-rx+p have a common linear factor, prove that either $p=0$, or $p^3+q^3+r^3=3pqr$.

22. Show that x must lie between 3 and 7 and y must lie between -2 and 2, if the equation $y^2+x^2-10x+21=0$ is to be satisfied by real values of x and y.

23. Show that the expression $8x-15-x^2$ can be positive only for values of x which lie between certain limits ; and find these limits. [A. U. '30]

24. Find the condition that the expressions $ax^2+2hxy+by^2$ and $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ may have factors of the forms $y-mx$ and $my+x$.

25. Show that if $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$ is resolvable into linear factors, then $a^3+b^3+c^3=3abc$.

26. Show that, for real values of x, the expression ax^2+bx+c has the same sign as a, except when the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ are real and unequal and x lies between them. [C. U. '53]

27. If x be real and p have any value between 1 and 7, show that $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ can have any real value.

• Permutations and Combinations

[বিন্যাস ও সমবায়]

10. Permutation. কতিপয় বস্তুর কয়েকটি করিয়া লইয়া কিংবা সব কয়টিকে লইয়া বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে এক এক রকমের সাজানকে (arrangement-কে) এক একটি **বিন্যাস** (permutation) বলে। যথা,—

a ও b এই দুইটিকে একত্রে লইয়া সাজাইলে ab ও ba অর্থাৎ প্রথমে a ও পরে b রাখিয়া এবং প্রথমে b ও পরে a রাখিয়া এই দুই রকমে সাজান যাইবে। অতএব a ও b এর সব কয়েকটি লইয়া দুইটি বিন্যাস (permutations) হইল।

আবার, a, b ও c এই তিনটি অক্ষরের দুইটি করিয়া লইলে কয়টি বিন্যাস হয় দেখ। এক্ষেত্রে ab, ba, ac, ca, bc, cb এই ছয়টি বিন্যাস হইবে। যদি অক্ষর তিনটিকেই একত্রে লইয়া সাজান যায় তবে abc, acb, bca, bac, cab, cba এই ছয়টি বিন্যাস হইবে।

11. Combination. কতিপয় বস্তুর কয়েকটি করিয়া লইয়া অথবা সব কয়টিকে লইয়া বিভিন্ন দল বা মণ্ডলী (group বা selection) গঠন করিলে (এক দলের বস্তুগুলির ক্রম নিরপেক্ষ ভাবে) এক একটি মণ্ডলীকে এক একটি **সমবায়** (Combination) বলে। যথা—

a ও b এই দুইটিকে একত্রে লইয়া ক্রম নিরপেক্ষ ভাবে সাজাইলে ab একটি মাত্র দল বা সমবায় (Combination) হইবে। সমবায় ক্রমের উপর নির্ভর করে না বলিয়া এখানে a ও b এর কোন্‌টি আগে কোন্‌টি পরে এ প্রশ্ন উঠে না, সেজন্য দল একটি হইল। সমবায়ে ab ও ba অভিন্ন। a, b ও c অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া ক্রম নিরপেক্ষ ভাবে দল গঠন করিলে ab, ac, bc এই তিনটি সমবায় (Combinations) হইবে।

ঐ তিনটি অক্ষরকে একত্রে লইলে মাত্র abc একটি সমবায় হইবে। কারণ, এক্ষেত্রে abc, acb, bac, bca, cab, cba এগুলি একই সমবায়, বিভিন্ন নহে।

12. বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য। পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, বিন্যাসে ক্রম বিবেচ্য, কিন্তু সমবায়ে ক্রম বিবেচ্য নহে, কেবল মাত্র দলই বিবেচ্য। বিন্যাসে প্রদত্ত বস্তুগুলি হইতে নির্দেশ মত দুইটি বা তিনটি করিয়া লইয়া আগে দলগুলি নির্বাচন করিয়া পরে এক একটি নির্বাচিত দলের বস্তুগুলি বিভিন্ন ক্রমে সাজাইতে হয়। কিন্তু সমবায় ক্রম নিরপেক্ষ বলিয়া কেবল দল বা মণ্ডলী নির্বাচনই সমবায়ের কার্য—ইহাতে এক এক দলের বস্তুগুলিকে আর বিভিন্ন ক্রমে সাজাইতে হয় না।

a, b, c এই তিনটি অক্ষরকে লইয়া বিবেচনা করা যাউক। যদি উহাদের দুইটি করিয়া লইয়া দল নির্বাচন করি, তবে ab, ac, bc এই তিনটি বিভিন্ন দল বা সমবায় হইবে।

কিন্তু ঐ অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিতে হইলে, প্রথমে ab, ac, bc তিনটি দল নির্বাচন করিয়া তৎপরে এক একটি নির্বাচিত দলের দুইটি করিয়া অক্ষরকে বিভিন্নক্রমে সাজাইতে হইবে। ab দলটিকে ঐরূপে সাজাইলে ab ও ba দুই প্রকারে সাজানো যায়, সুতরাং ab একটি সমবায় বটে, কিন্তু উহাতে বিন্যাস সংখ্যা হইল দুইটি ab ও ba. অনুরূপে ac দল হইতে ac ও ca এবং bc দলটি হইতে bc ও cb এইরূপ বিন্যাস হইবে।

13. বিশেষ সিদ্ধান্ত। যদি কোন এক প্রক্রিয়া m বিভিন্ন রকমে করা যায় এবং ঐরূপ এক রকম প্রক্রিয়া করার পর অন্য একটি প্রক্রিয়া যদি n বিভিন্ন রকমে করা যায়, তবে ঐ দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

["If one operation can be performed in m ways, and (when it has been performed in any one of these ways) a second operation can then be performed in n ways, the number of ways of performing the two operations will be $m \times n$"]

মনে কর, প্রথম প্রক্রিয়াটি কোন একটি রকমে (m রকমের মধ্যে) করা হইল। এক্ষণে এই এক রকমের প্রথম প্রক্রিয়ার সহিত দ্বিতীয় প্রক্রিয়ার n রকমের সহযোগে উভয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $1 \times n$ রকমে সম্পন্ন হইতেছে। এইভাবে, প্রথম প্রক্রিয়ার m রকমের মধ্যে এক একটি রকমের সহিত দ্বিতীয় প্রক্রিয়ার n রকমের সহযোগে উভয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে n রকমে সম্পন্ন হইবে। অতএব, প্রথম প্রক্রিয়ার m রকমের সহিত দ্বিতীয় প্রক্রিয়ার n রকমের সহযোগে উভয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ রকমে সম্পন্ন হইবে।

দৃষ্টান্ত 1. মনে কর, হাওড়া স্টেশনে তিনটি ঘোড়া ও লিলুয়া স্টেশনে চারিটি সাইকেল রাখা হইয়াছে। এক্ষণে, আমি যদি হাওড়া হইতে ঘোড়ায় চড়িয়া লিলুয়া গিয়া সেখান হইতে সাইকেলে হাওড়ায় ফিরিয়া আসি, তবে এই যাতায়াত প্রক্রিয়া কত রকমে করা যাইবে দেখা যাউক।

প্রথমে যাইবার সময় আমি তিনটি ঘোড়ার মধ্যে প্রথম ঘোড়ায় চড়িয়া গেলাম। ফিরিবার সময় 4টি সাইকেলের যে কোন একটিতে আমি ফিরিতে পারি সুতরাং আমি চার রকমে ফিরিতে পারি। অতএব, একবার যাওয়ায় যাতায়াত প্রক্রিয়াটি 4 রকমে সম্পন্ন হইল।

এইরূপে আমি যদি হাওড়া হইতে দ্বিতীয় ঘোড়ায় চড়িয়া যাই, তবে সেক্ষেত্রেও আমি 4 রকমে ফিরিতে পারি। অনুরূপে তৃতীয় ঘোড়ায় গেলেও 4 রকমে প্রত্যাবর্তন করা যাইবে।

অতএব, যাতায়াত প্রক্রিয়াটি মোট 3×4 প্রকারে করা যাইবে।

[এখানে দেখ, 3টি ঘোড়া থাকায় হাওড়া হইতে লিলুয়ায় যাওয়া কাজটি 3টি বিভিন্ন উপায়ে করা যায়। এই তিনটি উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে লিলুয়ায় যাইবার পর সেখান হইতে হাওড়ায় ফিরিবার 4টি বিভিন্ন উপায় আছে (কারণ 4টি সাইকেলের যে-কোন একটিতে ফিরিয়া আসা যায়)। অতএব, প্রত্যেক দফায় ফিরিবার কাজটি 4টি বিভিন্ন উপায়ে করা যায়। অতএব, যাতায়াত কাজটি মোট 3×4 উপায়ে নিষ্পন্ন হইতে পারে।]

দ্রষ্টব্য। উপরের সিদ্ধান্তটিকে আরও ব্যাপকভাবে লওয়া যাইতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ প্রকারে করা যায়। এখন যদি বলা হয় যে, ঐ $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারের মধ্যে এক প্রকারে মিলিত প্রক্রিয়া করিলে তৃতীয় একটি প্রক্রিয়া p বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে তিনটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n \times p$ প্রকারে করা যাইবে। এইভাবে সিদ্ধান্তটিকে ব্যাপকভাবে লওয়া যায়।

দৃষ্টান্ত 2. একটি গৃহে তিনখানি বসিবার আসন আছে। পাঁচজন বালক আসনগুলিতে কত প্রকারে বসিতে পারে দেখা যাউক।

এখানে পাঁচজন বালকের যে-কোন একজন প্রথম আসনটিতে বসিতে পারে; সুতরাং প্রথম আসনটি 5টি বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

আবার, প্রথম আসনটি কোন একপ্রকারে পূর্ণ হইলে অর্থাৎ পাঁচজন বালকের যে-কোন একজন প্রথম আসনে বসিলে অবশিষ্ট আর 4 জন বালকের

যে-কোন একজন দ্বিতীয় আসনটিতে বসিতে পারে। অতএব প্রথম আসনটি কোন এক উপায়ে পূর্ণ হইলে দ্বিতীয় আসনটি চারিটি বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ হইতে পারে। সুতরাং এই দুই প্রক্রিয়া সংযুক্ত করিলে দেখা যায় যে প্রথম ও দ্বিতীয় আসন দুইটি মোট 5×4 বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

এক্ষণে, প্রথম দুইটি আসন 5×4 বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ হইবার পর বাকী থাকে তিনটি বালক এবং একখানি আসন; সুতরাং তখন এই তিনজন বালকের যে-কোন একজন তৃতীয় আসনে বসিতে পারে অর্থাৎ তৃতীয় আসনটি তখন তিন বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ হইতে পারে। অতএব, প্রথম ও দ্বিতীয় আসন দুইটি মোট 5×4 বিভিন্ন উপায়ের যে কোন এক উপায়ে পূর্ণ হইলে তৃতীয় আসনটি তিনটি উপায়ে পূর্ণ করা যায়। এখন প্রথম দুইটি আসন পূর্ণ করিবার 5×4 বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটি উপায়ের সহিত তৃতীয় আসনটি পূর্ণ করিবার 3টি উপায় সংযুক্ত করিলে দেখা যায় যে পাঁচজন বালক তিনখানি আসনে $5 \times 4 \times 3$ বা 60 বিভিন্ন প্রকারে বসিতে পারে।

14. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r বস্তু করিয়া একযোগে লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়। [এখানে $r < n$ অথবা $r = n$.]

[To find the numder of permutations of n different things taken r at a time.]

মনে কর n সংখ্যক বিভিন্ন রংএর মার্বেল এবং r সংখ্যক শূন্যস্থান (গর্ত) আছে। n মার্বেল হইতে একযোগে r সংখ্যক মার্বেল লইয়া ঐ r শূন্যস্থান পূর্ণ করিতে হইবে। ইহা কত প্রকারে করা যায় দেখিতে হইবে।

প্রথম গর্তে আমরা n মার্বেলের যে-কোন একটি রাখিতে পারি ; সুতরাং প্রথম গর্তটি n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। n মার্বেলের কোন একটি দ্বারা প্রথম গর্ত্ত পূর্ণ করিলে আর বাকি থাকে $(n-1)$ সংখ্যক মার্বেল। প্রথম স্থানটি পূর্ণ হওয়ার পর এই $(n-1)$ মার্বেলের যে-কোন একটি দ্বারা দ্বিতীয় স্থানটি পূর্ণ করা যায়, সুতরাং দ্বিতীয় গর্তটি $(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারে

পূর্ণ করা যাইবে। অতএব, এক এক প্রকারে প্রথম গর্ত পূর্ণ হওয়ার সঙ্গে দ্বিতীয় গর্তটি $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ হইবে; সুতরাং প্রথম ও দ্বিতীয় গর্ত দুইটি মোট $n(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে।

প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান $n(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারের মধ্যে কোন এক রকমে পূর্ণ হইবার পর তৃতীয় স্থানটি (গর্ত) অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক মার্বেলের মধ্যে যে-কোন একটি দ্বারা পূর্ণ করা যায় বলিয়া উহা $(n-2)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে। অতএব, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থান মিলিতভাবে মোট $n(n-1)(n-2)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইবে।

এ পর্যন্ত দেখা গেল যে, তিনটি স্থান পূর্ণ হইয়াছে এবং যতগুলি স্থান পূর্ণ হইয়াছে প্রকারগুলির উৎপাদক সংখ্যাও তত। আরও দেখা যায় যে, প্রথম হইতে এক একটি নূতন স্থান পূর্ণ হইতেছে আর উৎপাদক-সংখ্যা একটি করিয়া বাড়িতেছে এবং প্রত্যেক উৎপাদক ঠিক তার পূর্ববর্তী উৎপাদক অপেক্ষা এক কম।

অতএব, এখানে r স্থান যত প্রকারে পূর্ণ হইবে তাহা হইল $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots$ ইত্যাদি, r সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল।

এখানে r-তম উৎপাদক $=\{n-(r-1)\}=(n-r+1)$.

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা

$=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots$ r সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)$.

অনুসিদ্ধান্ত। উপরের উদাহরণে যদি n বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লওয়া হয়, তবে বিন্যাস সংখ্যা হইবে $n(n-1)(n-2)\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত অর্থাৎ $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1.$

[n-তম উৎপাদক $=n-(n-1)=1.$]

15. প্রতীক। (i) 1 হইতে আরম্ভ করিয়া 1, 2, 3 প্রভৃতি n পর্যন্ত ক্রমিক সংখ্যাগুলির গুণফলকে $\underline{|n}$ (বা $n\,!$) চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়।

এই প্রতীকটিকে পড়া হয় '**factorial** n.'

অতএব, $\lfloor\underline{5} = 5\times4\times3\times2\times1$;

$\lfloor\underline{6} = 6\times5\times4\times3\times2\times1$, ইত্যাদি।

(ii) n বিভিন্ন বস্তুর r বস্তু একযোগে লইয়া যত সংখ্যক বিন্যাস হয় তাহাকে ^nP_r বা nP_r এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

8টি বস্তু হইতে 3টি বস্তু লইয়া বিন্যস্ত করিলে বিন্যাস সংখ্যা $^8P_3$ দ্বারা সূচিত হইবে।

অনুরূপে n বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা ^nP_n দ্বারা প্রকাশিত হয়।

$\therefore\ \ ^nP_n = \lfloor\underline{n}.\quad ^nP_r = n(n-1)(n-2)\ .....(n-r+1).$

[দ্রষ্টব্য। ^nP_r এই প্রতীকের r দ্বারা সূত্রটির উৎপাদকগুলির মোট সংখ্যা বুঝায়। আর বিন্যাসে একযোগে যতগুলি বস্তু লওয়া হয়, উৎপাদকের সংখ্যাও তত হয়। ^nP_r-কে r-permutations বলা হয়, কারণ ইহাতে একযোগে r বস্তু লওয়া হইয়াছে। এইরূপে একযোগে 3টি বস্তু লইলে তাহাকে 3-permutations বলা হয়।)

16. কতিপয় অনুসিদ্ধান্ত

(1) $\lfloor\underline{n} = n\lfloor\underline{n-1}.$

প্রমাণ: $\lfloor\underline{n} = n(n-1)(n-2)\ .....3.2.1.$;

আবার, $\lfloor\underline{n-1} = (n-1)(n-2)......3.2.1.$

$\therefore\ \ \lfloor\underline{n} = n\lfloor\underline{n-1}.$

অনুরূপে $\lfloor\underline{n} = n(n-1)\lfloor\underline{n-2}$, ইত্যাদি।

(2) Factorial প্রতীকের দ্বারা ^nP_r-কে প্রকাশ করা যায়।

$^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ [ইহা প্রমাণিত হইয়াছে]

ডানপক্ষকে $(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3.2.1$ দ্বারা গুণ ও ভাগ করিয়া পাই,

$$^nP_r = \frac{\{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)\}(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3.2.1}.$$

একক্ষণে, দেখা যায় যে, ডানপক্ষের লবটি $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times n$ উৎপাদকগুলির গুণফল $=\underline{|n}$, এবং হরটি $1\times2\times3\cdots\cdots\times(n-r)$ উৎপাদকগুলির গুণফল $=\underline{|n-r}$.

$$\therefore\quad {}^nP_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}.$$

(3) $\underline{|0}$ দ্বারা কোন অর্থ প্রকাশ হয় কি ?

বিন্যাসের সংজ্ঞা অনুসারে $\underline{|0}$ এর কোন অর্থ না থাকিলেও, $\underline{|0}=1$ ধরা হয়, অর্থাৎ $\underline{|0}$ হইল 1 মানবিশিষ্ট একটি প্রতীকমাত্র।

প্রমাণ। উপরের অনুসিদ্ধান্ত (2) অনুসারে ${}^nP_n=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-n}}=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$.

আবার, ${}^nP_n=\underline{|n}$ [পূর্ব্বে প্রমাণিত]।

$$\therefore\quad \underline{|n}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|0}},\quad\therefore\quad \underline{|0}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}}=1.$$

(4) $\dfrac{1}{\underline{|-r}}$ এর অর্থ।

সংজ্ঞা অনুসারে $\dfrac{1}{\underline{|-r}}$ প্রতীকটি অর্থহীন হইলেও উহা 0 মানবিশিষ্ট একটি প্রতীক ধরা যায়।

প্রমাণ। $$\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\underline{|n-r}}{\underline{|n-r}}$$
$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\ ;$$

এক্ষণে, nএর মান 0 বসাইয়া পাই

$$\frac{\underline{|0}}{\underline{|-r}}=0\ ;\ \text{কিন্তু}\ \underline{|0}=1,\quad\therefore\quad\frac{1}{\underline{|-r}}=0.$$

(5) ${}^nP_n={}^nP_{n-1}$ হইবে।

প্রমাণ। ${}^nP_n=\underline{|n}$ [প্রমাণিত]

আবার, ${}^nP_{n-1}=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-(n-1)}}=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|1}}=\underline{|n}.\quad\therefore\quad {}^nP_n={}^nP_{n-1}.$

(6) যদি n বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছামত এক, দুই, তিন,......n বস্তু পর্য্যন্ত একসঙ্গে লইয়া সাজান যায়, তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা

$= {}^nP_1 + {}^nP_2 + {}^nP_3 + \cdots\cdots + {}^nP_n$ হইবে।

Permutation of things not all different

(সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ বস্তু সমূহের বিন্যাস)

17. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the number of permutations of n things taken all together, when the things are not all different]

মনে কর, n সংখ্যক অক্ষর প্রদত্ত n সংখ্যক বস্তু। ঐ n অক্ষরের মধ্যে মনে কর, p-সংখ্যক অক্ষর a, q-সংখ্যক অক্ষর b এবং r-সংখ্যক অক্ষর c আছে।

মনে কর, নির্ণেয় মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= x$.

মনে কর, p-সংখ্যক a অক্ষরকে পরিবর্ত্তিত করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অন্য প্রদত্ত অক্ষরগুলি হইতেও ভিন্ন এরূপ p-সংখ্যক অন্য অক্ষর লওয়া হইল।

এক্ষণে যদি অন্য অক্ষরগুলির অবস্থান বা বিন্যাসের কোন পরিবর্ত্তন না করিয়া কেবল মাত্র ঐ p-সংখ্যক নূতন বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাসের পরিবর্ত্তন করা হয়, তবে x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেক বিন্যাস হইতে $\lfloor p$ সংখ্যক ভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। অতএব, x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor p$-সংখ্যক বিন্যাস হইলে মোট বিন্যাস হইবে $x \lfloor p$.

অনুরূপ, ঐ $x\lfloor p$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে যে q-সংখ্যক b অক্ষর আছে, সেইগুলি পরিবর্ত্তন করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অক্ষরগুলি হইতেও ভিন্ন q-সংখ্যক অন্য নূতন অক্ষর লওয়া হইলে, ঐ q-সংখ্যক নূতন অক্ষরের পারস্পরিক ক্রমের পরিবর্ত্তন করিয়া $x\lfloor p$-সংখ্যক বিন্যাসের এক একটি হইতে $\lfloor q$ সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। অতএব তখন মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $x \times \lfloor p \times \lfloor q$.

পুনরায়, যদি ঐভাবে r-সংখ্যক c এর পরিবর্তে পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অবশিষ্ট অক্ষরগুলি হইতেও ভিন্ন r-সংখ্যক নূতন অক্ষর লওয়া হয়, তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r$.

এখন p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b ও r-সংখ্যক c সবগুলি পরিবর্তিত হইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইয়া যাওয়ায় সব অক্ষরগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যস্ত করিলে বিন্যাসের সংখ্যা হয় $\lfloor n$.

$$\therefore \quad x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r=\lfloor n,$$

$$\therefore \quad x=\frac{\lfloor n}{\lfloor p\,\lfloor q\,\lfloor r}.$$

[দ্রষ্টব্য। উপরে তিন প্রকার বিভিন্ন বস্তু দেওয়া ছিল। যদি আরও অধিক প্রকারের বিভিন্ন বস্তু দেওয়া থাকে, তাহা হইলেও উপরে প্রদর্শিত প্রণালী ও সূত্র প্রযোজ্য হইবে।]

Permutations involving repetitions

[একই বস্তু বার বার (একবার, দুইবার, ইত্যাদি) লইয়া বিন্যাস]

18. যদি প্রত্যেক বস্তুকে r বার পর্য্যন্ত পুনঃ পুনঃ লওয়া চলে, তবে n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the total number of r-permutations of n different things, when each thing may be repeated up to r times in any arrangement.]

মনে কর, প্রদত্ত n-সংখ্যক বস্তু n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর। মনে কর, r শূন্যস্থান আছে। ঐ n অক্ষর হইতে একযোগে r অক্ষর লইয়া এবং প্রত্যেক অক্ষর একবার, দুইবার, তিনবার,......r বার পর্য্যন্ত লইয়া ঐ r শূন্যস্থান মোট যত প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে তাহাই হইবে এক্ষেত্রে নির্ণেয় মোট বিন্যাস সংখ্যা।

প্রথম শূন্যস্থানটিতে n-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটিকে স্থাপন করা যায়, সুতরাং প্রথম শূন্যস্থানটি n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। প্রথম স্থান n প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইবার পর, দ্বিতীয় শূন্যস্থানটিও n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে, কারণ এখানে একই অক্ষর পুনরায় ব্যবহার করা চলিবে। অতএব, প্রথম দুইটি স্থান মোট $n \times n$ বা n^2-সংখ্যক বিভিন্নভাবে পূর্ণ করা যাইবে। অনুরূপে তৃতীয় শূন্যস্থানটিও n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। অতএব, প্রথম তিনটি স্থান পূর্ণ হইবে n^3-সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে।

এখানে দেখা যাইতেছে যে প্রত্যেক ক্ষেত্রে যতগুলি শূন্যস্থান পূর্ণ করা হইতেছে n এর ঘাত তত হইতেছে।

এক্ষণে, এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যায় যে, r শূন্যস্থান পূর্ণ করা যায় n^r প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$.

[দ্রষ্টব্য। (i) এখানে বিভিন্ন প্রকার বস্তুগুলির কোন প্রকার বস্তুর সংখ্যা r অপেক্ষা কম নহে। (ii) অন্যান্য বিন্যাসগুলি হইতে এই প্রকার বিন্যাসের পার্থক্য লক্ষ্য করিবার বিষয়।]

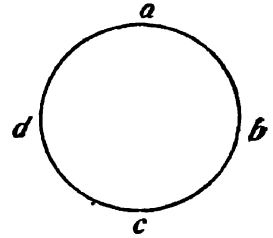
Permutation in a Circle
[বৃত্তাকারে বিন্যাস]

19. কতিপয় বিভিন্ন বস্তুকে এক সারিতে (in a row) সাজাইলে সেই বিন্যাসকে রৈখিক বিন্যাস (linear arrangement) বলা যায়।

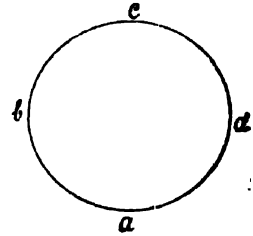
আর, বস্তুগুলিকে বৃত্তাকারে (in a circle বা in a ring) সাজাইলে সেই বিন্যাসকে বৃত্তাকারে বিন্যাস (circular arrangement) বলে।

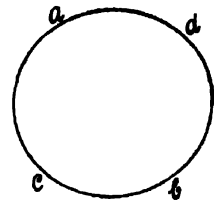
উভয় প্রকারের পার্থক্য এই যে, প্রথম প্রকার বিন্যাসের দুইটি প্রান্ত বা সীমা (ends) থাকে, কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসে তাহা থাকে না। রৈখিক

বিন্যাস বস্তুগুলির স্বতন্ত্র স্থানের (absolute position) উপর নির্ভর করে ; কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাস বস্তুগুলির **আপেক্ষিক** স্থানের উপর নির্ভর করে।

abcd, *bcda*, *cdab*, *dabc* এই চারিটি রৈখিক বিন্যাস বিভিন্ন কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসে উহাদের কোন বিশেষ প্রভেদ থাকিবে না। কারণ, ঐ *a*, *b*, *c*, *d* অক্ষর চারিটির যে কোন একটি হইতে আরম্ভ করিয়া চক্রক্রমে (in cyclic order) পড়িয়া গেলেই ঐ বিন্যাস চারিটি পাওয়া যায়।

[চিত্র (ক)]

20. বিভিন্ন ও অভিন্ন বৃত্তাকার বিন্যাস :

বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইলে যে সকল বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের মধ্যে যে বিন্যাসগুলিতে বস্তুগুলি **একই আপেক্ষিক অবস্থানে** সাজান থাকে, সেই বিন্যাসগুলিকে অভিন্ন ধরা হয়। আর, যে বিন্যাসগুলিতে বস্তুগুলির আপেক্ষিক অবস্থান বিভিন্ন অর্থাৎ একরূপ নহে, সেই বিন্যাসগুলিকে বিভিন্ন ধরা হয়।

[চিত্র (খ)]

চিত্র (ক)-এ বৃত্তটির যে যে স্থানে *a*, *b*, *c* *d* বসান আছে, চিত্র (খ)-এ ঐ অক্ষরগুলি ঠিক সেই সেই অবস্থানে নাই। কিন্তু উহাদের আপেক্ষিক অবস্থান দুই চিত্রেই অভিন্ন। কারণ, দুই চিত্রেই যে কোন একই অক্ষর (*a* বা *b* বা *c* বা *d*) হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে সেইদিকে ঘুরিয়া গেলে পরপর অক্ষরগুলি উভয়ক্ষেত্রে একই ক্রমে পাওয়া যাইবে। অতএব, ঐ বিন্যাস

[চিত্র (গ)]

দুইটি অভিন্ন। আবার দেখ, চিত্র (গ)-এ a, b, c, d অক্ষর চারিটির আপেক্ষিক অবস্থান চিত্র (ক) বা (খ)-এ উহাদের আপেক্ষিক অবস্থানের সহিত এক নহে। কারণ চিত্র (ক)-এ a হইতে আরম্ভ করিয়া পড়িয়া গেলে পাই $abcd$ এবং চিত্র (গ)-এ a হইতে আরম্ভ করিয়া চক্রক্রমে পড়িয়া গেলে পাই $adbc$. অতএব, প্রথম বিন্যাস দুইটি হইতে তৃতীয় বিন্যাসটি [চিত্র (গ)] বিভিন্ন।

এক্ষণে, বুঝা গেল যে বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে বিভিন্ন বিন্যাসে সাজাইতে হইলে, উহাদের যে-কোন একটি বস্তুকে কোন একটি অবস্থানে স্থির রাখিয়া বাকী বস্তুগুলিকে যত প্রকারে সম্ভব বিভিন্ন উপায়ে সাজাইতে হইবে।

মনে কর, বৃত্তাকারে চারিটি ভিন্ন স্থান আছে। এখন যদি a অক্ষরটিকে উহাদের মধ্যে যে-কোন একটি স্থানে বসান হয়, তবে উহাকে স্থির রাখিয়া বাকি অক্ষর তিনটি যত প্রকারে সম্ভব অপর স্থান তিনটিতে বসাইলে মোট $\lfloor 3$ আপেক্ষিক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

অতএব n-সংখ্যক ভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\lfloor n-1$.

[দ্রষ্টব্য। এই প্রকার বিন্যাসে যদি চক্রক্রমে আবর্ত্তনের দিকের কথা ধরা না হয় (অর্থাৎ clockwise ও anti-clockwise এই দুই প্রকার আবর্ত্তনের কোন প্রভেদ না করা হয়), তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\lfloor n-1$.

দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝা যাউক। (1) মনে কর 20টি ব্যক্তিকে লইয়া একটি round table সভা হইবে। এখন গোলাকার টেবিলে কত প্রকারে ঐ লোক-গুলিকে বসান যায়? (2) 20টি বালক আপেক্ষিকভাবে কত প্রকারে নাগর-দোলায় (merry-go-round) বসিতে পারে? (3) 20টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তা দিয়া কত রকমে মালা গাঁথা যায়?

(1) প্রথম প্রশ্নে বিন্যাসগুলি লোকদিগের আপেক্ষিক স্থানের উপর নির্ভর করে না, কেবল টেবিলের সম্পর্কে অবস্থানের উপর নির্ভর করে। অতএব, এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\lfloor 20$.

(2) দ্বিতীয়টি আপেক্ষিক বিন্যাস, কারণ ইহা বালকগণের মধ্যে আপেক্ষিক অবস্থানের প্রশ্ন। এখন যদি নাগর-দোলার 20টি আসনের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট আসনে একজন বালককে স্থির রাখিয়া অন্য 19টি বালককে বিভিন্ন প্রকারে বসান হয়, তবে তাহাদিগকে $\lfloor 19$ প্রকারে বসান যাইবে। অতএব, এস্থলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\lfloor 19$.

(3) তৃতীয়টিও আপেক্ষিক বিন্যাসের প্রশ্ন, কিন্তু দ্বিতীয় প্রশ্ন হইতে ইহার পার্থক্য আছে। 20টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তার মধ্যে যদি একটি মুক্তাকে স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 19টি মুক্তাকে বিভিন্ন প্রকারে গাঁথা হয়, তবে ডানদিক দিয়া (clock-wise) অথবা বামদিক দিয়া (anti-clock-wise) গাঁথিলে একই প্রকারের মালা হইবে—কোন পার্থক্য হইবে না। কারণ, কোন একটি ক্রমে মুক্তাগুলি সাজাইয়া মালাটি অপর পার্শ্বে ঘুরাইয়া দিলে দুই প্রকারই অনুরূপ হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\lfloor 19$.

বিবিধ বিন্যাস। আমরা যত প্রকার বিন্যাস সম্বন্ধে এ পর্য্যন্ত আলোচনা করিয়াছি তাহা ছাড়া আরও বিভিন্ন প্রদত্ত সর্ত্ত অনুসারে বিভিন্ন প্রকার বিন্যাস হইতে পারে। নিম্নের আলোচনা দেখ।

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Find the numerical value of

(i) $\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4}$ and (ii) ${}^7P_4 \div {}^8P_3$.

(i) $\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4} = \frac{6 \times 5 \times \lfloor 4}{\lfloor 4} = 30.$

(ii) ${}^7P_4 \div {}^8P_3 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{2}.$

উদা. 2. If ${}^{n+1}P_4 : {}^{n-1}P_3 = 72 : 5$, find n.

$\therefore \frac{{}^{n+1}P_4}{{}^{n-1}P_3} = \frac{72}{5}, \quad \therefore \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{72}{5}$

বা, $\frac{n(n+1)}{n-3}=\frac{72}{5}$, বা $5n^2+5n=72n-216$,

বা, $5n^2-67n+216=0$, বা $(n-8)(5n-27)=0$,

$\therefore$ $n=8$. এখানে অপর উৎপাদকটি হইতে n এর মান অখণ্ড ধনসংখ্যা নহে বলিয়া সেই মান গ্রাহ্য নহে।

উদা. 3. Show that $^{n-1}P_r=(n-r)\ ^{n-1}P_{r-1}$.

$^{n-1}P_r=(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)$,

আবার, $^{n-1}P_{r-1}=(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)$,

$\therefore$ $(n-r)\ ^{n-1}P_{r-1}=(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)$

$\therefore$ $^{n-1}P_r=(n-r)\ ^{n-1}P_{r-1}$.

উদা. 4. Two boys enter a hall in which there are only 5 vacant seats. In how many different ways can they seat themselves ?

দুইটি বালক 5টি শূন্য আসনে যত প্রকারে বসিতে পারে তাহার সংখ্যা $={}^5P_2=5\times4=20$.

অতএব তাহারা উভয়ে 20 প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

[অন্য প্রকারে দেখ। প্রথম বালক 5টি আসনের মধ্যে যে কোন একটিতে বসিতে পারে। অতএব সে 5 প্রকারে বসিতে পারে। এক্ষণে প্রথম বালক কোন একটি আসনে বসিলে দ্বিতীয় বালক অবশিষ্ট 4টি আসনের যে কোনটিতে বসিতে পারে। অতএব, প্রথম বালকের প্রত্যেক প্রকার উপবেশনের জন্য দ্বিতীয় বালক 4 প্রকারে বসিতে পারে। $\therefore$ তাহারা উভয়ে মোট 5×4 বা 20 প্রকারে উপবেশন করিতে পারে।]

উদা. 5. In how many ways can one consonant and one vowel be chosen out of the letters of the word '*neighbour*' ?

প্রদত্ত শব্দে 4টি vowel এবং 5টি consonant আছে। প্রত্যেকবার একটি করিয়া vowel ও একটি করিয়া consonant লইতে হইবে। 4টি vowel থাকায় 4 প্রকারে একটি করিয়া vowel লওয়া যাইবে। আবার,

প্রত্যেকবার একটি vowel লওয়ার জন্য 5 প্রকারে একটি করিয়া consonant লওয়া যাইবে।

∴ মোট 4×5 বা 20 প্রকারে একটি করিয়া vowel ও একটি করিয়া consonant লওয়া যাইবে।

[অর্থাৎ ${}^4P_1 \times {}^5P_1$ প্রকারে ঐরূপ লওয়া যাইবে।]

উদা. 6. How many numbers each lying between 100 and 600 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5 each of the digits occurring only once in each number ?

প্রদত্ত সর্ত্ত অনুসারে প্রত্যেক সংখ্যা তিন অঙ্কের হইবে। এখানে মোট 5টি সংখ্যা দেওয়া আছে। অতএব, দেখিতে হইবে 5টি সংখ্যা লইয়া কত প্রকারে 3টি স্থান পূর্ণ করা যায়।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

সকল ক্ষেত্রে শতকের অঙ্ক 5 এর অধিক হইতে পারে না বলিয়া সংখ্যাগুলি 100 ও 600 এর মধ্যে থাকিবে।

উদা. 7. In how many ways can the letters of the word '*daughter*' be arranged so that the vowels may never be separated. [C. U. '46]

এখানে (a, u, e) তিনটি অক্ষর vowel এবং বাকি 5টি অক্ষর consonant. ঐ vowel তিনটিকে একটি অক্ষর ধরিলে মোট 6টি অক্ষর (a, u, e), d, g, h, t, r হইবে। ঐ অক্ষর ছয়টি মোট $\lfloor 6$ বা 720 প্রকারে সাজান যায়।

আবার, ঐ vowel তিনটিকে একত্রে রাখিয়া উহাদিগকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor 3$ বা 3×2 বা 6 প্রকারে সাজান যায়।

∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 6 \times 720 = 4320$.

উদা. 8. In how many ways can the letters of the word '*balloon*' be arranged ?

প্রদত্ত শব্দে 7টি অক্ষরের মধ্যে দুইটি l ও দুইটি o আছে।

∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2\ \lfloor 2}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=1260.$$

উদা. 9. In how many ways can the letters of the word '*cotton*' be arranged so that the two t's do not come together ?

প্রদত্ত শব্দে দুইটি t ও দুইটি o আছে এবং মোট অক্ষর ছয়টি।

∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2\ \lfloor 2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2}=180.$

আবার, কতগুলি বিন্যাসে দুইটি t একত্রে আছে তাহা নির্ণয়ের জন্য ঐ t দুইটিকে একটি অক্ষর ধরিয়া কয়টি বিন্যাস হয় তাহা দেখিতে হইবে। এস্থলে মোট অক্ষর হইল 5টি এবং তাহাদের মধ্যে o দুইটি আছে।

∴ ঐরূপ বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}=\frac{5\times4\times3\times2}{2}=60.$

∴ যে বিন্যাসগুলিতে দুইটি t একত্রে থাকিবে না সেগুলির সংখ্যা $=180-60=120.$

উদা. 10. How many different words can be formed out of the letters of the word *accommodation* ? How many of them will have the three o's as consecutive letters ?

এখানে প্রদত্ত শব্দটিতে 13টি অক্ষর আছে এবং উহাদের মধ্যে 2টি a, 2টি c, 2টি m, 3টি o এবং বাকি 4টি পরস্পর বিভিন্ন।

∴ মোট নির্ণেয় শব্দ সংখ্যা $=\frac{\lfloor 13}{\lfloor 2\lfloor 2\lfloor 2\lfloor 3}=129729600.$

আবার, তিনটি o অক্ষরকে সর্ব্বদা পাশাপাশি রাখিয়া শব্দ রচনা করিতে হইলে ঐ o অক্ষর তিনটি একটি অক্ষর ধরিতে হইবে। সেস্থলে অক্ষর সংখ্যা হইবে 11টি এবং তন্মধ্যে 2টি a, 2টি c এবং 2টি m.

∴ নির্ণেয় ঐরূপ শব্দ সংখ্যা $=\frac{\lfloor 11}{\lfloor 2\ \lfloor 2\ \lfloor 2}=4989600.$

উদা. 11. In how many ways can the letters of the word '*normal*' be arranged, so that the vowels may occupy only odd positions ?

প্রদত্ত শব্দে 3টি বিজোড় স্থান আছে এবং 2টি vowel আছে।

$\therefore$ Vowel গুলিকে $^3P_2$ বা 6 প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। অবশিষ্ট 4টি স্থানকে 4টি consonant দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে। ঐ প্রক্রিয়া $\underline{|4}$ বা 24 প্রকারে করা যায়।

$\therefore$ মোট নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 6 \times 24 = 144.$

উদা. 12. Show that the letters of the word '*anticipation*' can be arranged in thrice as many ways as the letters of the word '*commencement*.'

"Anticipation" শব্দটিতে 2টি *a*, 2টি *n*, 2টি *t* ও 3টি *i* আছে। উহার অবশিষ্ট অক্ষরগুলি বিভিন্ন এবং উহাতে মোট 12টি অক্ষর আছে।

$$\therefore \text{ বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\underline{|12}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}} \;\ldots\ldots(1).$$

আবার, commencement শব্দটিতে মোট 12টি অক্ষরের মধ্যে 2টি *c*, 3টি *m*, 3টি *e*, 2টি *n* এবং বাকি অক্ষরগুলি বিভিন্ন।

$$\therefore \text{ এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\underline{|12}}{\underline{|2}\,\underline{|3}\,\underline{|3}\,\underline{|2}} \;\ldots(2).$$

এক্ষণে (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{\underline{|12}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2} \times \underline{|3}} \times \frac{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}\,\underline{|3}}{\underline{|12}} = \frac{\underline{|3}}{\underline{|2}} = 3.$$

অতএব, প্রথম শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা দ্বিতীয় শব্দটির বিন্যাস সংখ্যার 3 গুণ হইল।

উদা. 13. Find in how many ways can the letters of the word '*purpose*' be re-arranged (i) keeping the position of the vowels fixed, (ii) without changing the relative order of the vowels and consonants.

(i) প্রদত্ত শব্দে মোট 7টি অক্ষরের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ, এবং বাকী 4টি ব্যঞ্জনবর্ণের মধ্যে 2টি *p*.

এখানে সর্ত্ত হইল যে, বিন্যাসগুলিতে স্বরবর্ণ তিনটির স্থান স্থির থাকিবে ; স্থতরাং, এক্ষেত্রে কেবল বাকী 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ লইয়া বিন্যাস গঠন করিতে হইবে এবং উহাদের মধ্যে 2টি p.

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 12.$

ঐ 12টি বিন্যাসের মধ্যে purpose কথাটিও আছে বলিয়া পুনর্বিন্যাসের (re-arranged এর) প্রশ্নে উহা বাদ যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস সংখ্যা $= 12 - 1 = 11.$

(ii) প্রদত্ত শব্দে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি প্রথম, তৃতীয়, চতুর্থ ও ষষ্ঠ স্থানে এবং স্বরবর্ণগুলি দ্বিতীয়, পঞ্চম ও সপ্তম স্থানে আছে। এক্ষেত্রে প্রদত্ত সর্ত্ত অনুসারে বিন্যাসগুলিতে ব্যঞ্জনবর্ণ ও স্বরবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পূর্ব্বের ন্যায় অপরিবর্ত্তিত থাকিবে।

এক্ষণে, স্বরবর্ণ 3টিকে পূর্ব্বের নির্দ্দিষ্ট তিনটি স্থানে $\lfloor 3$ বিভিন্ন প্রকারে সাজান যায়।

আর ব্যঞ্জনবর্ণ 4টির মধ্যে 2টি p থাকায়, ঐগুলিকে ব্যঞ্জনবর্ণের চারিটি পূর্ব্ব নির্দ্দিষ্ট স্থানে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$ বিভিন্ন প্রকারে সাজান যায়।

আবার, স্বরবর্ণ তিনটির প্রত্যেক প্রকার বিন্যাসের সহিত ব্যঞ্জনবর্ণ 4টির বিন্যাসের প্রত্যেক প্রকার সংযুক্ত করা যায়।

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 3 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 72$ (ইহাদের মধ্যে প্রদত্ত শব্দটিও আছে)।

$\therefore$ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস সংখ্যা $= 72 - 1 = 71.$

উদা. 14. **In how many of the permutations of 10 things taken 4 at a time will one particular thing (i) always occur, (ii) never occur ?** [C. U. '36]

10টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি বস্তু লইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{10}P_4$
$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$

(ii) ঐ 10টি বস্তুর মধ্যে একটি নির্দিষ্ট বস্তু মোটেই থাকিবে না এরূপ-ভাবে বিন্যস্ত করিতে হইলে (10 – 1) বা 9টি বস্তুর মধ্য হইতে একযোগে 4টি লইয়া বিন্যস্ত করিতে হইবে।

∴ এক্ষেত্রে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^9P_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \mathbf{3024}$.

(i) অতএব, যে বিন্যাসগুলিতে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদা থাকিবে তাহাদের নির্ণেয় সংখ্যা $= 5040 - 3024 = \mathbf{2016}$.

উদা. 15. How many of the numbers formed by using all the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 only once are even ?

এখানে মোট অঙ্ক সংখ্যা ছয়টি। উহাদের মধ্যে 2, 4 ও 6 শেষে থাকিলে সংখ্যাগুলি জোড় হইবে। প্রথমে 2কে শেষে রাখিয়া বিন্যাস করিলে বাকি 5টি স্থান বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে।

∴ 2কে শেষে রাখিয়া মোট সংখ্যা $= {}^5P_5 = 120$.

অনুরূপে 4 ও 6কে যথাক্রমে শেষে রাখিলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা হইবে 120, ∴ মোট জোড় সংখ্যা $= 120 \times 3 = 360$টি।

উদা. 16. How many odd numbers of five significant figures can be formed with the digits 0, 2, 3, 4, 5 ?

এখানে বিজোড় সংখ্যাগুলির শেষে 3 অথবা 5 থাকিবে। অতএব, দেখিতে হইবে 3কে শেষে রাখিয়া কতগুলি বিন্যাস হয় এবং তন্মধ্যে প্রথমেই 0 আছে কয়টি বিন্যাসে। অনুরূপে 5কে লইয়া ঐভাবে দেখিতে হইবে।

3কে শেষে রাখিলে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_4 = 24$ (কারণ, বাকি 4টি অঙ্ক হইতে সবগুলি একযোগে লইয়া বাকি 4টি স্থান পূর্ণ করা হইয়াছে)।

এক্ষণে, প্রথম স্থানে 0 এবং শেষ স্থানে 3 থাকিবে এইরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3P_3 = 6$ (কারণ, এখানে বাকি 3টি অঙ্কের সব কয়টি একযোগে লইয়া বাকি 3টি স্থান পূর্ণ করা হইয়াছে)।

∴ 3 শেষে থাকিবে এরূপ সার্থক 5 অঙ্কের বিজোড় সংখ্যা

$= \mathbf{24 - 6 = 18}$টি।

অনুরূপে, 5কে শেষে রাখিলে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_4 = 24$.

আবার, প্রথমে 0 ও শেষে 5 থাকিবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3P_3 = 6$.

$\therefore$ শেষে 5 আছে এরূপ সার্থক 5 অঙ্কের বিজোড় সংখ্যা

$= 24 - 6 = 18$টি।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিজোড় সংখ্যা হইবে $(18+18)$ বা 36টি।

উদা. 17. How many numbers less than 1000 and divisible by 5 can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 each digit occurring only once in each number.

এখানে সংখ্যাগুলি 5 দ্বারা বিভাজ্য বলিয়া উহাদের শেষ অঙ্ক 0 অথবা 5 হইবে। আবার, সংখ্যাগুলি 1000 অপেক্ষা কম বলিয়া সেগুলি 1, 2 বা 3 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে।

(i) এক অঙ্কবিশিষ্ট 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা হইবে মাত্র 1টি (অর্থাৎ 5)।

(ii) 0কে শেষে রাখিয়া দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা হইবে ${}^6P_1$ গুলি অর্থাৎ 6টি।

আবার 5কে শেষে রাখিয়া কতগুলি সংখ্যা হয় দেখিতে হইলে 0 প্রথম স্থানে থাকিতে পারে না বলিয়া বাকি 5টি অঙ্ক (0 ও 5 ছাড়িয়া) হইতে একটি করিয়া অঙ্ক লইয়া কয়টি বিন্যাস হয় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ ঐরূপ সংখ্যা হইবে ${}^5P_1$ বা 5টি।

অতএব, দুই অঙ্কবিশিষ্ট 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা হইবে $(6+5)$ বা 11টি।

(iii) 0কে শেষ অঙ্ক ধরিয়া মোট তিন অঙ্কবিশিষ্ট-সংখ্যার সংখ্যা = বাকি 6টি অঙ্ক হইতে 2টি করিয়া অঙ্ক লইয়া প্রথম দুইটি স্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

$\therefore$ ঐরূপ সংখ্যা হইবে ${}^6P_2$ বা 30টি।

আবার, 5কে শেষ অঙ্ক ধরিয়া মোট তিন অঙ্কবশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা $= {}^6P_2 = 30$. এখন এই সংখ্যাগুলির মধ্যে 0 প্রথম স্থানে আছে এরূপ সংখ্যাও ধরা হইয়াছে, সুতরাং ঐরূপ সংখ্যাগুলি বাদ দিতে হইবে।

প্রথম স্থানে 0 ও শেষ স্থানটিতে 5 থাকিলে বাকি মধ্যম স্থানটি অবশিষ্ট 5টি অঙ্ক দ্বারা 5 প্রকারে পূর্ণ করা যায়। ∴ 0 প্রথম অঙ্ক যুক্ত সংখ্যা হইবে 5টি।

∴ 5 শেষ অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে (30 − 5) বা 25টি।

অতএব, মোট নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 11 + 30 + 25 = 67$.

উদা. 18. In how many ways can the letters of the word '*player*' be arranged? How many of these arrangements begin with p? How many begin with p but do not end with r?

(i) প্রদত্ত শব্দটিতে 6টি অক্ষর আছে এবং উহারা বিভিন্ন।

∴ অক্ষরগুলিকে $\lfloor 6$ বা 720 প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়।

(ii) কতগুলি বিন্যাস p দিয়া আরম্ভ হইবে তাহা নির্ণয়ের জন্য প্রথম স্থানে pকে বসাইয়া বাকি 5টি স্থানে বাকি 5টি অক্ষর দ্বারা কত প্রকারে পূর্ণ হয় দেখিতে হইবে।

অতএব, pকে প্রথম স্থানে বসাইলে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 5 = 120$.

(iii) এখানে মোট বিন্যাস সংখ্যা = 720 এবং তন্মধ্যে 120টি বিন্যাস p দিয়া আরম্ভ হইয়াছে।

∴ p দিয়া আরম্ভ নহে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= 720 - 120 = 600$.

(iv) এখন দেখ pকে প্রথম স্থানে এবং rকে শেষ স্থানে বসাইলে বাকি মধ্যবর্তী 4টি স্থান বাকি 4টি অক্ষর দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে।

∴ ঐরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 4 = 24$.

∵ p প্রথম অক্ষরবিশিষ্ট মোট বিন্যাস সংখ্যা = 120,

∴ p দিয়া আরম্ভ কিন্তু r দিয়া শেষ হয় নাই এরূপ বিন্যাস সংখ্যা
$= 120 - 24 = 96$.

উদা. 19. In how many ways can 3 prizes, one for good conduct, one for regular attendance and one for sports, be given away to 20 boys?

∵ প্রত্যেক পুরস্কার যে-কোন বালককে দেওয়া যায়,

∴ এখানে প্রত্যেক পুরস্কার 20 প্রকারে দেওয়া যায়।

একটি পুরস্কার বিতরণের পর সেইটি যত প্রকারে দেওয়া হইয়াছে তাহার প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় পুরস্কারটি 20 প্রকারে দেওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রথম দুইটি পুরস্কার 20×20 বা 20^2 প্রকারে বিতরণ করা যাইবে।

অনুরূপে 3টি পুরস্কার মোট 20^3 বা 8000 প্রকারে বিতরণ করা যাইবে।

উদা. 20. In how many ways can 6 boys form a ring?

ইহা একটি আপেক্ষিক অবস্থানের প্রশ্ন। মনে কর, একটি বালক একটি নির্দ্দিষ্ট স্থানে আছে, সুতরাং বাকি 5 জন বালককে $\underline{|5}$ প্রকারে সাজান যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= \underline{|5} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$

উদা. 21. In how many ways can 5 boys and 5 girls sit at a round table so that no two girls will be in consecutive positions?

একটি বালকের অবস্থান স্থির রাখিয়া বাকী 4 জন বালককে যত প্রকারে সম্ভব টেবিলের পাশে পাশে বসাইলে মোট $\underline{|4}$ বা 24টি বিন্যাস হইবে।

এই 24টি বিন্যাসের প্রত্যেক বিন্যাসের পক্ষে দুই দুইজন বালকের মধ্যে এক একজন করিয়া বালিকাকে বসান হইলে 5 জন বালিকাকে ঐরূপ 5টি স্থানে বসান যাইবে এবং কোন দুইজন বালিকা পাশাপাশি থাকিবে না।

5 জন বালিকাকে ঐরূপ 5টি স্থানে $\underline{|5}$ বিভিন্ন প্রকারে বসান যায়। অতএব, বালকদের প্রতিটি বিন্যাসের সহিত বালিকাদের $\underline{|5}$ বিন্যাস পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \underline{|4} \times \underline{|5} = 2880.$

উদা. 22. In how many ways can 9 pearls of different colours be strung on a necklace?

ছয়টি বস্তু বৃত্তাকারে বিন্যাস করিলে বিন্যাস সংখ্যা হয় $\underline{|5}$, ইহাতে clockwise ও anti-clockwise এই দুই প্রকার বিন্যাস ধরা হইয়াছে।

কিন্তু বিভিন্ন বর্ণের মুক্তার মালা ঘুরাইয়া ধরিলে উহার মুক্তাগুলির clockwise ও anti-clockwise ক্রম অনুরূপ হইয়া যায়।

∴ এখানে নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{1}{2}\lfloor 5 = \frac{1}{2} \times 120 = 60.$

উদা. 23. In how many ways can 6 persons be seated in a round table ?

এখানে বিন্যাসগুলির সম্পর্ক টেবিলের সহিত কিন্তু ঐগুলি ব্যক্তিগণের পরস্পরের অবস্থান নিরপেক্ষ হইবে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= \lfloor 6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720.$

উদা. 24. Find the number of different arrangements that can be made of bars of seven prismatic colours (violet, indigo, blue, green, yellow, orange and red) so that the blue and green, shall never come together. [C. U. '55]

বর্ণ 7টিকে মোট $\lfloor 7$ প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়। এক্ষণে, blue ও green বর্ণ দুইটিকে একটি ধরিলে মোট 6টি বর্ণ হয় এবং সেগুলি $\lfloor 6$ প্রকারে সাজান যায়। কিন্তু ঐ blue ও green বর্ণ দুইটিকে আবার নিজেদের মধ্যে $\lfloor 2$ বা 2 প্রকারে সাজান যায়।

∴ যে কয়টি বিন্যাসে ঐ বর্ণদ্বয় একসঙ্গে থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= 2\lfloor 6$

∴ যে বিন্যাসগুলিতে ঐ বর্ণ দুইটি একত্র থাকিবে না তাহাদের নির্ণেয় সংখ্যা $= \lfloor 7 - 2\lfloor 6 = \lfloor 6(7-2) = 5 \times \lfloor 6 = 3600.$

Exercise 3

1. Find the numerical values of :—

$\lfloor 8 \,;\, \frac{\lfloor 7}{\lfloor 4} \,;\, 7\,! \,;\, {}^6P_4 \,;\, {}^5P_5.$

2. If ${}^{n+1}P_3 = 10^n \times {}^{n-1}P_2$, find n.

3. If ${}^{2r+1}P_{r-1} : {}^{2r-1}P_r = 3 : 5$, find r.

Show that ;—

4. ${}^{n+1}P_{r+1} = (n+1) \times {}^nP_r$

5. ${}^{n}P_{r}=n\times {}^{n-1}P_{r-1}$

6. $\underline{|2r}=\underline{|r}.2^{r}\{1.3.5.\cdots\cdots(2r-1)\}$

7. ${}^{n}P_{r-1}={}^{n-1}P_{r-1}+(r-1).{}^{n-1}P_{r-2}$.

8. Two persons go in a railway carriage where there are six vacant seats. In how many different ways they may seat themselves ? [C. U. '10]

9. Find the number of permutations of the letters of the word 'Paresh' taken all together.

10. Find the number of permutations of the letters in *India.* [C. U. '20]

11. There are 8 hospitals in a town. In how many ways can 3 patients be sent to hospital, so that no two of them may be in the same hospital ?

12. There are 20 stations on a certain railway line. How many different single third class tickets must be printed so that it may be possible to travel from one station to another ?

13. In how many ways can the letters of the word '*laughter*' be arranged so that the vowels may never be separated ?

14. Find the number of permutations which can be made with the letters of the word '*approximation*' ? How many of them will begin with '*p*' ?

15 How many different words can be formed out of the letters of the word *multiple* ? In how many of these will the two *l*'s be consecutive ?

16. In how many other ways can the letters of the word *struggle* be arranged (i) without changing the order of the vowels, (ii) without changing the relative order of the vowels and consonants, (iii) keeping the position of the vowels unaltered.

17. Show that the letters of the word *'Calcutta'* can be arranged in twice as many ways as the letters of the word *'America'*. [C. U. '44]

18. In how many ways can the letters of the word *'pointed'* be arranged so that the vowels may occupy only odd positions ?

19. How many numbers lying between 100 and 1000 can be formed with the digits 5, 6, 7, 8, 9 each of the digits occurring only once in each number ?

20. How many numbers between 3000 and 4000 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

21. How many odd numbers of five significant digits can be formed with the digits 0, 3, 4, 5, 6 ?

22. How many of the numbers formed by using all the digits 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 only once are even ?

23. How many even numbers each of 7 digits can be formed with the digits 7, 5, 4, 7, 6, 5, 7 ?

24. How many different numbers, each of 5 digits, can be formed by means of the digits of the number 32302 ?

25. How many numbers less than 1000 and divisible by 5 can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 each digit not occurring more than once in each number ? [C. U. '42]

26. Find the number of ways in which n different books can be arranged on a shelf so that two particular books are not together. [C. U. '47]

27. In how many of the permutations of 12 things taken 3 at a time will one particular thing (i) always occur, (ii) never occur ?

28. Find how many words can be formed of the letters in the word *'failure'* the four vowels always coming together. [C. U. '40]

29. In how many ways can 4 prizes, one for recitation, one for sports, one for smartness and one for general proficiency be given away to 8 boys ? [C. U. '49]

30. There are 36 candidates for an examination, 20 boys and 16 girls. In how many ways can they be seated in a line so that no two girls may occupy consecutive positions ?

√ **31.** In how many ways can 7 examination papers be arranged so that the best and the worst papers never come together ?

32. In how many ways can the letters of the word '*blossom*' be arranged, so that the two *o*'s do not come together ?

√ **33.** In how many ways can the letters of the word '*Friday*' be arranged ? How many of these arrangements do not begin with '*F*' ? How many begin with *F* and do not end with *y* ?

34. A man has to post 4 letters and there are 3 letter-boxes, in how many ways can he post the letters ?

√ **35.** In how many ways can 10 examination papers be arranged so that the best and worst papers never come together ? [C. U. '53]

36. In how many ways can 10 children sit in a merry-go-round relatively to one another ? [C. U. '27]

37. Find how many different words can be formed with 5 given letters of which 3 are consonants and 2 are vowels, no two consonants coming together. [C. U. '29]

38. In how many ways can 8 persons sit at a round table so that all shall not have the same neighbours in any two arrangements ?

39. In how many ways can 6 teachers and 6 students sit at a round table, so that no two students be in consecutive positions ?

40. In how many ways can 5 Indians and 5 Englishmen be arranged alternately at a round table ?

41. In a library there are 4 copies of one book, 5 copies of each of two books, 7 copies of each of three books and single copy of 6 books. In how many ways can all the books be arranged ?

42. A library has 5 copies of one book, 4 copies of each of two books, 6 copies of each of three books and single copies of eight books. In how many ways can all the books be arranged ? [C. U. '34]

43. How many words can be formed taking together 2 consonants out of 7 and one vowel out of 3 so that the vowel is always in between the two consonants ? [C. U. '22]

44. There are two works of three volumes and two works each of two volumes ; in how many ways can the ten books be placed on a shelf so that the volumes of the same work are not separated ? [P. U. '46]

45. In how many ways can 8 boys form a ring ?

46. In how many ways can 8 different pearls be strung on a necklace ?

47. If there be 30 stations on a Railway line, how many different kinds of third class tickets will be necessary to make it possible to book from any one station to any other station ?

48. In how many ways can 15 I. Sc. and 12 B. Sc. candidates be arranged in a line so that no two B. Sc. candidates may occupy consecutive positions ? [P. U. '42]

49. In how many ways can 5 I.Sc. and 2 B.Sc. students be arranged at a round table if the two B.Sc. students (i) sit together, (ii) are separated ?

50. Find the number of ways in which 5 boys and 5 girls can be placed alternately in a ring.

51. Show that the total number of permutations (with repetitions) of n different things, not more than p being taken at a time, is $\frac{n(n^p-1)}{n-1}$.

52. How many different arrangements can be made out of the letters in the expression $x^5y^3z^2$ when written at full length ?

Combinations (সমবায়)

21. 11নং অনুচ্ছেদে সমবায়ের সংজ্ঞা এবং 12 নং অনুচ্ছেদে বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে।

কতকগুলি বস্তু হইতে সবগুলি বা কয়েকটি করিয়া একযোগে লইয়া যত প্রকার দল নির্বাচন করা যায় তাহাদের এক একটি নির্বাচনকে এক একটি **সমবায়** (Combination) বলে।

সমবায় দ্বারা কেবল এই দল নির্বাচনই বুঝায়, কিন্তু সমবায়ে এই দল নির্বাচনের পর এক দলীয় বস্তুগুলিকে আবার বিভিন্ন ক্রমে সাজান বুঝায় না। এক দলীয় বস্তুগুলি কোন্‌টির পর কোন্‌টি সাজান হইল তাহা বিন্যাসের লক্ষ্য, আর কেবল কোন্ কোন্ বস্তু লওয়া হইল তাহাই সমবায়ের মূল কথা। যথা— মনে কর a ও b অক্ষর দুইটি দেওয়া আছে। দুইটি অক্ষরই একযোগে লইলে সমবায় হইবে মাত্র একটি ab, কিন্তু বিন্যাস হইবে দুইটি ab ও ba.

প্রতীক। n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, তাহা সংক্ষেপে ^nC_r বা $_nC_r$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়

Combination of things all different

22. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the number of combinations of n different things taken r at a time ($r \leqslant n$).]

মনে কর, নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা x. এখানে প্রত্যেক সমবায়ে r সংখ্যক বস্তু আছে। এক একটি সমবায়ের r বস্তুকে লইয়া যদি যতগুলি সম্ভব বিভিন্ন প্রকারে সাজানি যায় তবে $\lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস হইবে।

$\therefore$ x সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $x \times \lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস হইবে।

আবার দেখ, এই x সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির অন্তর্গত বস্তুগুলিকে যত প্রকারে সম্ভব সাজাইলে n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া যতগুলি বিন্যাস সংখ্যা হয় তাহাই পাওয়া যায়।

$\therefore$ $x \times \lfloor r = n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাস সংখ্যা $= {}^nP_r$,

অর্থাৎ ${}^nC_r \times \lfloor r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$,

$$\therefore\ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\cdots\cdots (1)$$

এক্ষণে (1) কে factorial আকারে প্রকাশ করার জন্য ডান পক্ষের লব ও হরকে $\lfloor n-r$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \times (n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1}{\lfloor r \times \lfloor n-r}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}.$$

[দ্রষ্টব্য। $\leqslant$ এই চিহ্নটির অর্থ $<$ অথবা $=$ অর্থাৎ কম অথবা সমান। 22 অনুচ্ছেদে r, n এর সমান বা n অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, উহা n অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না।]

বিকল্প প্রমাণ (বিন্যাস সূত্রের সাহায্য না লইয়া) :

মনে কর, n-সংখ্যক বস্তু যেন n-সংখ্যক অক্ষর এবং মোট সমবায় সংখ্যা $= {}^nC_r$.

যে সমবায়গুলিতে কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষর আছে সেগুলি পাওয়া যাইবে, যদি অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে একযোগে $(r-1)$ অক্ষর লইয়া যতগুলি সমবায় হয় তাহাদের প্রত্যেকটির সহিত ঐ নির্দিষ্ট অক্ষরটিকে সংযুক্ত করা যায়।

$\therefore$ যে সমবায়গুলিতে কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষর আছে সেগুলির সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1}$.

অতএব, যদি n-অক্ষর হইতে একযোগে r-অক্ষর লইয়া সমস্ত সমবায়গুলি লেখা যায়, তবে প্রত্যেক অক্ষর সেইগুলিতে ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার করিয়া আছে।

$\therefore$ ঐ সমবায়গুলিতে মোট অক্ষর সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

আবার দেখ, এখানে মোট সমবায় সংখ্যা ধরা হইয়াছে ${}_nC_r$ এবং প্রত্যেক সমবায়ে r-সংখ্যক অক্ষর আছে। অতএব, সমস্ত সমবায়ে মোট অক্ষর সংখ্যা $= r \times {}^nC_r$.

$\therefore \; r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1}$,

$\therefore \; {}^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$

অনুরূপে, ${}^{n-1}C_{r-1} = \dfrac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2}$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3},$$

....

$${}^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1$$

এবং ${}^{n-r+1}C_1 = \dfrac{n-r+1}{1}$

এক্ষণে, উপরের বামপক্ষের রাশিগুলির ও ডানপক্ষের রাশিগুলি গুণ করিয়া এবং ঐ দুই গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপনয়ন করিলে পাই

$$^nC_r=\frac{n}{r}\times\frac{n-1}{r-1}\times\frac{n-2}{r-2}\times\cdots\cdots\times\frac{n-r+1}{1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots2.1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\,\lfloor n-r}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\cdots\cdots(2).$$

অনুসিদ্ধান্ত। (i) $^nC_1=n.$

প্রমাণ। $\because\ ^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$, $\therefore\ ^nC_1=\frac{\lfloor n}{\lfloor 1\,\lfloor n-1}=n.$

(ii) $^nC_n=1.$

প্রমাণ। $\because\ ^nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$, $\therefore\ ^nC_n=\frac{\lfloor n}{\lfloor n\,\lfloor n-n}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n}=1.$

(iii) $^nP_r=\lfloor r\times{}^nC_r.$

প্রমাণ। $^nP_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}=\lfloor r\times\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}=\lfloor r\times{}^nC_r.$

(iv) $^nC_0=1.$

প্রমাণ। $r=0$ লিখিয়া পাই $^nC_0=\frac{\lfloor n}{\lfloor 0\,\lfloor n}=1.$

Complementary Combinations

23. n বিভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু একসঙ্গে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা এবং n বিভিন্ন বস্তু হইতে $(n-r)$ বস্তু একসঙ্গে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা সমান হয়।

[The number of combinations of n things taken r at a time is equal to the number of combinations of n things taken $(n-r)$ at a time.]

[প্রমাণ। (সূত্র প্রয়োগ না করিলে)]

n বিভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু তুলিয়া লইলে $(n-r)$ বস্তু পড়িয়া থাকে। অতএব, ঐ n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া নির্বাচন করিলে প্রত্যেক নির্বাচনের সঙ্গে সঙ্গে $(n-r)$ বস্তু পৃথক্ নির্বাচিত হইয়া পড়িয়া থাকে। অতএব, প্রথম প্রক্রিয়াটি যত প্রকারে করা যায়, দ্বিতীয় প্রক্রিয়াটিও ঠিক তত প্রকারেই করা যায়।

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

[সূত্র সাহায্যে প্রমাণ]

$$\because \quad {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \, \lfloor n-r} \quad \cdots\cdots(1)$$

$\therefore$ r এর স্থানে $(n-r)$ বসাইয়া পাই

$${}^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \, \lfloor n-(n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \, \lfloor r}.$$

অতএব, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

[দ্রষ্টব্য। এই সূত্রটি পূর্বের (1) নং সূত্রটি অপেক্ষা সুবিধাজনক। কারণ, ইহাতে সরল করার কার্য্যটি সহজ হইয়া থাকে। $(n-r)$ যদি r অপেক্ষা অনেক কম হয়, তবে ইহার প্রয়োগ করিবে।]

অনুসিদ্ধান্ত। (i) যদি ${}^nC_p = {}^nC_q$ হয়, তবে $p=q$, অথবা $p+q=n$ হইবে।

প্রমাণ। $\because$ n বস্তু হইতে একযোগে p বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, একযোগে q বস্তু লইলেও ততগুলি সমবায় হয়, $\therefore p=q$.

আবার, $\because$ ${}^nC_p={}^nC_{n-p}$ এবং $\because$ ${}^nC_p={}^nC_q$ (স্বীকার)

$\therefore$ ${}^nC_{n-p}={}^nC_q$, $\therefore$ $n-p=q$, $\therefore$ $p+q=n$.

(ii) $\because$ ${}^nC_{n-r}={}^nC_r$

$\therefore$ r এর স্থানে n বসাইয়া পাই

${}^nC_{n-n}={}^nC_n$ বা, ${}^nC_0={}^nC_n=1$.

24. প্রমাণ কর যে, ${}^nC_r+ C_{r-1}={}^{n+1}C_r$.

$(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায়ের সংখ্যা = উহাদের কোন একটি নির্দিষ্ট বস্তু যতগুলি সমবায়ে আছে + ঐ বস্তুটি যতগুলি সমবায়ে নাই।

এখানে বস্তুসংখ্যা $=n+1$ এবং একযোগে লইতে হইবে r বস্তু।

$\therefore$ নির্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে আছে তাহাদের সংখ্যা = অবশিষ্ট n বস্তু হইতে $(r-1)$ বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় $={}^nC_{r-1}$.

আবার, ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে নাই তাহাদের সংখ্যা

$=n$ বস্তু হইতে r বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় $={}^nC_r$.

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, ${}^{n+1}C_r={}^nC_{r-1}+{}^nC_r$.

[দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে আছে তাহা নির্ণয়ের সময় মনে কর $(n+1)$ বস্তু হইতে প্রথমেই সেই বস্তুটি লইলাম। তখন বাকি n বস্তু থাকিল এবং তাহা হইতে আর $(r-1)$ বস্তু লইতে হইবে। আগে নির্দিষ্ট বস্তুটি লওয়া হইয়াছে, সুতরাং আর $(r-1)$ বস্তু লইলেই মোট r বস্তু লওয়া হইবে।

আবার, যে সকল সমবায়ে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি নাই তাহা নির্ণয়ের জন্য মনে কর $(n+1)$ বস্তু হইতে ঐ বস্তুটি সরাইয়া রাখিলাম, কারণ উহাকে কখনও লইতে হইবে না। এখন বাকি থাকিল n সংখ্যক বস্তু উহা হইতে r বস্তু লইতে হইবে.]

[বিকল্প প্রমাণ]

$$^nC_r+{}^nC_{r-1}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-(r-1)}}$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r+1}}$$

এক্ষণে, $\because$ $\underline{|r}=r\ \underline{|r-1}$ এবং $\underline{|n-r+1}=(n-r+1)\ \underline{|n-r}$

$$\therefore\quad {}^nC_r+{}^nC_{r-1}=\frac{\underline{|n}}{r\ \underline{|r-1}\ \underline{|n-r}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\times(n-r+1)\ \underline{|n-r}}$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}}\left\{\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right\}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}}\times\frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$=\frac{(n+1)\ \underline{|n}}{r\ \underline{|r-1}.\ (n-r+1)\ \underline{|n-r}}=\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r+1}}={}^{n+1}C_r.$$

25. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া গঠিত যে সমবায়-গুলিতে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সতত থাকিবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

এখানে $r>p$ হইবেই। মনে কর, প্রথমে ঐ নির্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখা হইল। তখন আর থাকিল $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু। এক্ষণে, ঐ $(n-p)$ বস্তু হইতে একযোগে $(r-p)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সম্ভব সমবায় নির্ণয় করা হইল। এই সমবায়গুলিকে যদি পূর্বের পৃথক্ করা p বস্তুর সহিত যুক্ত করা যায়, তাহা হইলে যে সকল সমবায়ে ঐ p বস্তু সতত বিদ্যমান সেই সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে। অতএব $\because$ $(n-p)$ বস্তু হইতে একযোগে $(r-p)$ বস্তু লইয়া মোট সমবায় হয় ${}^{n-p}C_{r-p}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $={}^{n-p}C_{r-p}$.

26. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া নির্বাচিত যে সমবায়-গুলিতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

এখানেও $r > p$ হইবে। ঐ p সংখ্যক বস্তু কোন সমবায়ে থাকিবে না বলিয়া প্রথমে ঐ p বস্তুকে সরাইয়া রাখা হইল। এখন অবশিষ্ট $(n-p)$ বস্তু হইতে r সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া যে সমবায়গুলি হইবে সেইগুলিতে ঐ p বস্তু থাকিবে না। অতএব, এই সমবায়গুলির সংখ্যাই নির্ণেয় সংখ্যা হইবে।

∴ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{n-p}C_r$.

27. n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মোট সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the total number of combinations of n different things taken any number at a time.]

এখানে n সংখ্যক বস্তু হইতে নির্বাচন করা হইতেছে ; উহাদের প্রত্যেক বস্তুটি লইয়া দুই প্রকার প্রক্রিয়া সম্ভব। যথা, (i) ঐ বস্তুটি নির্বাচিত হইতে পারে, অথবা (ii) উহা পরিত্যক্ত হইতে পারে।

প্রদত্ত n বস্তুর প্রত্যেকটি সম্বন্ধে ঐ দুই প্রকার প্রক্রিয়া হইবে।

অতএব সমুদয় n বস্তুর মোট প্রক্রিয়া সংখ্যা

$= 2 \times 2 \times 2 \cdots\cdots$ n সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত অর্থাৎ 2^n.

এই 2^n সংখ্যক প্রক্রিয়ার মধ্যে কিন্তু একটি ক্ষেত্র এরূপ আছে যাহাতে সমুদয় n বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে।* কিন্তু একটিও বস্তু থাকিবে না এরূপ সমবায় হইতে পারে না। অতএব, ঐ প্রক্রিয়াটি ধরা চলিবে না।

∴ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= 2^n - 1$.

*দ্রষ্টব্য। (i) যে প্রক্রিয়ায় প্রথম বস্তুটি পরিত্যক্ত এবং যে প্রক্রিয়াটিতে দ্বিতীয় বস্তুটি পরিত্যক্ত হইয়াছে, এই দুই প্রকার প্রক্রিয়া যুক্ত হইলে সেই প্রক্রিয়ায় প্রথম ও দ্বিতীয় দুইটি বস্তুই থাকিবে না। আবার, ঐ প্রক্রিয়াটির সহিত যে প্রক্রিয়ায় তৃতীয় বস্তুটিও নাই তাহা একবার সংযুক্ত হইবে।

এইভাবে অন্য সবগুলি বস্তু সম্বন্ধেই হইবে। অতএব, ঐ 2^n সংখ্যক প্রক্রিয়ার মধ্যে একটি প্রক্রিয়া আছে, যেটিতে n বস্তুর কোনটিই নাই। অতএব, ঐ প্রক্রিয়াটি গ্রাহ্য হইবে না।

(ii) n বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছানুসারে একযোগে একটি, দুইটি, তিনটি,……, n-সংখ্যক বস্তু পর্য্যন্ত লওয়া যাইতে পারে [n বস্তু হইতে একটি বস্তু একযোগে লইলে সমবায় সংখ্যা হয় ${}^nC_1$, একযোগে 2টি বস্তু লইলে সমবায় হয় ${}^nC_2$,……ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সমবায় $= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n$.

অতএব, ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n = 2^n - 1$.]

28. $p+q+r+\cdots\cdots$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে একপ্রকার অভিন্ন বস্তু p-সংখ্যক, দ্বিতীয় প্রকার অভিন্ন বস্তু q-সংখ্যক, তৃতীয় প্রকার অভিন্ন বস্তু r-সংখ্যক, ইত্যাদি আছে। উহাদের যতগুলিকে ইচ্ছা একযোগে লইয়া মোট সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয়।

প্রথম প্রকারের p অভিন্ন বস্তু হইতে $(p+1)$ প্রকার নির্বাচন করা যায়; কারণ ঐ p বস্তু হইতে আমরা একযোগে 1, 2, 3……বা p বস্তু লইতে পারি (ইহাতে মোট p প্রকার নির্বাচন হয়), অথবা একটি প্রক্রিয়ায় উহাদের কোনটিই না লইতে পারি। অতএব, ঐ নির্বাচনটি ধরিয়া মোট $(p+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে।

অনুরূপে q অভিন্ন বস্তু হইতে $(q+1)$ প্রকার, r অভিন্ন বস্তু হইতে $(r+1)$ প্রকার, ইত্যাদি নির্বাচন হইবে।

এখন দেখ, প্রথম $(p+1)$ প্রকার নির্বাচনের প্রত্যেকটিকে দ্বিতীয় $(q+1)$ প্রকার নির্বাচনের সহিত যুক্ত করিলে p ও q বস্তু হইতে মোট $(p+1)(q+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। অনুরূপে p, q ও r বস্তু হইতে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। এইভাবে নির্বাচন সংখ্যা হইল $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$; কিন্তু ইহাদের মধ্যে এমন একটি নির্বাচন আছে যাহাতে সবগুলি বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে। ঐ নির্বাচনটি গ্রাহ্য হইবে না।

$\therefore$ মোট নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= \{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots\} - 1$.

Division into groups

29. $(m+n)$ বস্তুকে কত প্রকারে এরূপ দুইভাগে বিভক্ত করা যায়, যাহাতে একভাগে m বস্তু এবং অপরভাগে n বস্তু থাকে ?

[To find the number of ways in which $(m+n)$ things can be divided into two groups containing m and n things respectively.]

$(m+n)$ বস্তু হইতে একটি ভাগে যদি m বস্তু বাছিয়া লওয়া হয়, তবে অপর ভাগে n বস্তু থাকিয়া যায়।

[অনুরূপে যদি একভাগে n বস্তু বাছিয়া লওয়া হয়, তবে অপর ভাগটিতে অপর m বস্তু পড়িয়া থাকে।]

$(m+n)$ বস্তু হইতে m বস্তু যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় তাহার সংখ্যা $= {}^{m+n}C_m$. এক এক প্রকারে এই প্রথম ভাগটি নির্বাচনের সঙ্গে সঙ্গে অপর n বস্তু অবশিষ্ট থাকে এবং সেই n বস্তু হইতে একযোগে n বস্তু লইয়া অপর ভাগটি নির্বাচন করা যাইবে। ঐ নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^{n}C_n = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{m+n}C_m \times 1$

$$= \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor m+n-m} = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। (i) এখানে যদি $n=m$ হয়, তবে প্রত্যেক ভাগেই m বস্তু থাকায় ভাগগুলি সমান হইবে। এক্ষেত্রে কিন্তু পূর্বের ন্যায় প্রক্রিয়ার সংখ্যা $\frac{\lfloor m+m}{\lfloor m \lfloor m}$ হইবে না। কারণ, এখানে দুইটি ভাগেই m বস্তু থাকায় তাহারা অভিন্ন এবং ভাগগুলি (groups) অদল বদল করিলেও কোন পার্থক্য দৃষ্ট হয় না। অতএব, এরূপ ক্ষেত্রে যত প্রকার বিভাগ (sub-divisions) করা যায় তাহার সংখ্যা $= \frac{\lfloor m+m}{\lfloor m \lfloor m \lfloor 2} = \frac{\lfloor 2m}{\{\lfloor m\}^2 \lfloor 2}$.

কিন্তু যদি দুই ব্যক্তিকে $2m$ বস্তু সমানভাবে ভাগ করিয়া দিতে হয়, তবে তাহা $\dfrac{\underline{|m}}{(\underline{|m})^2}$ প্রকারে করা যাইবে।

(ii) যদি $(m+n+p)$ সংখ্যক বস্তু থাকে এবং সেইগুলিকে এরূপ তিন-ভাগে বিভক্ত করা হয় যাহাতে একভাগে m, একভাগে n এবং একটিতে p বস্তু থাকে, তবে ঐ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\dfrac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\,\underline{|n}\,\underline{|p}}$.

এখানে যদি $m=n=p$ হয়, তবে ঐ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\dfrac{\underline{|3m}}{\{\underline{|m}\}^3\,\underline{|3}}$.

যদি $3m$ বস্তু তিন জনকে সমভাবে ভাগ করিয়া দিতে হয়, তবে সেই প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\dfrac{\underline{|3m}}{\{\underline{|m}\}^3}$

(iii) Group-গুলির সংখ্যা যতই হউক না কেন, ঐ সিদ্ধান্তগুলি প্রযোজ্য হইবে।

30. যদি বিভিন্ন ভাগে ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থাকে, অর্থাৎ একটি ভাগে m ভিন্ন বস্তু, দ্বিতীয় ভাগে n ভিন্ন বস্তু, তৃতীয় ভাগে p ভিন্ন বস্তু, ইত্যাদি থাকে এবং যদি প্রথম ভাগ হইতে r বস্তু, দ্বিতীয় ভাগ হইতে q বস্তু, তৃতীয় ভাগ হইতে t বস্তু, ইত্যাদি লইয়া নির্বাচন করা হয়, তবে মোট সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots\cdots$.

প্রমাণ। প্রথম ভাগের m ভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু ${}^mC_r$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। তৎপরে দ্বিতীয় ভাগের n ভিন্ন বস্তু হইতে q বস্তু ${}^nC_q$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। $\therefore$ উভয় প্রক্রিয়া যুক্ত হইলে অর্থাৎ একযোগে সাধিত হইলে সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^mC_r \times {}^nC_q$. এই প্রক্রিয়া সাধিত হইবার পর তৃতীয় ভাগের p ভিন্ন বস্তু হইতে t বস্তু ${}^pC_t$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

∴ তিনটি প্রক্রিয়া একযোগে অনুষ্ঠিত হইলে মোট সমবায় সংখ্যা হয় ${}^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t$. এইভাবে যত ইচ্ছা ভাগ থাকিলে, সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots\cdots$.

[দ্রষ্টব্য। এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা কত হয় দেখ। প্রথম তিনটি প্রক্রিয়া সাধিত হইবার পর এক এক সমবায়ে $(r+q+t)$ সংখ্যক ভিন্ন বস্তু আছে। এইগুলিকে পরস্পরের মধ্যে $\underline{|r+q+t}$ প্রকারে সাজান যায়। অতএব, সবগুলি সমবায় হইতে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে ${}^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \underline{|r+q+t}$. ভাগের সংখ্যা আরও বেশী থাকিলে সাধারণভাবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয়

$${}^mC_r \times {}^nC_q \times {}^pC_t \times \cdots\cdots \times \underline{|r+q+t\cdots\cdots}\text{ ।}$$

Greatest value of ${}^nC_r$.

31. r এর মান কত হইলে n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা সর্বাপেক্ষা অধিক হইবে ?

[For a given value of n, what value of r will make ${}^nC_r$ greatest ?]

আমরা পাইয়াছি ${}^nC_r = \dfrac{n-r+1}{r} \times {}^nC_{r-1}$;

অতএব, ${}^nC_r >, =,$ অথবা, $< {}^nC_{r-1}$ হইবে,

যদি $\dfrac{n-r+1}{r} > =$ অথবা < 1 হয়,

অর্থাৎ যদি $n-r+1 > =$ অথবা $< r$ হয়,

„ যদি $n+1 > =$ অথবা $< 2r$ হয়,

„ যদি $r < =$ অথবা $> \dfrac{n+1}{2}$ হয়।

এখানে r এর মান কেবলমাত্র অখণ্ড ধনসংখ্যা হইবে।

(i) এক্ষণে যদি n জোড় সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি ভগ্নাংশ হইবে, কারণ তখন $(n+1)$ বিজোড়। অতএব, এস্থলে r এর সর্বাধিক মান $\frac{n}{2}$ হইতে পারে। কারণ, r এর মান $\frac{n}{2}$ অপেক্ষা যদি ন্যূনপক্ষে 1 অধিক হয়, তবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ সংখ্যাটি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা অর্থাৎ $\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$ অপেক্ষা বড় হইয়া যাইবে, সুতরাং ${}^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ${}^nC_r$ ছোট হইয়া পড়িবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{n}{2}$ হয়।

(ii) যদি n বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা হইবে। অতএব, এস্থলে $r=\frac{n+1}{2}$ হইলে ${}^nC_r={}^nC_{r-1}$ হইবে, এবং r এর মান যদি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষ ন্যূনপক্ষে 1 বেশী হয়, তবে ${}^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ${}^nC_r$ ছোট হইয়া পড়িবে।

অতএব, এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যদি $r=\frac{n+1}{2}$ অথবা $\frac{n-1}{2}$ হয়; কারণ, উভয় পক্ষেই একই ফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণমালা 4

উদা. 1. Find the values of :

(i) ${}^7C_3$, (ii) ${}^8C_4\times\lfloor 5$, (iii) $\frac{16!}{14!\lfloor 2}$.

(i) $${}^7C_3=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\lfloor 7-3}=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 3\lfloor 4}=\frac{7.6.5.\lfloor 4}{\lfloor 3\lfloor 4}=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35.$$

(ii) $${}^8C_4\times\lfloor 5=\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}\times\lfloor 5=70\times\lfloor 5=70\times 120=8400.$$

(iii) $$\frac{16!}{14!\lfloor 2}=\frac{16\times 15\times\lfloor 14}{\lfloor 14\times 2\times 1}=120.$$

উদা. 2.　If ${}^{n}C_4 = 21 \times {}^{\frac{n}{2}}C_3$, find n.

$${}^{n}C_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1},$$

এবং $21 \times {}^{\frac{n}{2}}C_3 = 21 \times \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)}{3 \times 2 \times 1} = 21 \times \frac{n(n-2)(n-4)}{8 \times 3 \times 2 \times 1}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{21 \times n(n-2)(n-4)}{8 \times 3 \times 2 \times 1},$$

বা, $(n-1)(n-3) = \frac{21}{2}(n-4)$,

বা, $2n^2 - 8n + 6 = 21n - 84$,　বা, $2n^2 - 29n + 90 = 0$,

বা, $(n-10)(2n-9) = 0$,　বা, $n = 10, \frac{9}{2}$

$\therefore$ n এর নির্ণেয় মান $= 10$,　($\because$ অপর ভগ্নাংশ মানটি গ্রাহ্য নহে)।

উদা. 3.　If ${}^{n}C_{10} = {}^{n}C_8$ find ${}^{n}C_{16}$.

$\therefore$ ${}^{n}C_{10} = {}^{n}C_8$,　$\because$ $n = 10 + 8 = 18$,

$\therefore$ ${}^{n}C_{16} = {}^{18}C_{16} = {}^{18}C_2 = \frac{18 \times 17}{2 \times 1} = 153$.

উদা. 4.　How many committees each consisting of 6 members can be formed from 9 men ?

এখানে 9 জন ব্যক্তির মধ্যে একযোগে 6 জনকে যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় ততগুলি কমিটি হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় কমিটি সংখ্যা $= {}^{9}C_6 = {}^{9}C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$.

উদা. 5.　How many words can be made taking 3 consonants and 2 vowels out of 13 consonants and 4 vowels ?

13টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে একযোগে 3টি করিয়া নির্বাচন করা হইতেছে, সুতরাং সমবায় সংখ্যা $= {}^{13}C_3$.

4টি স্বরবর্ণ হইতে একযোগে 2টি করিয়া নির্বাচন করিলে সমবায় সংখ্যা হয় ${}^{4}C_2$.

অতএব, দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে করিলে মোট সমবায় সংখ্যা

$$= {}^{13}C_3 \times {}^4C_2.$$

এক্ষণে, প্রত্যেক সমবায়ে 5টি করিয়া অক্ষর (3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ) আছে। উহাদিগকে বিভিন্ন ভাবে সাজাইলে প্রত্যেকবার একটি করিয়া নূতন শব্দ (word) পাওয়া যাইবে। ঐ 5টি অক্ষরের বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 5 = 120$.

∴ মোট শব্দ সংখ্যা $= {}^{13}C_3 \times {}^4C_2 \times 120$

$$= \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 120 = 205920.$$

[দ্রষ্টব্য। **শব্দ ও সংখ্যা গঠন** প্রশ্নে সর্বদাই নির্বাচনের পর বিন্যাসের প্রশ্ন উঠে। অতএব, প্রথমে কতগুলি সমবায় হয় তাহা নির্ণয় করিয়া পরে প্রত্যেক সমবায়ের অন্তর্গত অক্ষর বা অঙ্কগুলিকে বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে কতগুলি বিন্যাস হয় দেখিতে হইবে। আর **কমিটি গঠন** ইত্যাদি প্রশ্ন সমাধানে কেবল মাত্র নির্বাচন করিলেই অর্থাৎ সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করিলেই হইবে। কারণ, কমিটিতে নির্বাচিত ব্যক্তিগণ যে ভাবেই আসন গ্রহণ করুন না কেন, তাহাতে কমিটি একই থাকে, ভিন্ন কমিটি হয় না। উদা. 3 এবং উদা. 4 এর পার্থক্য বুঝিয়া দেখ]।

উদা. 6. From 12 things in how many ways can a selection of 4 be made (i) when one particular thing is always included and (ii) when a particular thing is always excluded?

(i) ∵ একটি নির্দিষ্ট বস্তুকে প্রত্যেক নির্বাচনেই লইতে হইবে।

∴ বাকি 11টি বস্তু হইতে আর কেবল 3টি করিয়া বস্তু নির্বাচন করিতে হইবে। এই নির্বাচন করা যায় ${}^{11}C_3$ প্রকারে।

∴ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$.

(ii) এক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট বস্তুকে কোন নির্বাচনেই লওয়া হইবে না। অতএব, উহা যেন নাই মনে করিয়া বাকি 11টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি করিয়া বস্তু নির্বাচন করিতে হইবে, এবং ইহা ${}^{11}C_4$ প্রকারে করা যায়।

∴ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^{11}C_4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$.

উদা. 7. From 7 gentlemen and 4 ladies a committee of 5 is to be formed. In how many ways can this be done to include at least one lady? [C. U. '48]

∵ কমিটিতে মোট 5 জন ব্যক্তির মধ্যে অন্ততঃ 1 জন মহিলা থাকিবে,

∴ ঐ কমিটি নিম্নলিখিতভাবে গঠিত হইতে পারে :—

(a) একজন মহিলা ও বাকি 4 জন পুরুষ লইয়া,

(b) দুই জন মহিলা ও 3 জন পুরুষ লইয়া,

(c) তিন জন মহিলা ও 2 জন পুরুষ লইয়া,

অথবা, (d) 4 জন মহিলা ও 1 জন পুরুষ লইয়া।

(a) এই ক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 1 জনকে এবং 7 জন পুরুষের মধ্যে 4 জনকে বাছিয়া লইতে হইবে।

∴ সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_1 \times {}^7C_4 = {}^4C_1 \times {}^7C_3 = 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 140.$

(b) এই ক্ষেত্রে 4 জন মহিলার মধ্যে 2 জনকে এবং 7 জন পুরুষের মধ্যে 3 জনকে বাছিয়া লইতে হইবে।

সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_2 \times {}^7C_3 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 210.$

(c) অনুরূপে, এই ক্ষেত্রে সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^7C_2 = {}^4C_1 \times {}^7C_2$

$= 4 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 84.$

এবং (d) এই ক্ষেত্রে সমবায় সংখ্যা $= {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 1 \times 7 = 7$

∴ নির্ণেয় মোট কমিটির সংখ্যা $= 140 + 210 + 84 + 7 = 441.$

উদা. 8. How many words can be formed taking 2 consonants and one vowel out of 7 consonants and 3 vowels so that the vowel is always between the consonants? [C. U. '22]

এখানে 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে 2টি করিয়া একযোগে লইয়া বিন্যস্ত করিলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয় ${}^7P_2$ বা 42টি।

আবার, এক একটি বিন্যাসে যে দুইটি করিয়া ব্যঞ্জনবর্ণ আছে, তাহার মধ্যস্থলে 3টি স্বরবর্ণের মধ্যে যে-কোন একটি বসাইলে এক একটি শব্দ হইবে।

∴ প্রত্যেক বিন্যাস হইতে 3টি করিয়া শব্দ পাওয়া যাইবে।

∴ মোট নির্ণেয় শব্দসংখ্যা $= 42 \times 3 = 126.$

উদা. 9. How many different triangles can be formed by joining the angular points of a polygon of 14 sides? Find also the number of the diagonals of the polygon.

বহুভুজটির 14টি বাহু থাকায় উহার কৌণিক বিন্দুও 14টি আছে। ঐ 14টি বিন্দুর মধ্যে যে কোন 3টি বিন্দু যোগ করিলে এক একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

অতএব, 14টি বিন্দু হইতে 3টি বিন্দু যত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, ততগুলি ত্রিভুজ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা $= {}^{14}C_3 = \dfrac{14.13.12}{3.2.1} = 364.$

আবার, ঐ বিন্দুর যে কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিলে এক একটি সরল-রেখা হয়।

$\therefore$ মোট সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{14}C_2 = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = 91$;

এই 91টি সরলরেখার মধ্যে ঐ বহুভুজের 14টি বাহুও ধরা আছে, কিন্তু ঐ বাহুগুলি উহার কর্ণ হইতে পারে না।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা $= 91 - 14 = 77.$

উদা. 10. A boy is required to answer 8 questions out of 2 groups, each group containing 7 questions, and he is not permitted to attempt more than 5 questions from any group. In how many different ways can he choose them?

মনে কর, G_1 ও G_2 এই দুইটি বিভাগের (groups) প্রত্যেকটিতে 7টি প্রশ্ন আছে। বালকটিকে মোট 8টি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে এবং কোন বিভাগ হইতে 5টির অধিক প্রশ্নের উত্তর করা চলিবে না।

অতএব, বালকটি (1) G_1 বিভাগ হইতে 3টি ও G_2 বিভাগ হইতে 5টি, অথবা (2) G_1 হইতে 4টি ও G_2 হইতে 4টি অথবা (3) G_1 হইতে 5টি ও G_2 হইতে 3টি, কেবল এইভাবে প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে।

(1) হইতে নির্বাচন সংখ্যা $= {}^7C_3 \times {}^7C_5 = {}^7C_3 \times {}^7C_2$

$$= \frac{7.6.5}{3.2.1} \times \frac{7.6}{2.1} = 735,$$

(2) „ „ „ $= {}^7C_4 \times {}^7C_4 = {}^7C_3 \times {}^7C_3$

$$= \frac{7.6.5}{3.2.1} \times \frac{7.6.5}{3.2.1} = 1225,$$

(3) „ „ „ $= {}^7C_5 \times {}^7C_3 = 735.$

∴ নির্ণেয় মোট নির্বাচন সংখ্যা $= 735 + 1225 + 735 = 2695.$

উদা. 11. In a group of 15 boys there are 7 boy-scouts. In how many ways can 12 boys be selected so as to include (i) exactly six boy-scouts, (ii) at least 6 boy-scouts?

[C. U. '43]

এখানে 15 জন বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট এবং 8 জন অপর বালক আছে।

(i) প্রথম পক্ষে 6 জন স্কাউটকে লইতেই হইবে, সুতরাং বাকি 6 জন অন্য বালক লইলে মোট 12 জন হইবে। 7 জন স্কাউট হইতে 6 জন করিয়া লইলে সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^7C_6$, এবং 8 জন অন্য বালক হইতে 6 জন করিয়া লইলে সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^8C_6$.

∴ মোট নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^7C_6 \times {}^8C_6 = {}^7C_1 \times {}^8C_2$

$$= 7 \times \frac{8 \times 7}{2.1} = 196.$$

(ii) দ্বিতীয় পক্ষে স্কাউটের সংখ্যা 6 জনের কম হইবে না।

অতএব, এক্ষেত্রে (*a*) হয় 6টি স্কাউট ও 6টি অন্য বালক, অথবা (*b*) 7টি স্কাউট ও 5টি অন্য বালক এই ভাবে নির্বাচন হওয়া সম্ভব।

(*a*) 7 জনের মধ্যে 6টি স্কাউট ${}^7C_6$ প্রকারে এবং 8 জন অপর বালকের মধ্যে 6 জন ${}^8C_6$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

(*b*) 7 জন স্কাউট ${}^7C_7$ প্রকারে এবং 5 জন বালক ${}^8C_5$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ মোট নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^7C_6 \times {}^8C_6 + {}^7C_7 \times {}^8C_5$
$= {}^7C_1 \times {}^8C_2 + {}^7C_7 \times {}^8C_3 = 7 \times \frac{8\times7}{2\times1} + 1 \times \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$
$= 196 + 56 = 252.$

উদা. 12. A man has 5 friends, in how many ways may he invite one or more of them to a feast ?

5 জন বন্ধুর মধ্যে একজন করিয়া, অথবা 2 জন করিয়া, অথবা 3 জন বা 4 জন বা 5 জন করিয়া নিমন্ত্রণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5$
$= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31.$

[**অন্য প্রণালী**] 5 জন বন্ধুর মধ্যে ইচ্ছামত কতকগুলিকে বা সকলকে নিমন্ত্রণ করা যায়। $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 2^5 - 1 = 31.$

উদা. 13. In how many ways can 6 pens be equally divided among 3 boys.

মনে কর x, y, z তিনজন বালক। এখানে প্রত্যেক বালক 2টি করিয়া কলম পাইবে।

এক্ষণে, আমরা 6টি কলম হইতে xএর জন্য 2টি কলম ${}^6C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিতে পারি। প্রত্যেক ক্ষেত্রে বাকী থাকে 4টি কলম। ঐ 4টি কলম হইতে yএর জন্য 2টি কলম আমরা ${}^4C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিতে পারি। x ও yএর জন্য নির্বাচন করার পর যে দুইটি কলম বাকী তাহা zকে দেওয়া হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সখ্যা $= {}^6C_2 \times {}^4C_2 = \frac{6.5}{2.1} \times \frac{4.3}{2.1} = 90.$

উদা. 14. In how many ways can 12 things be divided in three groups of 3, 4 and 5 things respectively ?

12টি বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া ${}^{12}C_3$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। 3টি বস্তু নির্বাচিত হইলে বাকী থাকে 9টি বস্তু, ঐগুলি হইতে 4টি করিয়া নির্বাচন

করা যায় ${}^{9}C_4$ প্রকারে। এই নির্বাচনের পর অবশিষ্ট থাকে 5টি বস্তু, সুতরাং 5টি বস্তু হইতে 5টি করিয়া বস্তু লইয়া নির্বাচন করা যায় ${}^{5}C_5$ প্রকারে।

অতএব, নির্ণেয় বিভাগ সংখ্যা $= {}^{12}C_3 \times {}^{9}C_4 \times {}^{5}C_5$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 1 = 27720$$

[সংক্ষেপে সূত্র অনুসারে, নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{\lfloor 12}{\lfloor 3 \lfloor 4 \lfloor 5} = 27720.$]

উদা. 15. How many different factors may 1155 have ?

1155 এর 3, 5, 7, 11 এই চারিটি মৌলিক উৎপাদক। এই চারিটি উৎপাদকের প্রত্যেকটি সম্বন্ধে দুইটি প্রক্রিয়া হইবে (উহাকে লওয়া অথবা না লওয়া)। আর, এই চারিটি উৎপাদকের মধ্যে একযোগে এক বা একাধিক উৎপাদক লওয়া যাইবে। কারণ, ঐ মৌলিক উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটি এবং উহাদের একাধিকের গুণফলগুলিও প্রদত্ত সংখ্যাটির উৎপাদক।

$\therefore$ যে ক্ষেত্রে ঐ চারিটি উৎপাদকের কোনটিই থাকিবে না সেই ক্ষেত্রটি ত্যাগ করিয়া মোট নির্ণেয় উৎপাদক সংখ্যা $= 2^4 - 1 = 15.$

[**অন্য প্রকারে**] ঐ চারিটি মৌলিক উৎপাদকের একটিকে বা একাধিককে যত বিভিন্ন প্রকারে নির্বাচন করা যায় সংখ্যাটির ততগুলি উৎপাদক হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক সংখ্যা $= {}^{4}C_1 + {}^{4}C_2 + {}^{4}C_3 + {}^{4}C_4 = 15.$]

উদা. 16. A man has 4 sovereigns, 3 guineas and 5 shillings. In how many ways can he subscribe to a poor fund ?

এখানে 4টি সভারিণ এক প্রকারের মুদ্রা, গিনি 3টি দ্বিতীয় অন্য এক প্রকারের মুদ্রা এবং 5টি শিলিং তৃতীয় এক প্রকারের মুদ্রা।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= (4+1)(3+1)(5+1) - 1 = 119.$

উদা. 17 In how many ways can a crew of 8 be arranged if 2 of them can only row on stroke side and 1 only on the bow side ?

মনে কর, x ও y নামক দুইজন মাঝি কেবল stroke sideএ এবং z নামক মাঝি কেবল bow sideএ কাজ করিতে পারে, সুতরাং বাকী 5 জন মাঝি উভয় দিকেই কাজ করিতে পারে।

এক্ষেত্রে প্রত্যেক দিকে 4 জন করিয়া মাঝি থাকিতে হইবে। অতএব, যে পার্শ্বে x ও y আছে তাহাদের দিকে দুইদিকেই কার্যক্রম 5 জনের যে কোন 2 জনকে দিতে হইবে। ইহা করা যায় $^5C_2$ অর্থাৎ 10 প্রকারে। এই 10 প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারের পক্ষে x ও yএর দিকে যে 4 জন মাঝি হইল তাহাদিগকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor 4$ প্রকারে সাজান যায়। অনুরূপে অপর পার্শ্বের 4 জনকেও $\lfloor 4$ প্রকারে সাজান যায়। অতএব, এক পার্শ্বের প্রত্যেক প্রকারের সহিত অপর পার্শ্বের প্রত্যেক প্রকার সংযুক্ত করিলে মাঝিদিগকে মোট $\lfloor 4 \times \lfloor 4$ প্রকারে সাজান যাইবে।

অতএব, পূর্বোক্ত 10 প্রকারের পক্ষে অর্থাৎ মোটের উপর $10 \times \lfloor 4 \times \lfloor 4$ প্রকারে অর্থাৎ 5760 প্রকারে মাঝিদিগকে সাজান যাইবে।

উদা. 18. Find the number of ways in which (a) a selection (b) an arrangement of 4 letters can be made, from the letters of the word '*successive*'.

(a) প্রদত্ত শব্দটিতে 6 প্রকারের 10টি অক্ষর আছে; যথা. (s, s, s) (c, c), (e, e), u, v, i.

চারিটি করিয়া অক্ষর লইয়া নির্বাচনের জন্য উহাদিগকে 4 শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়। যথা—

(1) তিনটি অক্ষর একই প্রকার একটি ভিন্ন প্রকার,

(2) দুইটি একই প্রকার অক্ষর, দুইটি অন্য একই প্রকার অক্ষর,

(3) দুইটি একই প্রকার অক্ষর, অপর দুইটি বিভিন্ন অক্ষর,

(4) চারিটি অক্ষরই বিভিন্ন প্রকার।

এক্ষণে, (1) প্রথম পক্ষে 5টি নির্বাচন হইতে পারে। কারণ, এস্থলে c, i, u, v, e এই 5টি ভিন্ন অক্ষরের যে কোন একটির সহিত তিনটি একই প্রকার অক্ষর s লইয়া 4 অক্ষরের নির্বাচন হইতে পারে।

∴ নির্বাচন সংখ্যা $=5$.

(2) দ্বিতীয় পক্ষে, (s, s), (c, c) ও (e, e) এই তিন জোড়া অক্ষর হইতে একযোগে দুই জোড়া নির্বাচন করিতে হইবে।

∴ নির্বাচন সংখ্যা $= {}^3C_2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$.

(3) তৃতীয় পক্ষে, তিন জোড়া অক্ষরের মধ্যে একজোড়া এবং অবশিষ্ট 5 প্রকার বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে যে কোন বিভিন্ন 2টি অক্ষর লইয়া নির্বাচন করিতে হইবে। ∴ নির্বাচন সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^5C_2 = 30$.

(4) চতুর্থ পক্ষে, s, c, i, u v, e এই ছয়টি বিভিন্ন অক্ষর হইতে যে কোন 4টি লইয়া নির্বাচন করিতে হইবে।

∴ নির্বাচন সংখ্যা $= {}^6C_4 = {}^6C_2 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$.

∴ মোট নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= 5 + 3 + 30 + 15 = 53$.

(b) আবার, মোট বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য উপরের 4 শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি নির্বাচনের 4টি অক্ষরকে যত প্রকারে সম্ভব বিন্যস্ত করিতে হইবে।

অতএব, (1) হইতে বিন্যাস সংখ্যা $= 5 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 3} = 20$,

(2) „ „ „ $= 3 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 18$

(∵ 4 অক্ষরের মধ্যে 2টি একরূপ, অন্য 2টি একরূপ)

(3) „ „ „ $= 30 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 360$

(4) „ „ „ $= 15 \times \lfloor 4 = 360$

∴ মোট নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 20 + 18 + 360 + 360 = 758$.

Exercise 4

1. Find the numerical values of :

(i) ${}^{6}C_2$ (ii) ${}^{10}C_7$ (iii) ${}^{30}C_{28}$ (iv) $\dfrac{18\,!}{16\,!\,\lfloor 3}$.

2. Find n, if ${}^{30}C_{n+5} = {}^{30}C_{n-3}$.

3. (i) Find r, if $2 \times {}^{r}C_4 = 35 \times {}^{\frac{r}{2}}C_3$.

(ii) If ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_8$, find ${}^{23}C_n$.

(iii) If $m = {}^{n}C_2$, show that ${}^{m}C_2 = 3.\,{}^{n+1}C_4$. [C.U.'12]

4. If ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$, find r. [C. U. '30]

5. How many different selections can be made of 5 members out of 8 ?

6. Out of 9 Swarajists and 5 Ministerialists how many different committees can be formed, each consisting of 6 Swarajists and 2 Ministerialists ? [C. U. '31]

7. From 6 gentlemen and 4 ladies, a committee of 5 is to be formed. In how many ways can this be done so as to include at least one lady ? [C. U. '37]

8. In a Municipal Corporation there are 20 Councillors and 8 Aldermen. How many committees can be formed consisting of 5 Councillors and 3 Aldermen ? [C. U. '33]

9. How many words of 2 vowels and 3 consonants can be formed from an alphabet of 5 vowels and 17 consonants, the letters of the word being all different ? [C. U. '32]

10. A basket contains 10 mangoes. Find how many different selections you can make of 3 mangoes so as to always include a particular mango. [C. U. '21]

11. From a company of 15 men how many selections of 9 men can be made so as to exclude three particular men ? [C. U. '54]

12. A committee of 6 is to be made from 7 teachers and 4 students. In how many ways can this be done, (i) if the committee contains exactly 2 students (ii) at least 2 students?

13. A candidate is required to answer 6 out of 10 questions which are divided into 2 groups, each containing 5 questions and he is not permitted to attempt more than 4 from any group. In how many different ways can he make his choice? [C. U. '32]

14. At an election there are 5 candidates and 3 members are to be elected and a voter is entitled to vote for any number of candidates not greater than the number to be elected. In how many ways may a voter choose a vote? [C. U. '35]

15 How many different triangles can be formed by joining the angular points of a hexagon? Find also the number of the diagonals of the hexagon.

16. There are 16 points in a plane, no three of which are in the same straight line. Find the number of straight lines which can be formed by joining them. [C. U. 1909]

17. There are 10 points in a plane, 4 of which are collinear. Find the number of (i) straight lines, (ii) of triangles which result from joining them.

18. There are n points in a plane of which no three are in a straight line except m, which are all in a straight line. Find the number of (i) different straight lines; (ii) different triangles formed by joining the points. [C. U. 1928]

19. A certain council consists of a chairman, two vice-chairmen and 12 other members. How many different committees consisting of 6 can be formed including always the chairman and only one vice-chairman? [C. U. '14]

20. If ${}^nC_r = 20$ and ${}^nP_r = 120$, find n and r.

21. A man has 6 friends; in how many ways may he invite one or more of them to dinner? [C. U. '50]

22. A cricket team consisting of 11 players is to be selected from two groups consisting of 6 and 8 players respectively. In how many ways can the selection be made on the supposition that the group of six shall contribute no fewer than 4 players? [C. U. '38]

23. Find (i) the number of different straight lines that can be had by joining 15 different points on a plane, no three of which are collinear excepting 4 points which are collinear; find also (ii) the number of triangles formed by joining them.

24. I have a money bag containing a rupee, an eight-anna piece, a four-anna piece and a two-anna piece. In how many ways is it possible for me to contribute a sum to a relief fund?

25. How many combinations can be formed of eight counters marked 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 taking them 4 at a time, there being at least one odd and one even in each combination? [C. U. '41]

26. In how many ways can 22 people be divided into 2 cricket teams to play against each other in a friendly game? [C. U. '50]

27. Given n points in space, no three of which are collinear and no four of which are co-planar. For what value of n will the number of st. lines be equal to the number of planes obtained by connecting these points?

28. In how many ways can one or more of 8 patients be sent to a hospital?

29. In how many ways can 12 things be equally divided among 4 persons? [P. U. '46]

30. Find the numper of ways in which p positive signs and n negative signs may be placed in a row so that no two negative signs shall be together, given $p+1 \geq n$.

31. How many different factors can 2310 have ?

32. I invite 8 friends to a party and place 4 at one round table and 4 at another. In how many ways can I arrange the friends ?

33. There are 7 gentlemen and 3 ladies contesting for 2 vacancies; an elector can vote for any number of candidates not exceeding the number of vacancies. In how many ways is it possible to vote ? [P. U. '43]

34. If the total number of combinations of $4n$ different things : the total number of combinations of $2n$ different things $=257 : 1$, find n.

35. Show that the greatest value of ${}^{2p}C_q$: the greatest value of ${}^{2p-1}C_q = 2 : 1$.

36. In how many ways can 68 cards de divided (i) into four sets of 17 each, (ii) equally among four players ?

37. In how many ways can 9 things be divided in three groups of 2, 3, 4 things respectively ?

38. In how may ways can 12 differnt things be divided into four groups of 3 each ?

39. Find the number of (i) combinations, (ii) of permutations that can be made from the letters of word *impression*, taken 4 at a time.

40. A boat's crew consists of 12 men, 4 of whom can only row on one side and 2 only on the other side. In how many ways can the crew be arranged ?

41. Show that in $\binom{2n}{n}(={}^{2n}C_n)$, the number of combinations in which a particular thing occurs is equal to the number of combinations in which a particular thing does not occur.

42. Find the number of (i) selections and (ii) arrangements that can be made taking 4 letters from the word '*alliteration*' ? [C. U. 1887]

43. Prove that the total number of selections that can be made out of the letters 'daddy did a deadly deed' is 1919. [B. U. '10]

44. Show that the number of all possible selections of one or more questions from eight given questions, each question having an alternative, is 3^8-1. [C. U. 1928]

45. At an election three districts are to be canvassed by 12, 16 and 23 men respectively. If 51 men volunteer, in how many ways can they be allotted to the different districts ?

46. There are 4 boys of class IX, 3 of class X and 2 of class XI. Find the total number of selections that can be made with them so that no two of the same class may be included in any selection.

47. Find the number of different ways of dividing pr things into r equal groups.

48. From 3 mangoes, 4 oranges and 2 apples, how many selections of fruit can be made, taking at least one of each kind ? [Here fruits of the same kind are of different shapes.]

49. In how many ways can five things be divided between two boys ?

Binomial Theorem (দ্বিপদ উপপাদ্য)

32. দ্বিপদ রাশি (Binomial expression)। যে রাশিতে মাত্র দুইটি পদ (term) থাকে, তাহাকে **দ্বিপদ রাশি** বলা হয়। যথা, $(x+a)$, $(3a+4b)$ ইত্যাদি।

দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)। যে বীজগণিতীয় সাধারণ সূত্র (formula) সাহায্যে কোন দ্বিপদ রাশির যে-কোন ঘাতকে (power) একটি শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায় (অর্থাৎ কোন দ্বিপদ রাশির যে কোন ঘাতের বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায়) তাহাকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** বলে।

এই উপপাদ্যটি Sir Isaac Newton উদ্ভাবন করেন।

33. $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, $(x+d)$ এই দ্বিপদ রাশি চারিটি ক্রমিক গুণ করিয়া পাওয়া যায় :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

এস্থলে গুণফল হইতে দেখা যাইতেছে যে—

(i) উহার প্রথম পদ x^4 পাওয়া গিয়াছে চারিটি প্রদত্ত উৎপাদক হইতে x অক্ষর চারিটির গুণফল লইয়া (ইহাতে a, b, c, d-র কোনটি লওয়া হয় নাই),

(ii) দ্বিতীয় পদটি গঠিত করা যায়, যে-কোন তিনটি উৎপাদক হইতে x যত প্রকারে লওয়া যায় তত প্রকারে লইয়া এবং তৎসঙ্গে অবশিষ্ট উৎপাদকটি হইতে a, b, c, d অক্ষরের যে-কোন একটি লইয়া,

(iii) তৃতীয় পদটি গঠিত হইয়াছে, যে-কোন দুইটি উৎপাদক হইতে x সম্ভাব্য সকল প্রকারে লইয়া এবং তৎসঙ্গে অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির a, b, c, d হইতে যে-কোন দুইটি অক্ষর একযোগে লইয়া,

(iv) চতুর্থ পদটি পাওয়া গিয়াছে, যে-কোন একটি উৎপাদক হইতে x অক্ষর লইয়া এবং তৎসঙ্গে অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির a, b, c, d হইতে যে-কোন তিনটি অক্ষর একযোগে লইয়া,

(v) শেষ পদটি পাওয়া গিয়াছে a, b, c, d-র গুণফল লইয়া।

এখন যদি ঐ উৎপাদকগুলিতে $a=b=c=d$ ধরা হয়, তবে আমরা পাই $(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

সাধারণতঃ দ্বিপদ উপপাদ্যটি প্রমাণ করিবার জন্য এই প্রণালীটি অবলম্বন করা হয়।

Binomial Theorem for a Positive Integral Index

(ধনাত্মক অখণ্ড সূচক পক্ষে দ্বিপদ উপপাদ্য)

34. n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

অথবা, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\cdots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\cdots+x^n \cdots (1)$$

$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n\cdots(2).$$

আমরা জানি $(a+x)^n=(a+x)(a+x)\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত।

ডানপক্ষের n সংখ্যক উৎপাদকের ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেক পদটি পাওয়া যাইবে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে এক-একটি অক্ষর লইয়া এবং সেই n সংখ্যক অক্ষর গুণ করিয়া, সুতরাং প্রত্যেক পদটি n-মাত্রিক হইবে অর্থাৎ প্রত্যেক পদে a ও x এর ঘাতের সমষ্টি n হইবে।

প্রথম পদে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে কেবল a লওয়া হইল (x লওয়া হইল না), ইহাতে n সংখ্যক a হইল। উহাদের গুণফল হইল a^n, সুতরাং প্রথম পদ হইল a^n.

অনুরূপে শেষ পদে n সংখ্যক উৎপাদক হইতে কেবল x অক্ষরগুলি লওয়া হইল (সুতরাং একটিও a লওয়া হয় নাই)। n সংখ্যক x-এর গুণফল হয় x^n, সুতরাং শেষ পদ হইল x^n.

দ্বিতীয় পদ-ও মোট n সংখ্যক অক্ষরের গুণফল হইবে।

এখন দ্বিতীয় পদে a একবার কমাইয়া লইয়া $(n-1)$ সংখ্যক a লওয়া হইল। ইহাতে a-র ঘাত হইল a^{n-1}, ইহার সহিত n সংখ্যক x হইতে একটি করিয়া x লইতে হইবে। এই নির্বাচন যত প্রকারে করা যায় তাহাই হইবে দ্বিতীয় পদের সহগ। $\therefore$ দ্বিতীয় পদের সহগ হইল ${}^nC_1$ বা n, সুতরাং দ্বিতীয় পদটি হইল ${}^nC_1a^{n-1}x$ বা $na^{n-1}x$.

তৃতীয় পদে a-র আরও একটি কমাইয়া $(n-2)$ সংখ্যক a লওয়া হইল, সুতরাং মোট অক্ষরসংখ্যা n করিবার জন্য n সংখ্যক x হইতে যত প্রকারে সম্ভব দুইটি করিয়া x লইতে হইবে। এই নির্বাচন করা যায় ${}^nC_2$ বা $\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}$ প্রকারে। $\therefore$ তৃতীয় পদ হইল ${}^nC_2a^{n-2}x^2$ বা $\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}x^2$.

এইভাবে দেখা যায়, যে-কোন একটি সাধারণ পদে যদি $(n-r)$ সংখ্যক a লওয়া যায়, তবে তাহার সহিত r সংখ্যক x লইলে তবে n সংখ্যক অক্ষর হইবে। n সংখ্যক x হইতে একযোগে r সংখ্যক x নির্বাচন করা যায় ${}^nC_r$ প্রকারে।

অতএব, যে-কোন সাধারণ পদের আকার হইল ${}^nC_ra^{n-r}x^r$.

অতএব, এই সাধারণ পদে r এর মান পরপর 0, 1, 2, 3,……n পর্যন্ত বসাইলে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির পরপর পদগুলি পাওয়া যাইবে। অতএব প্রমাণিত হইল যে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots + x^n$$

$$[\because \; {}^nC_0 = {}^nC_n = 1]$$

অথবা, $(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2 + \cdots\cdots$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r + \cdots + x^n.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :—(1) উপরের প্রমাণিত সূত্রটিকেই (formula) Binomial Theorm বলে।

(2) উহার ডানপক্ষের শ্রেণীকে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি (expansion) বলা হয়।

(3) ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots {}^nC_r, \cdots {}^nC_n$ বিস্তৃতির পদগুলির সহগ। এই সহগগুলিকে Binomial Co-efficients বলা হয়।

(4) সূত্র (1) হইতে বুঝা গেল যে, ঐ বিস্তৃতি সসীম এবং উহাতে পদসংখ্যা $(n+1)$, অর্থাৎ $(a+x)$ এর সূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক।

(5) প্রত্যেক পদে a ও xএর সূচকদ্বয়ের সমষ্টি n এবং প্রত্যেক পদে x-এর সূচক ঐ পদটির ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম [অর্থাৎ প্রথম পদে x-এর সূচক $(1-1)$ বা 0, ২য় পদে x-এর সূচক $(2-1)$ বা 1, ইত্যাদি]। আবার, প্রত্যেক পদে x-এর সূচক ঐ পদের C-এর suffixএর সমান।

(6) সূত্র (ii) হইতে দেখা যায় যে, প্রত্যেক পদে সহগের লব ও হরে উৎপাদকসংখ্যা ঐ পদের ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম।

35. দ্বিপদ উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ

(Method of Induction বা আরোহণ প্রণালীতে প্রমাণ।)

আমরা গুণ করিয়া পাই,

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1ax + x^2,$

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + {}^3C_1a^2x + {}^3C_2ax^2 + x^3.$

অতএব, দেখা যাইতেছে $n=2$ এবং 3 হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

এখন ধরা যাউক যে n এর কোন একটি নির্দিষ্ট মানে (মনে কর $n=m$ হইলে) উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, অর্থাৎ ধরা যাউক যে,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + \cdots$$
$$+ {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots + x^m \cdots (1)$$

(1) এর উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)\{a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + \cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots$$
$$+ x^m\}$$
$$= a^{m+1} + ({}^mC_1+1)a^mx + ({}^mC_2 + {}^mC_1)a^{m-1}x^2 + \cdots$$
$$+ ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

এক্ষণে, $\because$ ${}^mC_1 + 1 = m+1 = {}^{m+1}C_1$,

এবং সাধারণভাবে ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$,

$$\therefore \quad (a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2 + \cdots$$
$$+ {}^{m+1}C_ra^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

অতএব, দেখা গেল যে, $n=m$ হইলে যদি উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, তবে $n=m+1$ হইলেও উহা সিদ্ধ হয়।

আমরা পূর্বে দেখিয়াছি যে, $n=3$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, সুতরাং $n=4$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে। আবার $\because$ $n=4$ হইলে উহা সিদ্ধ হয়, $\therefore$ $n=5$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, n এর যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানে উপপাদ্যটি সিদ্ধ।

36. যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n. \cdots\cdots (1)$$
$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r +$$
$$\cdots + x^n \cdots\cdots (2)$$

গুণনের দ্বারা পাই $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + {}^2C_1x + x_2$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 + {}^3C_1x + {}^3C_2x^2 + x^3.$

অতএব দেখা গেল যে $n=2$ ও 3 হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। এখন ধরা যাউক যে, n এর কোন একটি নির্দিষ্ট মানে (মনে কর $n=m$ হইলে) উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, অর্থাৎ ধরা যাউক যে,

$$(1+x)^m=1+{}^mC_1x+{}^mC_2x^2+\cdots+{}^mC_rx^r+\cdots+x^m.$$

উভয় পক্ষকে $(1+x)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$(1+x)^{m+1}=(1+x)\{1+{}^mC_1x+{}^mC_2x^2+\cdots+{}^mC_rx^r+\cdots+x^m\}$$
$$=1+({}^mC_1+1)x+({}^mC_2+{}^mC_1)x^2+\cdots$$
$$+({}^mC_r+{}^mC_{r-1})x^r+\cdots+x^{m+1}$$

এক্ষণে, $\because \quad {}^mC_1+1=m+1={}^{m+1}C_1$, এবং ${}^mC_r+{}^mC_{r-1}={}^{m+1}C_r$,

$$\therefore \quad (1+x)^{m+1}=1+{}^{m+1}C_1x+{}^{m+1}C_2x^2+\cdots+{}^{m+1}C_rx^r+\cdots$$
$$+x^{m+1}.$$

অতএব দেখা গেল যে, $n=m$ হইলে যদি উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, তবে $n=m+1$ হইলেও উহা সিদ্ধ হয়।

পূর্বে দেখান হইয়াছে যে $n=3$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, সুতরাং $n=4$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে। আবার $\because$ $n=4$ হইলে উহা সিদ্ধ হয়, $\therefore$ $n=5$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে, ইত্যাদি।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, n এর যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানে উপপাদ্যটি সিদ্ধ।

[দ্রষ্টব্য। $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $a=1$ ধরিলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি পাওয়া যায়। অতএব, $(a+x)^n$ এর একটি বিশেষ আকার হইল $(1+x)^n$. উভয়ক্ষেত্রে সহগগুলি একই।]

37. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি হইতে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

$$(a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n(1+y)^n \quad \left[\frac{x}{a}=y \text{ ধরিয়া}\right]$$
$$=a^n(1+{}^nC_1y+{}^nC_2y^2+\cdots+y^n)$$

$$=a^n\left(1+{}^nC_1\frac{x}{a}+{}^nC_2\frac{x^2}{a^2}+\cdots+\frac{x^n}{a^n}\right)$$
$$=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\cdots+x^n.$$

অতএব, $(1+y)^n$ অর্থাৎ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি হইতে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি পাওয়া গেল।

38. $(a-x)^n$ এবং $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতি।

$\because$ $(a+x)^n$ ও $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি দুইটি x এবং a এর যে-কোন মানে সিদ্ধ, $\therefore$ উভয় বিস্তৃতিতে x এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই

(i) $$(a-x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}(-x)+{}^nC_2a^{n-2}(-x)^2+\cdots+(-x)^n$$
$$=a^n-{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2-\cdots+(-1)^nx^n.$$

(ii) $$(1-x)^n=(1)^n+{}^nC_1(-x)+{}^nC_2(-x)^2+\cdots+(-x)^n$$
$$=1-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-\cdots+(-1)^nx^n.$$

[দ্রষ্টব্য। (i) ও (ii) এ n জোড় সংখ্যা হইলে $(-x)^n$ এর sign ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $(-x)^n=x$ হইবে। আর n বিজোড় সংখ্যা হইলে $(-x)^n=-x^n$ হইবে। এখানে n জোড় বা বিজোড় কিছুই জানা না থাকায় $(-x)^n$ এর স্থানে $(-1)^nx^n$ লেখা হইল, n জোড় বা বিজোড় হইলে $(-1)^n$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

(i) ও (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, $(a-x)^n$ ও $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদগুলির সাংখ্যমান (numerical value) যথাক্রমে $(a+x)^n$ ও $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলির সাংখ্যমানের সমান; কেবল পদগুলি একান্তরক্রমে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক। উভয় বিস্তৃতিতেই প্রথম পদ ধনাত্মক। আর n জোড় বা বিজোড় হইলে শেষ পদটি যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে]

39. বিস্তৃতির General Term বা সাধারণ পদ নির্ণয়।

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$তম পদকে ঐ বিস্তৃতির সাধারণ পদ (general term) বলা হয়। কারণ, r এর যথাযোগ্য মান বসাইয়া ঐ

সাধারণ পদটি হইতে ঐ বিস্তৃতির যে-কোন পদ নির্ণয় করা যায়। যথা, দশম পদ নির্ণয়ের জন্য ঐ সাধারণ পদে r এর মান 9 ধরিলে (9+1)-মত বা দশম পদ পাওয়া যাইবে।

যেমন T_1 বা t_1 দ্বারা প্রথম পদ, T_2 বা t_2 দ্বারা দ্বিতীয় পদ সূচিত করা হয়, সেইরূপ $(r+1)$তম পদকে T_{r+1} বা t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি হইতে পাই

প্রথম পদ $=(1+0)$-তম পদ $={}^nC_0a^n=a^n$

দ্বিতীয় পদ $=(1+1)$-তম পদ $={}^nC_1a^{n-1}x$

তৃতীয় পদ $=(2+1)$-তম পদ $={}^nC_2a^{n-2}x^2$

চতুর্থ পদ $=(3+1)$-তম পদ $={}^nC_3a^{n-3}x^3$

অনুরূপে $(r+1)$-তম পদ $={}^nC_ra^{n-r}x^r$.

অতএব, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $={}^nC_r\boldsymbol{a}^{n-r}\boldsymbol{x}^r\cdots\cdots(1)$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r\cdots\cdots(2).$$

আবার, অনুরূপে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$={}^n\mathbf{C}_r\mathbf{x}^r\cdots\cdots(1)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r\cdots\cdots(2).$$

$(a-x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $={}^nC_ra^{n-r}(-x)^r$

$$=(-1)^r\ {}^nC_ra^{n-r}x^r,$$

এবং $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $={}^nC_r(-x)^r$

$$=(-1)^r\ {}^nC_rx^r.$$

40. বিস্তৃতির Middle Term বা মধ্যপদ নির্ণয়।

আমরা দেখিয়াছি যে, দ্বিপদরাশির কোন ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা ঐ ঘাতসূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক বেশী হইয়া থাকে। অতএব, ঐ ঘাত n জোড়

যা বিজোড় সংখ্যা তাহা দেখিতে হইবে। n জোড় সংখ্যা হইলে ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদ একটি হইবে। আর n বিজোড় হইলে ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটি হইবে।

মনে কর, n জোড় সংখ্যা অর্থাৎ $n=2m$, সুতরাং n ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(2m+1)$ হইবে। অতএব, কেবল $(m+1)$-তম বা $(\frac{n}{2}+1)$-তম পদটি উহার মধ্যপদ হইবে।

আবার, মনে কর n বিজোড়, অর্থাৎ $n=2m+1$, সুতরাং n ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা $=(n+1)=2m+2$. অতএব, এস্থলে মধ্যপদ একটি না হইয়া দুইটি হইবে ; $(m+1)$-তম পদ অর্থাৎ $\frac{n+1}{2}$ তম পদ এবং $(m+2)$-তম পদ অর্থাৎ $(\frac{n+1}{2}+1)$-তম পদ ঐ বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদ হইবে।

(a) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

[To find the middle term in the expansion of $(1+x)^n$.]

(i) n জোড় হইলে মনে কর $n=2m$, সুতরাং $m=\frac{n}{2}$

এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $n+1$ অর্থাৎ $2m+1$, সুতরাং উহার মধ্যপদ একটি হইবে এবং $(m+1)$ তম বা $(\frac{n}{2}+1)$ তম পদটিই মধ্যপদ হইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মধ্যপদ} = {}^nC_{\frac{1}{2}n}\, x^{\frac{1}{2}n} = \frac{\lfloor n}{(\lfloor \frac{1}{2}n)^2} x^{\frac{1}{2}n}.$$

(ii) n বিজোড় হইলে মনে কর $n=2m+1$, সুতরাং $m=\frac{1}{2}(n-1)$.

এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $n+1$ অর্থাৎ $2m+2$ (ইহা জোড় সংখ্যা)। অতএব, বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটি হইবে। $(m+1)$-তম ও $(m+2)$-তম পদ দুইটি অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম ও $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদদ্বয় দুইটি মধ্যপদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ দুইটি

$$= {}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}\, x^{\frac{1}{2}(n-1)} \text{ এবং } {}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}\, x^{\frac{1}{2}(n+1)}$$

অথবা $= \dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) . \lfloor \frac{1}{2}(n+1)} x^{\frac{1}{2}(n-1)}$

এবং $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n+1) . \lfloor \frac{1}{2}(n-1)} x^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

[দ্রষ্টব্য। (ii)-এ মধ্যপদ দুইটির সহগদ্বয়ের সাংখ্যমান একই।

41. বিস্তৃতির Equidistant Terms বা সমদূরবর্তী পদসমূহ।

শ্রেণীর প্রথম দিক ও শেষ দিক হইতে যে দুইটি পদ সমান দূরে (অর্থাৎ সমানসংখ্যক পদের পর) অবস্থিত। সেই পদ দুইটিকে সমদূরবর্তী পদ বলে। যথা, প্রথম দিক হইতে পঞ্চম পদ ও শেষ দিক হইতে বামদিকের পঞ্চম পদ হইবে দুইটি সমদূরবর্তী পদ। সাধারণভাবে প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদ ও শেষ দিক হইতে বামদিকের $(r+1)$-তম পদ দুইটি সমদূরবর্তী পদ।

42. কোন বিস্তৃতির সমদূরবর্তী পদগুলির সহগসমূহ সমান হয়।

[To prove that in the expansion of $(a+x)^n$ or $(1+x)^n$ the co-efficients of terms equidistant from the beginning and the end are equal.]

ঐ বিস্তৃতি দুইটিতে প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ হয় ${}^nC_r$. এখন শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ কত হয় দেখিতে হইবে। শেষ দিক হইতে যেটি $(r+1)$-তম পদ তাহার আগে প্রথম দিক হইতে ধরিলে $\{(n+1)-(r+1)\}$ অর্থাৎ $(n-r)$ সংখ্যক পদ আছে, কারণ, বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $n+1$.

অতএব, শেষ দিক হইতে যেটি $(r+1)$-তম পদ, প্রথম দিক হইতে ধরিলে সেইটি $(n-r)$-তম পদের পরবর্তী অর্থাৎ $(n-r+1)$ তম পদ হইল।

$\therefore$ শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ

= প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদের সহগ

$= {}^nC_{n-r} = {}^nC_r \quad [\because {}^nC_{n-r} = {}^nC_r]$

অতএব, প্রথম ও শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগদ্বয় সমান হইল। অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, যে কোন দুই সমদূরবর্তী পদের সহগদ্বয় সমান।

43. Properties of Binomial Coefficients (দ্বিপদ সহগের ধর্ম)।

অনেক সময় ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots, {}^nC_r, \cdots {}^nC_n$ এই দ্বিপদ সহগগুলিকে (Binomial Coefficients) সংক্ষেপে যথাক্রমে $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_r, \cdots C_n$ লেখা হয়।

অতএব, $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots + x^n . \cdots (1)$

$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n . \cdots (2)$

[$\because \; {}^nC_0 = {}^nC_n = 1$]

I. এক্ষণে, (2)-এ $x=1$ বসাইয়া পাই

$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ [$\because$ 1 এর যে-কোন ঘাত $=1$]

$=$ সহগগুলির সমষ্টি।

(i) **অতএব পাওয়া গেল যে, দ্বিপদ বিস্তৃতির সহগগুলির সমষ্টি $=2^n$.**

II. আবার, (2)-এ $x=-1$ বসাইয়া পাই,

$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - \cdots + (-1)^n C_n$

বা, $0 = C_0 - C_1 + C_2 - \cdots + (-1)^n C_n$

$\therefore \; C_0 + C_2 + C_4 + \cdots = C_1 + C_3 + C_5 + \cdots$ [পক্ষান্তর করিয়া]

(ii) অতএব, প্রমাণিত হইল যে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির **বিজোড় স্থানীয় পদগুলির সহগগুলির সমষ্টি $=$ জোড়স্থানীয় পদগুলির সহগগুলির সমষ্টি।**

III. $\because$ সমস্ত সহগগুলির সমষ্টি $=2^n$.

$\therefore$ বিজোড়স্থানীয় পদগুলির সহগসমূহের সমষ্টি $=$ জোড়স্থানীয় পদগুলির সহগসমূহের সমষ্টি $= \frac{1}{2} \times$ সবগুলি সহগের সমষ্টি

$= \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{-1} \times 2^n = 2^{n-1}$.

IV. $\because \; C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 2^n$,

$\therefore \; 1 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 2^n$,

$\therefore \; C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 2^n - 1$.

এক্ষণে, বামপক্ষের পদগুলি দ্বারা n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে $1, 2, 3, \cdots\cdots n$ সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মোট সংখ্যা বুঝায়।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে ঐ সমবায় সংখ্যা $=2^n-1$.

[**দ্রষ্টব্য।** এখানে $(1+x)^n$ বিস্তৃতি হইতে সহগগুলি সম্বন্ধে যে তথ্যগুলি পাওয়া গিয়াছে, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি হইতেও $a=x=1$ এবং $a=x=-1$ বসাইয়া ঐ তথ্যগুলি পাওয়া যায়।]

44. বিস্তৃতির Greatest Coefficient বা বৃহত্তম সহগ নির্ণয়।

$(1+x)^n$ ও $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদের সহগ উভয় পক্ষেই ${}^nC_r$ হয়। পূর্বে সমবায়ের 31 নং অনুচ্ছেদে প্রমাণ করা হইয়াছে যে, (i) n জোড় হইলে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{1}{2}n$ হয়; এবং (ii) n বিজোড় হইলে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{1}{2}(n-1)$ অথবা $\frac{1}{2}(n+1)$ হয়।

অতএব, প্রমাণিত হইতেছে যে, n **জোড় হইলে** $(r+1)$-তম অর্থাৎ $(\frac{1}{2}n+1)$-তম পদ অর্থাৎ ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদটির সহগ বৃহত্তম হইবে। আবার n **বিজোড় হইলে** ঐ বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটির অর্থাৎ উহার $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম পদের ও $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদের সহগ দুইটি বৃহত্তম হইবে এবং ঐ সহগদ্বয় সমান হইবে।

45. বিস্তৃতির Greatest Term বা বৃহত্তম পদ নির্ণয়।

মনে কর, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করিতে হইবে।

r-তম পদকে t_r দ্বারা সূচিত করা হইল।

ঐ বিস্তৃতির $t_r={}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}\cdots\cdots(1)$

এবং $t_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}x^r\cdots\cdots(2)$.

(2)-কে (1) দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a},\quad\therefore\quad t_{r+1}=t_r\times\left(\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}\right)$$

অতএব, $t_{r+1} >=$ অথবা $< t_r$ হইবে,

যদি $(n-r+1)x >= $ বা $< ra$ হয়,

অর্থাৎ যদি $(n+1)x >= $ বা $< ra+rx$ হয়,

„ „ $(n+1)x >= $ বা $< (a+x).r$ হয়,

„ „ $r <= $ বা $> \frac{n+1}{a+x}.x$ হয়।

(i) এক্ষণে মনে কর, $\frac{n+1}{a+x}.x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং উহা m এর সমান।

অতএব, যতক্ষণ $r<m$ থাকিবে ততক্ষণ $t_{r+1}>t_r$ হইবে অর্থাৎ ততক্ষণ প্রত্যেক পদ তাহার পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। এইভাবে t_m পর্যন্ত পর পর পদগুলি বাড়িতে থাকিবে। যখন $r=m$ হইবে, তখন $t_{r+1}=t_r$ অর্থাৎ $t_{m+1}=t_m$ হইবে।

আবার, $r>m$ হইলে (অর্থাৎ $m+1$ বা তদধিক হইলে) $t_{r+1}<t_r$ হইবে এবং পরবর্তী পদগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

অতএব, t_{m+1} এবং t_m পদ দুইটিই বৃহত্তম পদ হইবে এবং $t_{m+1}=t_m$.

(ii) এক্ষণে, যদি $\frac{n+1}{a+x}x$ পূর্ণসংখ্যা না হয়, তবে মনে কর উহা পূর্ণ সংখ্যা $p+$ কোন ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ।

অতএব, যতক্ষণ p পর্যন্ত r এর মান থাকিবে ততক্ষণ $\frac{n+1}{a+x}x$ অপেক্ষা r ছোট থাকিবে, সুতরাং ততক্ষণ $t_{r+1}>t_r$ হইবে। আর, r এর মান $(p+1)$ বা ততোধিক হইলে $t_{r+1}<t_r$ হইবে এবং পরবর্তী পদগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

অতএব, এক্ষেত্রে t_{p+1} পদটি বৃহত্তম পদ হইবে।

[দ্রষ্টব্য। (1) উপরের প্রণালীতেই $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যাইবে। সেস্থলে কেবল a-র স্থানে 1 বসাইতে হইবে।

(2) বৃহত্তম পদের মান বলিতে পদটির পরম মান (absolute value) অর্থাৎ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নবর্জিত সাংখ্য মান বুঝায়। অতএব, $(a+x)^n$ এর এবং $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদ একই হইবে। অতএব, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়ের প্রণালীতে $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতিরও বৃহত্তম পদ নির্ণয় করিতে হইবে, কেবল ঋণাত্মক চিহ্নগুলি ধর্তব্য হইবে না। $(1+x)^n$ এবং $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়ের প্রণালীও অনুরূপ হইবে।]

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Expand $(a+3b)^6$.

[34নং অনুচ্ছেদের] সূত্রে x এর স্থানে $3b$ বসাইয়া পাই

$$(a+3b)^6 = a^6 + {}^6C_1a^5(3b) + {}^6C_2a^4(3b)^2 + {}^6C_3a^3(3b)^3 + {}^6C_4a^2(3b)^4 + {}^6C_5a(3b)^5 + {}^6C_6(3b)^6.$$

এক্ষণে, ${}^6C_1 = 6$, ${}^6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$, ${}^6C_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$,

${}^6C_4 = {}^6C_2 = 15$, ${}^6C_5 = {}^6C_1 = 6$ এবং ${}^6C_6 = 1$.

$$\therefore \quad (a+3b)^6 = a^6 + 6a^5.3b + 15a^4.9b^2 + 20a^3.27b^3 + 15a^2.81b^4 + 6a\,243b^5 + 729b^6$$

$$= a^6 + 18a^5b + 135a^4b^2 + 540a^3b^3 + 1215a^2b^4 + 1458ab^5 + 729b^6.$$

উদা. 2. Find the expansion of $\left(a - \frac{1}{a}\right)^7$.

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^7 = a^7 - {}^7C_1a^6.\frac{1}{a} + {}^7C_2a^5.\frac{1}{a^2} - {}^7C_3a^4.\frac{1}{a^3} + {}^7C_4a^3.\frac{1}{a^4} - {}^7C_5a^2.\frac{1}{a^5} + {}^7C_6a.\frac{1}{a^6} - {}^7C_7\frac{1}{a^7}$$

$$= a^7 - 7a^5 + 21a^3 - 35a + \frac{35}{a} - \frac{21}{a^3} + \frac{7}{a^5} - \frac{1}{a^7}.$$

উদা. 3. Expand $(\frac{1}{2}a-3b)^5$.

$$(\tfrac{1}{2}a-3b)^5=\left\{\frac{a}{2}\left(1-\frac{6b}{a}\right)\right\}^5=\left(\frac{a}{2}\right)^5\left(1-\frac{6b}{a}\right)^5$$

$$=\frac{a^5}{32}\left\{1+{}^5C_1\left(-\frac{6b}{a}\right)+{}^5C_2\left(-\frac{6b}{a}\right)^2+{}^5C_3\left(-\frac{6b}{a}\right)^3\right.$$

$$\left.+{}^5C_4\left(-\frac{6b}{a}\right)^4+{}^5C_5\left(-\frac{6b}{a}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{a^5}{32}\left\{1-5\left(\frac{6b}{a}\right)+\frac{5.4}{2.1}\left(\frac{6b}{a}\right)^2-\frac{5.4.3}{3.2.1}\left(\frac{6b}{a}\right)^3+\frac{5}{1}\left(\frac{6b}{a}\right)^4-\left(\frac{6b}{a}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{a^5}{32}\left(1-\frac{30b}{a}+\frac{360b^2}{a^2}-\frac{2160b^3}{a^3}+\frac{6480b^4}{a^4}-\frac{7776b^5}{a^5}\right)$$

$$=\frac{a^5}{32}-\frac{15}{16}a^4b+\frac{45}{4}a^3b^2-\frac{135}{2}a^2b^3+\frac{405}{2}ab^4-243b^5.$$

উদা. 4. Find the expansion of $(x^2+x+1)^4$.

এখানে $x+1$ কে একটি পদ ধরিয়া পাই

$$(x^2+x+1)^4=\{x^2+(x+1)\}^4$$

$$=(x^2)^4+{}^4C_1(x^2)^3.(x+1)+{}^4C_2(x^2)^2(x+1)^2+{}^4C_3x^2(x+1)^3$$
$$+{}^4C_4(x+1)^4$$

$$=x^8+4x^6(x+1)+6x^4(x^2+2x+1)+4x^2(x^3+3x^2+3x+1)$$
$$+x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

$$=x^8+4x^7+4x^6+6x^6+12x^5+6x^4+4x^5+12x^4+12x^3$$
$$+4x^2+x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

$$=x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1.$$

উদা. 5 Find the value of $(a-\sqrt{1-a^2})^4+(a+\sqrt{1-a^2})^4$.

এখানে $\sqrt{1-a^2}$ এর স্থানে x বসাইয়া $(a-x)^4$ এবং $(a+x)^4$ এর বিস্তৃতিদ্বয়ের যোগফল নির্ণয় করিতে হইবে। এই দুই বিস্তৃতিতে পদগুলির সাংখ্যমান সমান, কিন্তু প্রথম বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদ ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, প্রথম বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদের সহিত দ্বিতীয় বিস্তৃতির ঐ পদ দুইটি কাটিয়া যাইবে।

অতএব, নির্ণেয় মান $=2(a^4+{}^4C_2a^2x^2+{}^4C_4x^4)$

$=2\{a^4+6a^2(1-a^2)+1(1-a^2)^2\}$

$=2(a^4+6a^2-6a^4+1-2a^2+a^4)=2+8a^2-8a^4.$

উদা. 6. Find the 5*th* term in the expansion of $(x-5y)^9$.

এখানে পঞ্চম পদ ধনাত্মক হইবে।

$\because\quad t_5={}^9C_4x^5(5y)^4=126x^5\times625y^4=78750x^5y^4.$

উদা. 7. Find the term containing x^{18} in the expansion of $(x^3-3x)^{10}$.

$$(x^3-3x)^{10}=\left\{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right\}^{10}=x^{30}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}.$$

$\because\quad x^{30}\times\frac{1}{x^{12}}=x^{18};$

$\therefore\quad\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ এর যে পদে $\frac{1}{x^{12}}$ থাকিবে তাহার সহিত x^{30} কে গুণ করিলে x^{18} বিশিষ্ট পদটি পাওয়া যাইবে।

এখন, $\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ এর যে পদে $\left(\frac{3}{x^2}\right)^6$ পাওয়া যাইবে সেই পদেই $\frac{1}{x^{12}}$ থাকিবে।

$\therefore\quad$ নির্ণেয় পদ $=x^{30}\times{}^{10}C_6\left(-\frac{3}{x^2}\right)^6$

$$=x^{30}\times\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\times3^6\times\frac{1}{x^{12}}=153090x^{18}.$$

উদা. 8. Find the co-efficient of x^{15} in the expansion of $\left(x^3+\frac{a}{x^2}\right)^{10}$.

মনে কর, $(r+1)$-তম পদে x^{15} থাকিবে।

এখানে $t_{r+1}={}^{10}C_r(x^3)^{10-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}^{10}C_rx^{30-3r}.x^{-2r}.a^r$

$={}^{10}C_rx^{30-5r}.a^r.$

একক্ষণে, $\because$ t_{r+1} পদে x^{15} আছে,

$\therefore$ $x^{30-5r}=x^{15}$, $\therefore$ $30-5r=15$, $\therefore$ $r=3$.

অতএব, $(r+1)$-তম অর্থাৎ চতুর্থ পদে x^{15} আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{10}C_3 a^3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}a^3 = 120a^3$.

উদা. 9. Find the coefficient of a^{-11} in the expansion of $\left(a^3-\frac{1}{a^2}\right)^{13}$.

মনে কর বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে a^{-11} আছে।

ঐ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $= {}^{13}C_r (a^3)^{13-r}\left(-\frac{1}{a^2}\right)^r$

$= {}^{13}C_r\, a^{39-3r}\times\frac{(-1)^r}{a^{2r}} = (-1)^r\times{}^{13}C_r\, a^{39-3r}\times a^{-2r}$

$=(-1)^r\times{}^{13}C_r\times a^{39-5r}$.

অতএব, যদি এই পদে a^{-11} থাকে অর্থাৎ ইহাতে যদি aএর সূচকটি -11 হয়, তবে $39-5r=-11$ বা, $5r=50$, $\therefore$ $r=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-1)^r\times{}^{13}C_r=(-1)^{10}.\ {}^{13}C_{10}=1\times{}^{13}C_3$

$$=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286.$$

উদা. 10. Find the term independent of x in the expansion of $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$. [C. U. '34]

মনে কর $(r+1)$ তম পদটি x হইতে স্বতন্ত্র অর্থাৎ x বর্জিত।

এখানে $t_{r+1}={}^{12}C_r(x^2)^{12-r}.\frac{1}{x^r}={}^{12}C_r x^{24-2r}.x^{-r}$

$={}^{12}C_r x^{24-3r}$

এক্ষণে এই পদটি x বর্জিত পদ হইবে যদি x এর সূচক শূন্য হয় অর্থাৎ যদি $24-3r=0$ হয়। $\because$ $24-3r=0$, $\therefore$ $r=8$.

অতএব, $(8+1)$-তম বা নবম পদটি x বর্জিত পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $={}^{12}C_8=495$.

উদা. 11. Obtain the term free from x in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$. [C. U. '31]

মনে কর, $(r+1)$-তম পদটি x বর্জিত।

এখানে $t_{r+1} = {}^{2n}C_r(x)^{2n-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^{2n}C_r x^{2n-r}.x^{-r} = {}^{2n}C_r x^{2n-2r}$.

এই পদটি x-বর্জিত হইবে যদি x এর সূচক $2n-2r=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $r=n$ হয়। $\therefore$ $(n+1)$-তম পদটি x-বর্জিত পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $= {}^{2n}C_n = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \, \lfloor 2n-n} = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \, \lfloor n}$

উদা. 12. Find the middle term in the expansion of $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^8$.

এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা 9, সুতরাং পঞ্চম পদটি উহার মধ্যপদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $= {}^8C_4(3x)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^4$

$$= \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} \times 3^4 x^4.(\tfrac{1}{2})^4.\left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= \frac{2835}{8}.x^4.\ \frac{1}{x^4} = \frac{2835}{8}.$$

উদা. 13. Find the middle term in the expansion of $\left(a-\frac{1}{a}\right)^7$.

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 8, সুতরাং উহার মধ্যপদ দুইটি হইবে এবং ঐ পদ দুইটি বিস্তৃতির $(\frac{1}{2}\times 8)$ বা চতুর্থ পদ এবং $(\frac{1}{2}\times 8+1)$ বা পঞ্চম পদ।

চতুর্থ পদটি $= {}^7C_3(a)^4\left(-\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{7.6.5}{3.2.1}a^4 \times -\frac{1}{a^3} = -35a.$

পঞ্চম পদটি $= {}^7C_4 a^3\left(-\frac{1}{a}\right)^4 = \frac{7.6.5}{3.2.1}a^3.\frac{1}{a^4} = \frac{35}{a}.$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ দুইটি $= -35a$ এবং $\frac{35}{a}$.

উদা. 14. Expand $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$, giving in particular the general term and the two middle terms. [C. U. '32]

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}+{}^{2n+1}C_1\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$+{}^{2n+1}C_2\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}+(2n+1)\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-1}+\frac{(2n+1)2n}{2.1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-3}+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1},$$ ইহাই নির্ণেয় বিস্তৃতি।

নির্ণেয় সাধারণ পদ $=(r+1)$ তম পদ

$$={}^{2n+1}C_r\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-r+1}\left(\frac{b}{a}\right)^r$$

$$=\frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(2n+1-r+1)}{\lfloor r}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-r+1-r}$$

$$=\frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(2n+2-r)}{\lfloor r}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1-2r}.$$

এখানে বিস্তৃতির মোট পদ সংখ্যা $2n+2$, সুতরাং উহার $(n+1)$ তম ও $(n+2)$ তম পদদ্বয় উহার দুইটি মধ্যপদ হইবে।

অতএব, একটি মধ্যপদ $=(n+1)$ তম পদ

$$=\frac{(2n+1)\,2n.(2n-1)\cdots(2n+1-n+1)}{\lfloor n}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1-n}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$=\frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(n+2)}{\lfloor n}.\frac{a}{b}.$$

অপর মধ্যপদটি $=(n+2)$ তম পদ

$$=\frac{(2n+1).2n.(2n-1)\cdots(2n+1-n)}{\lfloor n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1-n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+1)}{\lfloor n+1}.\frac{b}{a}.$$

উদা. 15. Find which is the greatest term in the expansion of $(1-2a)^9$ when $a=\frac{1}{3}$.

এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{9-r+1}{r}.2a$ (সাংখ্যমানে)

$$=\frac{10-r}{r}\times 2\times\frac{1}{3}\ (\because\ a=\tfrac{1}{3})=\frac{2(10-r)}{3r}.$$

$\therefore$ $t_{r+1}>=$বা $<t_r$ হইবে, যদি $2(10-r)>=$বা $<3r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $20>=$বা $<5r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r<=$বা >4 হয়।

$\therefore$ $t_4>t_3>t_2\cdots\cdots$, $t_5=t_4$ এবং $t_5>t_6>t_7\cdots\cdots$,

$\therefore$ এখানে চতুর্থ ও পঞ্চম পদ দুইটি সমান এবং ঐ দুইটিই বৃহত্তম পদ।

উদা. 16. Find the value of the greatest term in the expansion of $(2a+3x)^n$ when $n=13$, $a=9$, $x=4$.

এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}.\frac{3x}{2a}=\frac{14-r}{r}.\frac{12}{18}=\frac{28-2r}{3r}$

$\therefore$ $t_{r+1}>=$বা $<t_r$, যদি $28-2r>=$বা $<3r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $5r<=$ বা >28 হয়. অর্থাৎ যদি $r<=$ বা $>5\frac{3}{5}$ হয়।

$\therefore$ এখানে t_6 বৃহত্তম পদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $={}^{13}C_5(2a)^8(3x)^5={}^{13}C_5.2^8.3^5.a^8x^5$

এক্ষণে, $a=9$, ও $x=4$ ধরিয়া ঐ পদের মান নির্ণয় কর।

উদা. 17. Find the numerically greatest coefficient in the expansion of (i) $(1+a)^{11}$,) (ii) $(3-5x)^8$.

(i) এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{11-r+1}{r}$,

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$ হইবে, যদি $\frac{12-r}{r}>1$ হয় অর্থাৎ যদি $r<6$.

অতএব, ষষ্ঠ ও সপ্তম পদদ্বয়ের সহগ বৃহত্তম এবং সমান হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $={}^{11}C_5=\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7}{5\times 4\times 3\times 2}=462.$

(ii) এখানে $\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{8-r+1}{r}\cdot\frac{5}{3}$ [কেবল সাংখ্যমান প্রয়োজন, ঋণাত্মক চিহ্ন ধরিতে হইবে না]।

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$ হইবে, যদি $(9-r).5 \not< 3r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $45>8r$ হয়, অর্থাৎ যদি $r \not< 5\frac{5}{8}$ হয়

$\therefore$ t_6 এর সহগ বৃহত্তম হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $={}^8C_5(3)^3(5)^5=\frac{8\times7\times6}{3\times2}\times27\times3125$
$=4725000.$

উদা. 18. If three successive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ be 252, 210 and 120; find n.

মনে কর, প্রদত্ত সহগ তিনটি যথাক্রমে $(r+1)$ তম, $(r+2)$ তম ও $(r+3)$ তম পদের সহগ।

অতএব, এখানে ${}^nC_r=252$, ${}^nC_{r+1}=210$, ${}^nC_{r+2}=120$.

$$\therefore \quad \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}=\frac{252}{210}, \text{ বা } \frac{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}}{\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r+1 \lfloor n-r-1}}=\frac{252}{210}, \text{ বা } \frac{r+1}{n-r}=\frac{6}{5},$$

বা, $6n-11r=5\cdots\cdots(1).$

আবার, $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+2}}=\frac{210}{120}$, বা $\frac{r+2}{n-r-1}=\frac{210}{120}=\frac{7}{4}$,

বা, $7n-11r=15\cdots\cdots(2).$

এক্ষণে (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $n=10$.

উদা. 19. Find the coefficient of a in the expansion of $(1-2a^3+3a^5)\left(1+\frac{1}{a}\right)^8$.

প্রদত্ত রাশি $=(1-2a^3+3a^5)\times$

$$\left(1+{}^8C_1\frac{1}{a}+{}^8C_2\frac{1}{a^2}+{}^8C_3\frac{1}{a^3}+{}^8C_4\frac{1}{a^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{a^8}\right).$$

$$=\left(1-2a^3+3a^5\right)\left(1+\frac{8}{a}+\frac{28}{a^2}+\frac{56}{a^3}+\frac{70}{a^4}+\cdots\right)$$

এক্ষণে, ঐ গুণনে $-2a^3\times\frac{28}{a^2}=-56a$, এবং $3a^5\times\frac{70}{a^4}=210a$,

এবং গুণফলে আর a এর কোন সহগ নাই।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=-56+210=154$.

উদা. 20. Prove that $3^{2n}-8n-1$ is divisible by 64 for all positive integral values of n greater than 1.

$$3^{2n}-8n-1=9^n-8n-1=(1+8)^n-8n-1$$
$$=(1+n.8+{}^nC_2.8^2+{}^nC_3.8^3+\cdots\cdots)-8n-1$$
$$={}^nC_2.8^2+{}^nC_3\,8^3+\cdots\cdots,$$

এক্ষণে, $\because$ দক্ষিণ পক্ষের প্রত্যেক পদ 8^2 এর গুণিতক অর্থাৎ 8^2 বা 64 দ্বারা বিভাজ্য, $\therefore$ $3^{2n}-8n-1$ রাশিটিও 64 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 21. Apply the Binomial Theorem to find the value of $(\cdot999)^4$ correct to 3 places of decimals.

$$(\cdot999)^4=(1-\cdot001)^4=1-{}^4C_1\times\cdot001+{}^4C_2\times(\cdot001)^2-\cdots$$
$$=1-4\times\cdot001+6\times\cdot000001-\cdots$$
$$=1-\cdot004=\cdot996$$ (3 অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ)।

উদা. 22. Show that the coefficient of x^p in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ is $\frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{1}{2}(n+p)\,\lfloor\frac{1}{2}(n-p)}$.

মনে কর $(r+1)$ তম পদে x^p আছে।

এক্ষণে $t_{r+1}={}^nC_rx^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}^nC_rx^{n-r}x^{-r}={}^nC_rx^{n-2r}$.

$\therefore$ ঐ পদে x^p থাকিবে যদি $n-2r=p$ হয়, $\therefore$ $r=\frac{1}{2}(n-p)$.

$\because$ নির্ণেয় সহগ $={}^nC_r={}^nC_{\frac{1}{2}(n-p)}=\frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{1}{2}(n-p)\,\lfloor\frac{1}{2}(n+p)}$.

উদা. 23. If in the expansion of $(1+x)^{2n+1}$, the coefficients of x^r and x^{r+1} be equal, find r. [C. U. '30]

এখানে x^r এর সহগ $= {}^{2n+1}C_r$, এবং x^{r+1} এর সহগ $= {}^{2n+1}C_{r+1}$

$\because$ এখানে ${}^{2n+1}C_r = {}^{2n+1}C_{r+1}$ (স্বীকার)

$\therefore$ হয় $r = r+1$ অথবা $r+(r+1) = 2n+1$;

কিন্তু r কখন $r+1$ এর সমান হইতে পারে না,

অতএব এখানে $r+(r+1) = 2n+1$,

বা, $2r+1 = 2n+1$, $\therefore$ $r = n$.

উদা. 24. If n is a positive integer, show that

$$(1+a)^n - 2na(1+a)^{n-1} + \frac{2n(2n-2)}{\lfloor 2}a^2(1+a)^{n-2} - \cdots = (1-a)^n.$$

বাম পক্ষ $= (1+a)^n - n.(1+a)^{n-1}(2a)^1$

$$+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(1+a)^{n-2}.(2a)^2 - \cdots$$

$= (1+a)^n - {}^nC_1(1+a)^{n-1}(2a)^1 + {}^nC_2(1+a)^{n-2}.(2a)^2 - \cdots$

$= \{(1+a) - 2a\}^n = (1-a)^n$.

উদা. 25. If $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$, prove that $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \cdots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$. [C. U. '41]

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n \cdots (1)$$

এবং $(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n \cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) গুণ করিয়া পাই

$$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) \times$$
$$(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n)$$

ইহা একটি অভেদ, সুতরাং বামপক্ষের x^n এর সহগ ডানপক্ষের x^n এর সহগের সমান হইবে।

$\because$ বামপক্ষের x^n এর সহগ $= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$,

এবং ডানপক্ষের x^n এর সহগ $= C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2$.

$$\therefore \quad C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

Exercise 5

Expand the following binomials :—

1. $(a+3)^5$ **2.** $(x-y)^6$ **3.** $(2x+3y)^5$ **4.** $\left(x-\frac{3}{y}\right)^7$.

5. Expand and simplify : $(\sqrt{3}+1)^6-(\sqrt{3}-1)^6$.

6. Find the value of $(1+\sqrt{1-a^2})^5+(1-\sqrt{1-a^2})^5$.

7. Expand the trinomial $(a^2-a-2)^3$.

Write down the following terms :—

8. 8th term in the expansion of $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{17}$

9. 5th term in the expansion of $(x-5y)^8$.

10. nth term in the expansion of $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2n}$

Find the *middle term* (or terms) in the expansion of :—

11. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{12}$ ✓**12.** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$ **13.** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ [C. U. '10]

✓**14.** $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^8$ **15.** (i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$. (ii) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$.
[C. U. '43]

16. Show that the middle term in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ is $\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{\lfloor n}2^n$. [P. U. '42]

✓**17.** Find the coefficient of x^{15} in the expansion of $(x-x^2)^{10}$. [C. U. '25]

18. Find the coefficient of x^{16} in the expansion of $(2x^2 - x)^{10}$. [C. U. '47]

19. Find the coefficient of x^{-10} in the expansion of $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^{14}$.

20. Find the coefficient of x^{10} in the expansion of $(1+x+x^2)(1-x)^{15}$. [M. U. '20]

21. Find the coefficient of x in the expansion of $(1-2x^2+3x^4)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$, and that of x^3 in the expansion of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$.

22. Find the coefficient of x^{2r+1} in the expansion of $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$. [P. U. '24]

23. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $(1+x)^{2n}$ is double the coefficient of x^n in the expasion of $(1+x)^{2n-1}$. [C. U. '47]

Find the term *independent of* x in the following expansions :

24. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ [C. U. '34] 25. $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ [C. U. '36]

26. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ [P. U. '48] 27. $\left(1-x\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$

28. (a). $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$.

28. Find the term independent of x in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$. [C U. '10, '21]

29. Obtain the term free from x in the expansion of $\left(1+x\right)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$. [U. U. '47]

30. Find the greatest term in the expansion $(x-4y)^8$, when $x=\frac{1}{2}$ and $y=\frac{1}{3}$.

31. Which is the greatest term in the expansion of $(2x-3y)^n$ when $n=13$, $x=9$, $y=4$?

32. Find the value of the greatest term in the expansion of $(1+2a)^9$ when $a=\frac{1}{3}$.

33. Find the numerically greatest coefficient in the expansion of $(1+\frac{2}{3}a)^{12}$.

34. Find the sum of the coefficients of $(1-2x)^5$.

35. Find the sum of the coefficients of $(2x-3y)^7$.

36. Prove that in the expansion of $(a+b)^n$ the coefficients of terms equidistant from the two ends are equal.

37. Find the sum of the squares of the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ when n is a positive integer. [C. U. '41]

38. The third, fourth and fifth terms in the expansion of $(x+a)^n$ in descending powers of x are 84, 280, and 560 respectively ; find x, a and n. [C. U. '55]

39. If three successive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ be 28, 56 and 70, find n.

40. If three successive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ be 165, 330 and 462, find n. [P. U. '45]

41. In the expansion of $(1+x)^{m+n}$ where m and n are positive integers, prove that the coefficients of x^m and x^n are equal. [C. U. '35]

42. Show that the sum of the coefficients of the odd terms in the expansion of $(1+x)^{2n}$ is 2^{n-1}. [C. U. '17]

43. If the rth term in the expansion of $(x+1)^{20}$ has its coefficient equal to that of $(r+4)$th term, find r. [C. U. '46]

44. In the expansion of $(1+x)^{10}$, the coefficient of the $(4r+5)$th term is equal to that of $(2r+1)$th term, find r.

[C. U. '49]

45. Show that the coefficient of the middle term of $(1+x)^{2n}$ is equal to the sum of the coefficients of the two middle terms of $(1+x)^{2n-1}$. [C. U.]

46. If a, b, c, d be the 3rd, 4th, 5th and 6th terms respectively in the expansion of $(x+A)^n$, n being a positive integer, show that $\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{5a}{3c}$. [C. U. '57]

47. Apply the Binomial theorem to find the value of $(99)^3$ and of $(\cdot 99)^4$ correct to 2 places of decimals.

48. Show that $2^{2r}-3r-1$ is divisible by 9 for all positive integral values of r greater than 1.

49. Show that for all integral values of n greater than 1, $6^{2n}-35n-1$ is divisible by 1225.

50. In the expansion of $(1+x)^n$, if $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ be the coefficients, show that $C_1+2.C_2+3.C_3+\cdots+n.C_n = n.2^{n-1}$. [C. U. '38]

51. If $(1+x)^n = C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$, prove that $C_1-2C_2+3C_3-\cdots+(-1)^{n-1}.n.C_n=0$. [C. U. '42]

52. In the expansion of $(1+x)^n$, the successive coefficients are $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$; show that $a_0+2a_1+3a_2+\cdots+(n+1)a_n=2^n+n.2^{n-1}$. [C. U. '29]

If $(1+x)^n = C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$, prove that :—

53. $\frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. [C. U. '45]

54. $C_0-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\cdots+(-1)^n.\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$. [P. U. '44]

55. $C_0+2C_1+3C_2+\cdots+(n+1)C_n=(n+2)2^{n-1}$.

[Rangoon, '50]

56. $C_k = C_{n-k}$.

57. $C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_nC_0 = \dfrac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$.

58 $C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \cdots + \dfrac{C_n}{n+1} = \dfrac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$. [Delhi '50]

59. If $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$,

show that $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \dfrac{3^n+1}{2}$.

60. If $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$, find the value of :—

(i) $2C_0 - 3C_1 + 4C_2 - 5C_3 + \cdots$ to $(n+1)$ terms,

(ii) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \cdots + C_{n-1}C_n$.

(iii) $\dfrac{C_1}{C_0} + \dfrac{2C_2}{C_1} + \dfrac{3C_3}{C_2} + \ldots + \dfrac{nC_n}{C_{n-1}}$.

61. Find the middle term in the expansion of $(1+x)^n$ when n is a positive integer.

62. Express $(1+x)^n$ in the form of a series when n is a positive integer and calculate the sum of the coefficients when $n=6$.

63. If the 2nd, 3rd, and 4th terms in the expansion of $(a+x)^n$ be 240, 720 and 1080 respectively, find a, x and n.
[G. U. '48]

64. If a, b, c be three consecutive co-efficients in the expansion of a power of $(1+x)$, prove that the index of the power is $\dfrac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ and that the number of the term of which a is the co-efficient is $\dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$. [P. U. '41]

65. If a_1, a_2, a_3, a_4 are any four consecutive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, show that,

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a^3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$ [P. U. '50]

Binomial Theorem for Fractional or Negative Index.

[ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য]

46. আমরা দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাইয়াছি যে n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \cdots$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} + \cdots \cdots (1)$$

কিন্তু n কোন ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সংখ্যা হইলে ঐ দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয় কিনা তাহা দেখা হয় নাই।

n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলেও দ্বিপদ উপপাদ্যটি যে সিদ্ধ হইবে তাহা প্রমাণ করা যায়। পাঠ্য বহির্ভূত বলিয়া এই প্রমাণ এখানে দেখান হইল না। n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে পূর্ব উপপাদ্য হইতে কি পার্থক্য হয় এখন তাহাই আলোচনা করা হইতেছে।

এখন দেখ পূর্বপ্রমাণিত দ্বিপদ উপপাদ্যের সাধারণ পদ হইয়াছে $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$, এবং দেখা গিয়াছে যে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা হইয়াছে $(n+1)$ অর্থাৎ $(n+1)$ সংখ্যক পদের পর বিস্তৃতি শেষ হইয়া গিয়াছে। অতএব, **শ্রেণীটি এক্ষেত্রে সসীম।**

ইহার কারণ এই যে, যদি ঐ সাধারণ পদে r এর মান n অপেক্ষা বৃহত্তর ধরা হয়, তবে উহার লবের একটি উৎপাদক শূন্য হইয়া যাইবে (যদি $r = n+1$ হয়, তবে $n-r+1$ শূন্য হয়), সুতরাং সমগ্র সহগটি শূন্য হওয়ায় ঐ পদটিই শূন্য হইবে অর্থাৎ বিলুপ্ত হইবে। অতএব, বিস্তৃতিতে x এর সূচক n অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তাহার সহগ শূন্য হইবে বলিয়া x^n পদটির পর বিস্তৃতির শেষ হইবে।

এখন দেখা যাইক n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সংখ্যা হইলে কি হয়। উপরের (1) শ্রেণীটিতে r একটি অখণ্ড সংখ্যা ও ধনাত্মক হইবেই, কারণ পদসংখ্যা

ভগ্নাংশ বা ঋণসংখ্যা হইতে পারে না ($3\frac{1}{3}$ তম পদ বা -3 তম পদ এরূপ হইতে পারে না)। r ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলিয়া n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$ এই সাধারণ পদের লবের কোন উৎপাদকই শূন্য হইতে পারে না। অতএব, এরূপক্ষেত্রে x এর ঘাত যত অধিকই হউক না কেন, উহার সহগ কখনই শূন্য হইবে না। অতএব, ঐ শ্রেণীটি (বিস্তৃতি) কখনও শেষ হইবে না অর্থাৎ উহা অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত হইবে।

আমরা ভাগ করিয়া দেখিতে পাই

$(1-x)^{-2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$, যতই ভাগ কর এই ভাগকার্য্য কখনও শেষ হইবে না। অতএব, ভাগফল-শ্রেণীটি অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত।

আবার দেখ, দ্বিপদ উপপাদ্যে n এর স্থানে -2 ও x এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই

$$(1-x)^{-2}=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-3)}{2.1}\left(-x\right)^2$$
$$+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3.2.1}\left(-x\right)^3+\cdots\cdots$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$$

অতএব দেখা গেল যে এক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইতেছে।

এখন যদি $(1-x)^{-2}$ এ $x=2$ ধরা যায়, তবে কি হয় দেখা যাউক।

এক্ষেত্রে $(1-2)^{-2}=1+2.2+3.2^2+4.2^3+\cdots\cdots$ অসীম পর্য্যন্ত

অর্থাৎ $(-1)^{-2}=1+2.2+3.2^2+4.2^3+\cdots\cdots$ কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ এক্ষেত্রে বামপক্ষ ডানপক্ষের সমান নহে।

[অনুরূপে দেখান যায় যে, $x=-1$ বা 1 হইলেও ঐ দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয় না]।

অতএব, দেখা গেল যে x-এর যে কোন মানে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয় না। যদি x-এর মান -1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, অর্থাৎ

যদি $-1<x<1$ হয়, তবে যে কোন সূচকের পক্ষে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে।

অতএব, সিদ্ধান্ত হইল এই যে, যদি x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সংখ্যা হইলে, প্রমান করা যায় যে,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots\text{to } \infty.$$

[দ্রষ্টব্য। xএর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কম ইহা সাধারণতঃ $|x|<1$ এই প্রতীক চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।]

47. General term বা সাধারণ পদ নির্ণয়।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে $(r+1)$-তম পদকে সাধারণ পদ বলা হয় এবং উহা সংক্ষেপে t_{r+1} দ্বারা সূচিত হয়।

$$\because\quad (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots,$$

$$\therefore\quad t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

অতএব, (1). $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}.(-x)^r$$
$$=(-1)^r.\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

(2). $(1+x)^{-n}$ এর বিস্তৃতিতে

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$
$$=(-1)^r.\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

[এখানে লবের মোট উৎপাদক সংখ্যা r এবং $-n=-1\times n$, $(-n-1)=-1\times(n+1)\cdots$; অতএব r সংখ্যক (-1) গুণ করিয়া হইল $(-1)^r$.]

(3). $(1-x)^{-n}$ এর বিস্তৃতিতে

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}\left(-x\right)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}\left(-1\right)^r x^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

$$[\because\quad (-1)^r\times(-1)^r=(-1)^{2r}=1\ ]$$

$(1-x)^{-n}$ এর সাধারণ পদ দেখিয়া বুঝা যাইতেছে যে এই বিস্তৃতির প্রত্যেক পদই ধনাত্মক।

48. Greatest Term বা বৃহত্তম পদ নির্ণয়।

45নং অনুচ্ছেদে প্রদর্শিত প্রণালীতে যে কোন বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যাইবে। উদাহরণমালা 6 দেখ।

49. n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সংখ্যা হইলে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

n যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা না হয় এবং যদি $x<a$ হয়, তবে $(a+x)^n$ কে $\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n$ এই আকারে লিখিবে, আর যদি $x>a$ হয়, তবে $(a+x)^n$ কে $\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n$ এই আকারে লিখিবে।

(1) মনে কর $x<a$, সুতরাং $\frac{x}{a}<1$.

অতএব, $$(a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left\{1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=a^n+n.a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\cdots$$

(2) মনে কর $x>a$, সুতরাং $\frac{a}{x}<1$

অতএব, $(a+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$

$$=x^n\left\{1+n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=x^n+n.x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2+\cdots$$

50. নিম্নের দ্বিপদ উপপাদ্যগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ঐগুলি মনে রাখিতে হইবে।

(1) $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\cdots\cdots$

(2) $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2-\cdots\cdots$

(3) $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$

(4) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^r x^r+\cdots\cdots$

(5) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots\cdots$

(6) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots$

(7) $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+\cdots+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r+\cdots\cdots$

[দ্রষ্টব্য। এখানে দেখা গেল যে x ধনাত্মক এবং n ঋণাত্মক হইলে বিস্তৃতির পদগুলি একান্তরভাবে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয়। আর, x ও n উভয়ই ঋণাত্মক হইলে বিস্তৃতির সকল পদই ধনাত্মক হয়।]

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. Expand to four terms the following expressions.

(i) $(1+3a)^{-2}$ (ii) $(1-x)^{\frac{3}{4}}$ (iii) $(4-3a)^{\frac{3}{2}}$ (iv) $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$.

(i) $$(1+3a)^{-2}=1+(-2)(3a)+\frac{-2(-2-1)}{\lfloor 2}(3a)^2+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{\lfloor 3}(3a)^3+\cdots\cdots$$

$$=1-6a+\frac{2.3}{2.1}.9a^2-\frac{2.3.4}{3.2.1}27a^3+\cdots\cdots$$

$$=1-6a+27a^2-108a^3+\cdots\cdots$$

(ii) $$(1-x)^{\frac{3}{4}}=1+\tfrac{3}{4}(-x)+\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)}{\lfloor 2}(-x)^2+\frac{\frac{3}{4}(\frac{3}{4}-1)(\frac{3}{4}-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\tfrac{3}{4}x-\frac{3.1}{4.4.2.1}x^2-\frac{3.1.5}{4.4.4.3.2}x^3-\cdots\cdots$$

$$=1-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{32}x^2-\tfrac{5}{128}x^3-\cdots\cdots$$

(iii) $$(4-3a)^{\frac{3}{2}}=\{4(1-\tfrac{3}{4}a)\}^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}(1-\tfrac{3}{4}a)^{\frac{3}{2}}$$

$$=8(1-\tfrac{3}{4}a)^{\frac{3}{2}}\quad[\because\ 4^{\frac{3}{2}}=8]$$

$$=8\left\{1+\tfrac{3}{2}(-\tfrac{3}{4}a)+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{\lfloor 2}(-\tfrac{3}{4}a)^2+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{\lfloor 3}\left(-\frac{3a}{4}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=8\left\{1-\tfrac{9}{8}a-\frac{3.1}{2.2.2.1}\cdot\frac{9}{16}a^2-\frac{3.1.1}{2.2.2.3.2}\cdot\frac{27}{64}a^3+\cdots\right\}$$

$$=8-9a-\tfrac{27}{16}a^2-\tfrac{27}{128}a^3-\cdots\cdots$$

(iv) $$(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=1+(-\tfrac{3}{2})(-2x)+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{\lfloor 2}(-2x)^2+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)}{\lfloor 3}(-2x)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+3x+\frac{3.5}{2.2.2}.4x^2+\frac{3.5.7}{2.2.2.3.2}.8x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+3x+\tfrac{15}{2}x^2+\tfrac{35}{2}x^3+\cdots\cdots$$

উদা. 2. Expand $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$ up to 4 terms.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}=\frac{1}{(1-3x)^{\frac{2}{3}}}=(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=1+(-\tfrac{2}{3})(-3x)+\frac{-\frac{2}{3}(-\frac{2}{3}-1)}{\lfloor 2}(-3x)^2$$

$$+\frac{-\frac{2}{3}(-\frac{2}{3}-1)(-\frac{2}{3}-2)}{\lfloor 3}(-3x)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+2x+5x^2+\tfrac{40}{3}x^3+\cdots\cdots$$

উদা. 3. Find the 7th term and $(r+1)$th term of $(1-x)^{\frac{1}{2}}$.

এখানে নির্ণেয় $t_7=\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}-4)(\frac{1}{2}-5)}{\lfloor 6}(-x)^6$

$$=-\frac{1.1.3.5.7.9}{2^6\lfloor 6}.x^6=-\frac{21}{2^{10}}x^6=-\frac{21}{1024}x^6\ ;$$

এবং নির্ণেয় $t_{r+1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$

$$=(-1)^r.\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^r(-1)^{r-1}\frac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r.\lfloor r}x^r=-\frac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r\lfloor r}x^r.$$

[দ্রষ্টব্য। এখানে প্রথমে t_{r+1} নির্ণয় করিয়া r এর স্থানে 6 বসাইলে t_7 পাওয়া যাইত।]

উদা. 4. Show that $(p-q)^n$

$$=p^n\left\{1-n\left(\frac{q}{p-q}\right)+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{q}{p-q}\right)^2-\cdots\cdots\right\}.$$

$$(p-q)^n=\frac{1}{(p-q)^{-n}}=\frac{p^n\times p^{-n}}{(p-q)^{-n}}\quad\left[\because\ p^n\times p^{-n}=p^0=1\right]$$

$$=p^n\left(\frac{p}{p-q}\right)^{-n}=p^n\left(1+\frac{q}{p-q}\right)^{-n}$$

$$=p^n\left\{1-n\left(\frac{q}{p-q}\right)+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}\left(\frac{q}{p-q}\right)^2-\cdots\cdots\right\}.$$

উদা. 5. Find the general term in the expansion of $\frac{1}{(1+x^2)^3}$.

$\frac{1}{(1+x^2)^3}=(1+x^2)^{-3}$, $\therefore$ এখানে $(1+x^2)^{-3}$ এর সাধারণ পদ বা $(r+1)$ তম পদ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ পদ $=t_{r+1}$

$$=\frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(x^2)^r$$

$$=(-1)^r.\ \frac{3.4.5\cdots(r+2)}{\underline{|r}}x^{2r}$$

$$=(-1)^r.\ \frac{2.3.4.5\cdots r(r+1)(r+2)}{2\underline{|r}}x^{2r}$$

$$=(-1)^r.\ \frac{\underline{|r}.\ (r+1)(r+2)}{2\underline{|r}}x^{2r}=(-1)^r.\ \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^{2r}.$$

উদা. 6. Find the co-efficient of x^r in the expansion of $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$.

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^r থাকিবে।

$$\text{এখানে } t_{r+1}=\frac{-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}-1\right)\left(-\frac{1}{n}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}-r+1\right)}{\underline{|r}}(-nx)^r$$

$$=(-1)^r\ \frac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{n^r.\ \underline{|r}}(-1)^r n^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}x^r$$

$\therefore$ x^r এর নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}$

$[\because \ (-1)^{2r}=1]$

উদা. 7. Find the co-efficient of x^{20} in the expansion of $\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.

$$\frac{1-x}{(1+x)^2}=(1-x)(1+x)^{-2}=(1+x)^{-2}-x(1+x)^{-2}$$

এখানে $x(1+x)^{-2}$ হইতে দেখা যায় যে, $(1+x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে যে পদে x^{19} আছে, তাহার সহিত x এর গুণ হইলে গুণফলে x^{20} থাকিবে।

অতএব, $(1+x)^{-2}$ বিস্তৃতির x^{20} এর সহগ হইতে $(1+x)^{-2}$ বিস্তৃতির x^{19} এর সহগ বিয়োগ করিলে প্রদত্ত রাশির বিস্তৃতিতে x^{20} এর সহগ পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে $(1+x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে x^{20} এর সহগ

$$=(-1)^{20}\frac{2.3.4\cdots(2+20-1)}{\lfloor 20}=21 \quad [\text{ 47 (2) অনুচ্ছেদ }]$$

এবং $(1+x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে x^{19} এর সহগ

$$=(-1)^{19}\frac{2.3.4\cdots(2+19-1)}{\lfloor 19}=-20.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=21-(-20)=21+20=41.$

উদা. 8. Expand $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ in ascending power of x as far as x^5

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1-x^2)}}=(1-x)\times\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(1-x)(1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\cdots)$$

$$=1-x+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{3}{8}x^4-\tfrac{3}{8}x^5.$$

উদা. 9. Find the co-efficients of x^r and x^3 in the expansion of $\frac{2x-5}{9-6x+x^2}$ in ascending powers of x.

$$\frac{2x-5}{9-6x+x^2}=\frac{2x-5}{(3-x)^2}=\frac{2x-5}{9\left(1-\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\left(2x-5\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-2}$$

$$=\frac{1}{9}\left(2x-5\right)\left(1+2\cdot\frac{x}{3}+3.\frac{x^2}{3^2}+4\cdot\frac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+r\cdot\frac{x^{r-1}}{3^{r-1}}+(r+1)\cdot\frac{x^r}{3^r}+\cdots\cdots\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় x^r এর সহগ $=\frac{1}{9}\left(2\cdot\frac{r}{3^{r-1}}-5\cdot\frac{r+1}{3^r}\right)$

$$=\frac{1}{3^2}\left(\frac{2r}{3^{r-1}}-\frac{5r+5}{3^r}\right)=\frac{2r}{3^{r+1}}-\frac{5r+5}{3^{r+2}}=\frac{6r-5r-5}{3^{r+2}}=\frac{r-5}{3^{r+2}}.$$

এক্ষণে, r এর মান 3 ধরিয়া পাই x^3 এর সহগ $=\frac{3-5}{3^5}=\frac{-2}{243}=-\frac{2}{243}$.

উদা. 10. Find the cc-efficients of x^r and x^8 in the expansion of $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\text{to }\infty)^{\frac{1}{3}}$.

$$(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots)^{\frac{1}{3}}=\{(1+x)^{-3}\}^{\frac{1}{3}}=(1+x)^{-1}.$$

এক্ষণে, $(1+x)^{-1}$ এর $(r+1)$ তম পদ $=(-1)^r\cdot\frac{1.2.3\cdots r}{\lfloor r}x^r$

$$=(-1)^r\cdot\frac{\lfloor r}{\lfloor r}x^r=(-1)^r x^r.$$

$\therefore$ x^r এর নির্ণেয় সহগ $=(-1)^r$.

আবার, $r=8$ ধরিলে x^8 এর সহগ $=(-1)^8=1$.

উদা. 11. Which is the first negative term in the expansion of $(1+2x)^{\frac{7}{2}}$ and what is its co-efficient ?

$(1+x)^n$ এর $(r+1)$ তম পদ $=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$,

এই সাধারণ পদ হইতে দেখা যাইতেছে যে, যে-পর্যন্ত $r<n+1$ থাকিবে সে পর্যন্ত ঐ বিস্তৃতির পদগুলি ধনাত্মক হইবে।

অতএব, এখানে পদগুলি ধনাত্মক থাকিবে যে পর্যন্ত $r<\frac{7}{2}+1$ অর্থাৎ $r<4\frac{1}{2}$ থাকিবে।

$\because$ r অখণ্ড সংখ্যা, $\therefore$ প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে যখন $r>4\frac{1}{2}$ হইবে, অর্থাৎ যখন $r=5$ হইবে।

অতএব, এখানে ষষ্ঠ পদটিই প্রথম ঋণাত্মক পদ।

উহার নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{\frac{7}{2}(\frac{7}{2}-1)(\frac{7}{2}-2)\cdots(\frac{7}{2}-4)}{\lfloor 5}.2^5=\dfrac{7.5.3.1.(-1)}{2^5\lfloor 5}.2^5$

$$=-\frac{7.5.3}{5.4.3.2}=-\frac{7}{8}.$$

উদা. 12. Find the greatest term in the expansion of $(1+x)^{\frac{13}{2}}$ when $x=\frac{3}{5}$.

এখানে $\dfrac{t_{r+1}}{t_r}=\dfrac{\frac{13}{2}-r+1}{r}.x=\dfrac{\frac{15}{2}-r}{r}.\frac{3}{5}=\dfrac{45-6r}{10r}.$

অতএব, $t_{r+1}>t_r$ যতক্ষণ $45-6r>10r$ বা $45>16r$,

অর্থাৎ যতক্ষণ $r<2\frac{13}{16}$. অতএব, এখানে r এর বৃহত্তম মান 2 হইতে পারে। $\therefore$ t_3 বা তৃতীয় পদটি বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $=\dfrac{\frac{13}{2}(\frac{13}{2}-1)}{\lfloor 2}x^2=\dfrac{13.11}{2.2.2}x^2=\dfrac{143}{8}x^2.$

উদা. 13. Which is the greatest term in the expansion of $(1-x)^{-n}$ when $x=\frac{6}{7}$ and $n=\frac{5}{3}$?

$(1-x)^{-n}$ এর $\dfrac{t_{r+1}}{t_r}=\dfrac{n+r-1}{r}.x$ (সাংখ্যমানে)

$$=\frac{\frac{5}{3}+r-1}{r}.\frac{6}{7}=\frac{\frac{2}{3}+r}{r}.\frac{6}{7}=\frac{4+6r}{7r}.$$

অতএব, $t_{r+1}>t_r$ যতক্ষণ $4+6r>7r$ হয়, অর্থাৎ যতক্ষণ $r<4$ হয় এখানে r এর মান 3 পর্যন্ত হইলে $t_{r+1}>t_r$ হইবে এবং $r=4$ হইলে $4+6r=7r$ হয় বলিয়া $t_{r+1}=t_r$ হইবে।

$\therefore$ এখানে t_4 ও t_5 অর্থাৎ চতুর্থ ও পঞ্চম পদ দুইটিই বৃহত্তম পদ।

উদা. 14. Prove that $(1+x+x^2+\cdots \text{to } \infty)(1-x+x^2-\cdots \text{to } \infty)$

$$=1+x^2+x^4+\cdots \text{to } \infty.$$

প্রদত্ত বামপক্ষ $=(1-x)^{-1}\times(1+x)^{-1}$ [অনু. 50 দেখ]

$$=(1-x^2)^{-1}=(1+x^2+x^4+\cdots \text{to } \infty).$$

উদা. 15. Show that $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=1+\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2$

$$+\frac{5}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{(1+x)-2x)}{1+x}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\tfrac{1}{2}.\frac{2x}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2}.\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.3}.\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1+x}+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots$$

উদা. 16. If $y=2x+3x^2+4x^3+\cdots \text{to } \infty$, express x in a series of ascending power of y, up to the third term.

[C. U. '31]

$\therefore\quad y=2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

$\therefore\quad 1+y=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots=(1-x)^{-2}$

$$\therefore\quad (1-x)=(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\tfrac{1}{2}).\ y+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}.y^2$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}\ y^3+\cdots\cdots,$$

বা, $1-x=1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\cdots\cdots$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\cdots\cdots$

Exercise 6

Expand the following up to 4 terms :—

1. $(1+x)^{-4}$ 2. $(1-x)^{-3}$, given $|x|<1$

3. $(1+2x)^{-5}$ 4. $(1-x)^{\frac{3}{5}}$ 5. $(1+3x)^{-\frac{1}{2}}$

6. $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$ 7. $(2+a)^{-3}$ 8. $\sqrt[3]{1-x}$ [C. U. '11]

9. $(a-2x)^{-\frac{5}{2}}$ 10. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3a)^2}}$. 11. $\dfrac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}}$ [C. U.]

12. Write down the first four terms of the expansion of $\sqrt{1+x}$ in ascending power of x. [C. U.]

13. Expand $\sqrt{(1+x+x^2+x^3+\cdots \text{to } \infty)}$ in ascending powers of x as far as x^4.

Find the following terms :—

14. The 4*th* term and $(r+1)$*th* term of $(1+a)^{-2}$

15. T_4 of $(8+12x)^{\frac{2}{3}}$

16. The 8*th* and $(r+1)$*th* terms of $(1-x)^{-3}$

17. The $(r+1)$*th* term of $(a-bx)^{-1}$

The r *th* term of $(a-x)^{-\frac{1}{n}}$ [C. U.]

19. The r *th* term in the expansion of $(1-x)^{\frac{3}{2}}$. [C. U.]

Find the *general* term in the following expansions :—

20. $(1+a^2)^{-3}$ 21. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 22. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2a}}$.

23. Expand $(1-x)^{-2}$ and find the general term. [C. U. '13]

24. Expand $(1-x)^{-4}$ up to the fourth term and also find the $(r+1)$*th* term. [C. U. '16]

25. Expand $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ up to 4 terms and find the general term. [C. U. '31]

26 Find the co-efficient of x^3 in the expansion of $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$.

27. Find the co-efficient of a^{50} in the expansion of $\frac{1-a}{(1+a)^2}$.

28. Find the co-efficient of x^{10} in the expansion of $\frac{1+x}{(1-x)^3}$. [C. U. '37]

29. Find the co-efficient of x^5 in the expansion of $\frac{1+x}{1-x}$.

30. Find the co-efficient of x^7 in the expansion of $\frac{1-2x}{3+2x-x^2}$. [C. U. 1902]

31. Find the co-efficient of x^n in the expansion of $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$. [C. U. '39]

32. Find the co-efficient of x^r and x^5 in the expansion of $\frac{4x-9}{4-4x+x^2}$ in ascending powers of x.

33. Find the co-efficient of x in the expansion of $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\text{to }\infty)^2$.

34. Find the co-efficient of x^n in the expansion of $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{-n}$. [C. U. '13]

Find which is the *greatest term* in the following expansions :

35. $(1+x)^{-5}$ when $x=\frac{5}{8}$ 36. $(1+x)^{\frac{9}{2}}$ when $x=\frac{2}{3}$

37. $(2+3x)^{-n}$ when $x=\frac{1}{2}$ and $n=3\frac{2}{3}$.

38. Find the greatest co-efficient in the expansion of $(3-4a)^{\frac{11}{4}}$.

39. Which is the first negative term in the expansion of (i) $(1+2x)^{\frac{15}{2}}$, (ii) $(1-x)^{\frac{2}{3}}$ and (iii) $(1+\frac{7x}{2})^{\frac{13}{2}}$. [P. U. '47]

40. Find the first negative term in the expansion of (i) $(1+2x)^{\frac{5}{2}}$ and (ii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

41. Write down the co-efficient of the $(r+1)th$ term in the expansion of $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. [C. U. '38]

42. Which term of $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ is 15 times the same term of $(1-x)^{\frac{1}{2}}$?

43. Show that $(1+x+x^2+\cdots \text{to } \infty)^2$
$=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$, if x is numerically less than 1. [G. U. '49 ; C. U. '22]

44. Prove that $(1+x)^{-n}$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{1+n\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\cdots\right\}.$$ [C. U. '14]

45. Prove that $\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^n=1+n.\left(\frac{x}{1+2x}\right)$

$$+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2+\cdots\cdots$$

46 Show that $\sqrt{x}-1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1.3}{2^2\underline{|2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots$

47. If c be a quantity so small that c^3 may be neglected in comparison with l^3, show that $\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}$ is very nearly equal to $2+\frac{3c^2}{4l^2}$. [C U. 1888]

51. দ্বিপদ উপপাদ্যের বিবিধ প্রয়োগ

(Application of the Binomial Theorem)

আসন্ন মান, অসীম রাশির যোগফল, ভগ্নাংশের বিস্তৃতি প্রভৃতি নির্ণয়ে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ বিশেষ প্রয়োজনীয়।

52 অসীম শ্রেণী (infinite series)। যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যার সীমা নাই তাহাকে অসীম শ্রেণী বলে। যে শ্রেণীর পদের সংখ্যা সসীম তাহাকে সসীম শ্রেণী (finite series) বলে।

সকল সসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব হয়। কারণ পদের সংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ সসীম হইলে যোগফলটিও সসীম হইবে, সুতরাং তাহা নির্ণয় করা সম্ভব। ইহা আমরা প্রগতিতে দেখিয়াছি।

আর, পদের সংখ্যা অসীম হইলে যোগফল সসীম হইতেও পারে, না হইতেও পারে। অতএব, সকল ক্ষেত্রে অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় সম্ভব নহে। কোন শ্রেণীর n পদের যোগফল S_n দ্বারা সূচিত হয়।

এখন দেখ, যদি কোন অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় সম্ভব হয়, তবে তখন n ক্রমশঃ অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইয়াছে এবং তখন ঐ যোগফলটি S_n-এর সীমাস্থমানের (limiting value) সমান হইয়া পড়ে। অতএব, যদি S_n এর কোন সসীম সীমাস্থমান থাকে, তবেই সেই অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় সম্ভব হয়।

53. অভিসারী ও অপসারী অসীম শ্রেণী।

কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা (n) অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে যদি উহার n পদের সমষ্টি কোন নির্দিষ্ট মান অতিক্রম করিতে না পারে, তবে সেইরূপ শ্রেণীকে **অভিসারী** (convergent) অসীম শ্রেণী বলে। যথা,

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\infty$ এর যোগফল 2 অর্থাৎ সসীম বলিয়া ঐ শ্রেণীটি অভিসারী অসীম শ্রেণী।

যদি কোন শ্রেণীর n ক্রমশঃ অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে S_n এর সীমাস্থমানও অসীম হইয়া পড়ে, তবে সেই শ্রেণীকে **অপসারী** (divergent) অসীম শ্রেণী বলে। ইহার যোগফল নির্ণয় সম্ভব নহে। যথা,

$$1+2+3+4+\cdots\cdots.$$

আর এক প্রকার অসীম শ্রেণী আছে, তাহার যোগফল বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন হয়। যথা, $1-1+1-1+1\cdots\cdots$, ইহার সমষ্টি একবার 0 এবং একবার 1 হইবে। এইরূপ শ্রেণীকে দোলায়মান (oscillatory) অসীম শ্রেণী বলা হয়।

পরীক্ষা। কোন অসীম শ্রেণী অভিসারী কিনা তাহা পরীক্ষা করিবার নিয়ম এই যে, উহার যে কোন পদের সহিত তাহার পূর্বপদের অনুপাতের সীমাস্থমান 1 অপেক্ষা কম হইলে শ্রেণীটি অভিসারী হইবে।

কতিপয় প্রতীক। (1) $n\to\infty$ এই প্রতীক চিহ্ন দ্বারা বুঝায় যে n এর মান ক্রমশঃ অসীমের দিকে অগ্রসর হইতেছে।

যদি $r\to\infty$, তবে $\frac{1}{r}$ এর সীমাস্থমান শূন্য হয়।

(2) r এর মান ক্রমশঃ অসীমের দিকে অগ্রসর হইলে উহার সীমাস্থমান বুঝাইবার জন্য $r \underset{\to}{\text{Lt}} \infty$ এই প্রতীক ব্যবহৃত হয়।

(3) $|x|$ এই প্রতীকের দ্বারা x এর **পরম** (absolute) মান অর্থাৎ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন বর্জিত মানটি বুঝায়।

অতএব, $|r|<1$ এই প্রতীক দ্বারা বুঝায় r এর পরম মান এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এক্ষণে, r যদি কোন অসীম শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত হয়, তবে $|r|<1$ হইলে শ্রেণীটি অভিসারী হইবে।

54. অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়।

গুণোত্তর শ্রেণীর আলোচনায় দেখিয়াছ যে,

$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}$ একটি n-পদ বিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণী।

উহার প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং পদসংখ্যা n. ইহা একটি সসীম শ্রেণী। পূর্বে দেখান হইয়াছে যে, উহার n পদের যোগফল অর্থাৎ

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots\cdots(1)$$

$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots(2).$$

সাংখ্যমান হিসাবে $r<1$ হইলে প্রথম সূত্রটি এবং $r>1$ হইলে দ্বিতীয়টি ব্যবহার করা সুবিধাজনক হয়। [কিন্তু $r=1$ হইলে কোনটি ব্যবহার করা চলিবে না। তখন শ্রেণীটি $a+a+a+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত হইবে, সুতরাং তখন যোগফল $=na$ হইবে।]

এখন দেখ উপরের (1) সূত্র হইতে পাই $S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$.

এক্ষণে, যদি r এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, অর্থাৎ যদি r ধনাত্মক বা ঋণাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ হয়, তবে n এর মান যত বাড়িতে থাকিবে r^n এর পরম মান সুতরাং $\frac{r^n}{1-r}$ এর মান তত কমিতে থাকিবে। অতএব, n এর মান অসীম পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে r^n সুতরাং $\frac{r^n}{1-r}$ এর মান ক্রমশঃ অসীমভাবে ছোট হইতে থাকিবে।

$\therefore$ তখন S_n এর সীমাস্থমান $\frac{a}{1-r}$ হইবে।

অতএব, যদি $-1<r<1$ হয় এবং $n\to\infty$, তবে $S_n\to\frac{a}{1-r}$,

অর্থাৎ r এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কম হইলে ঐ শ্রেণীর অসীম পদের (বা অনন্ত পর্যন্ত) যোগফল $\frac{a}{1-r}$ হইবে। এখন যদি ঐ যোগফলকে S বা S_∞ দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $S=\frac{a}{1-r}\cdots\cdots(3)$.

55. **আবৃত্ত দশমিক (recurring decimal)।** আবৃত্ত দশমিক একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী। যথা,

(i) $\dot{.7} = .777\cdots\cdots \text{to } \infty = .7 + .07 + .007 + \cdots\cdots\infty$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots\cdots\infty,$$

ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী, যাহার প্রথম পদ $a = \frac{7}{10}$, এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{10}$.

(ii) $.2\dot{1}\dot{3} = .2131313\cdots\cdots\infty$

$$= .2 + .013 + .00013 + \cdots\cdots\infty$$

$$= \frac{2}{10} + \left(\frac{13}{10^3} + \frac{13}{10^5} + \cdots\cdots\infty\right),$$ ইহার দ্বিতীয় পদ হইতে বাকী পদগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ $= \frac{13}{10^3}$ এবং $r = \frac{1}{10^2}$.

অতএব, অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়ের প্রণালীতে আবৃত্ত দশমিককে ভগ্নাংশে প্রকাশ বা তাহার মান নির্ণয় করা যায়।

56. **আসন্ন মান নির্ণয় (approximate value)**—কোন প্রকৃত ভগ্নাংশের ঘাত যত বাড়ে তাহার মান তত ক্ষুদ্রতর হয়। যথা, $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা $(\frac{1}{2})^2$ ক্ষুদ্রতর, $(\frac{1}{2})^3$ আবার $(\frac{1}{2})^2$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ইত্যাদি।

অতএব, $x<1$ হইলে অর্থাৎ ভগ্নাংশ হইলে x^2, x^3, x^4 ……প্রভৃতির মান ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে।

এক্ষণে দেখ, x কোন অতি ক্ষুদ্র প্রকৃত ভগ্নাংশ সংখ্যা হইলে $1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \cdots\cdots$এর পর পর পদগুলি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। অতএব, যদি, x^3, x^4, x^5 প্রভৃতির মান অত্যন্ত ক্ষুদ্র হওয়ার জন্য $\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3$ প্রভৃতি পদগুলি উপেক্ষা করা চলে, তবে ঐ অসীম রাশিটির অর্থাৎ $(1+x)^n$ বিস্তৃতির মান প্রথম তিনটি পদের সমষ্টির প্রায় সমান হইবে। উহাকে ঐ বিস্তৃতির আসন্ন মান ধরা যায়।

এইরূপে যদি x এর দ্বিঘাত ও তাহার বৃহত্তম ঘাতগুলি অতি ক্ষুদ্র বলিয়া বাদ দেওয়া চলে, তবে $(1+x)^n$ এর আসন্ন মান $1+nx$ হইবে। এই নিয়ম অনুসারে কোন সংখ্যার যে কোন মূল (আসন্ন) প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

অতএব, a, b, c যদি এরূপ ক্ষুদ্র হয় যে উহাদের বর্গ বা উহাদের যে কোন দুইটির গুণফল উপেক্ষা করা যায়, তবে আসন্ন মানে ধরা যায়—

(i) $(1+a)(1+b)=1+a+b$ (ii) $(1+a)(1-b)=1+a-b$,

(iii) $(1+a)^2=1+2a$ (iv) $(1-a)^2=1-2a$

(v) $(1+a)^3=1+3a$ (vi) $\sqrt{1+a}=1+\frac{1}{2}a$

(vii) $\sqrt{1-a}=1-\frac{1}{2}a$ (viii) $\dfrac{1}{1+a}=1-a$

(ix) $(1+a)(1+b)(1+c)=1+a+b+c$, ইত্যাদি।

উপরের আলোচিত বিষয়গুলির নিম্নের উদাহরণমালায় প্রয়োগ দেখ।

উদাহরণমালা 7

[সূত্র সাহায্যে অসীম শ্রেণীর যোগফল]

উদা. 1. Find the sum to infinity $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots$

এখানে সূত্র অনুসারে $a=1$, $r=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 2. Find the sum of $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\cdots\cdots$to$\infty$.

[C. U. '22]

মনে কর, যোগফল S.

$$\therefore\ S=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\cdots\cdots\infty\right)+\left(\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\cdots\infty\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}+\frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}+\frac{3}{25}\times\frac{25}{24}=\frac{5}{12}+\frac{1}{8}=\frac{13}{24}.$$

উদা. ৩. Sum to infinity $(\sqrt{2}+1)+(1)+(\sqrt{2}-1)+\cdots$

এখানে $a=\sqrt{2}+1$ এবং $r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$$\therefore \quad S\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}=2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}.$$

উদা. 4. Prove that $a^{\frac{1}{2}}.\,a^{\frac{1}{4}}.\,a^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots$ to infinity $=a$.
[C. U., G. U.]

এখানে $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \text{to } \infty=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$

এক্ষণে $a^{\frac{1}{2}}.\,a^{\frac{1}{4}}.\,a^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots \text{to } \infty=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \text{to}\infty}=a^1=a.$

[দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগে অসীম শ্রেণীর যোগফল]

উদা. 5. Find the sum of the series

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots \text{to } \infty.$$

[দ্রষ্টব্য। দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিতে হইলে প্রথমে শ্রেণীটিকে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির আকারে পরিণত করিতে হইবে।]

এখানে প্রদত্ত শ্রেণী $=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{\underline{|2}}\,(\frac{3}{4})^2+\cdots$

$$=(1-\tfrac{3}{4})^{-\frac{1}{3}}=(\tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}.$$

[দ্রষ্টব্য সঙ্কেত। যদি সহগগুলির লবে পরপর উৎপাদকগুলি এমন একটি A. P. (সমান্তরাল শ্রেণী) হয়, যাহার সাধারণ অন্তর সূচকের হরের সমান, তবে বুঝিতে হইবে শ্রেণীটি একটি দ্বিপদ বিস্তৃতি।]

উদা. 6. Find the sum of $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1.3.5.1}{2.4.6\ 8}+\cdots \text{to } \infty.$

প্রদত্ত রাশি

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=(1+\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{3}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

উদা. 7. Find the binomial expression whose expansion is

$$1-\frac{1}{6}+\frac{1.3}{6.12}-\frac{1.3.5}{6.12.18}+\cdots\cdots,$$ and find its sum.

এখানে প্রদত্ত শ্রেণী

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots$$

$=(1+\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}$, ইহা একটি দ্বিপদ রাশি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=(1+\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{4}{3})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

উদা. 8. Show that $\sqrt{3}=1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots$ to ∞.

$$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=(\tfrac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}=(1-\tfrac{2}{3})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\lfloor 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots \text{to } \infty$$

$$=1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots \text{to } \infty.$$

উদা. 9. Show that $\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2).$

[Annamalai '41]

বামপক্ষের প্রত্যেক পদকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া এবং তৎপরে সমগ্র গুণফলকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1}{3}\left\{\frac{3.5}{3.6}+\frac{3.5.7}{3.6.9}+\frac{3.5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left\{1+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right\}-1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\tfrac{1}{3}[\{(1-\tfrac{2}{3})^{-\frac{3}{2}}\}-2]=\tfrac{1}{3}\{(\tfrac{1}{3})^{-\frac{3}{2}}-2\}=\tfrac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}}-2)=\tfrac{1}{3}(3\sqrt{3}-2).$$

উদা. 10. If x be so small that its cube and higher powers are negligible, show that $\frac{1}{(1+3x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}=3x^2$.

$$\frac{1}{(1+3x)^2}-\frac{1}{(1+2x)^3}=(1+3x)^{-2}-(1+2x)^{-3}$$

$$=\left\{1-2.3x+\frac{2.3}{\lfloor 2}(3x)^2+\cdots\right\}-\left\{1-3.2x+\frac{3.4}{\lfloor 2}(2x)^2+\cdots\cdots\right\}$$

[x^3 উপেক্ষণীয় বলিয়া বিস্তৃতির পরবর্তী পদগুলি আর ধরিতে হইবে না।]

$$=(1-6x+27x^2+\cdots)-(1-6x+24x^2+\cdots)=3x^2.$$

উদা. 11. Find the sum of the co-efficients of the first $(r+1)$ terms in the expansion of $(1-x)^{-4}$.

মনে কর $(1-x)^{-4}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r+\cdots\cdots(1)$

অতএব, এখানে $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_r$ এর মান নির্ণয় করিলেই নির্ণেয় সমষ্টি পাওয়া যাইবে।

আমরা জানি $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots\cdots(2)$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_r$

$=(1)$ ও (2) শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলে x^r এর সহগ

$=(1-x)^{-4}\times(1-x)^{-1}$ এর x^r এর সহগ

$=(1-x)^{-5}$ এর x^r এর সহগ

$$=\frac{5.6.7\cdots(5+r-1)}{\lfloor r}=\frac{5.6.7\cdots(4+r)}{\lfloor r}=\frac{1.2.3.4.5.6.7\cdots(r+4)}{1.2.3.4\lfloor r}$$

$$=\frac{\lfloor r.(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2.3.4\lfloor r}=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{24}.$$

[আবৃত্ত দশমিক]

উদা. 12. Exhibit $\dot{5}$ as an infinite series in G. P. and hence find its value as a vulgar fraction.

$\cdot\dot{5}=\cdot555\cdots\cdots$ to ∞

$=\cdot5+\cdot05+\cdot005\cdots\cdots$to ∞

$=\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\cdots\cdots$ to ∞, ইহা একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী, ইহার প্রথম পদ $\frac{5}{10}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$.

$$\therefore \quad \dot{.5}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{9}.$$

উদা. 13. Show that $\cdot 1\dot{6}$ is equivalent to an infinite geometric progression. By assuming it find its value.

[C. U. '11]

$\cdot 1\dot{6}=\cdot 1666\ldots\ldots$ to $\infty=\cdot 1+\cdot 06+\cdot 006+\cdot 0006+\cdots\cdots$ to ∞

$=\frac{1}{10}+\left(\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+\cdots\cdots \text{to}\infty\right)$, বন্ধনীর মধ্যবর্তী শ্রেণীটি গুণোত্তর শ্রেণী যাহার সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ এবং প্রথম পদ $\frac{6}{10^2}$.

$$\therefore \quad \cdot 1\dot{6}=\frac{1}{10}+\frac{\frac{6}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{6}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}.$$

(আসন্ন মান)

উদা. 14. Find the value of $(1\cdot 02)^5$ correct to 3 places of decimals by the binomial theorem.

$$(1\cdot 02)^5=\left(1+\frac{2}{100}\right)^5=\left(1+\frac{2}{10^2}\right)^5$$

$$=1+5.\frac{2}{10^2}+\frac{5.4}{\lfloor 2}.\frac{2^2}{10^4}+\frac{5.4.3}{\lfloor 3}.\frac{2^3}{10^6}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^3}+\frac{8}{10^5}+\cdots\cdots$$

$$=1+\cdot 1+\cdot 004+\cdot 00008+\cdots\cdots$$

$=1\cdot 104$ (আসন্ন 3 দশমিক অঙ্ক পর্য্যন্ত ।

(দ্রষ্টব্য । এখানে 3 দশমিক অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণেয় বলিয়া বিস্তৃতির অবশিষ্ট পদগুলি বাদ দেওয়া হইল ।)

উদা. 15. Find by the binomial theorem the cube root of 122 to 4 places of decimals.

122 এর নিকটতম তৃতীয় ঘাত $=125=5^3$.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{122}=(122)^{\frac{1}{3}}=(125-3)^{\frac{1}{3}}=(5^3-3)^{\frac{1}{3}}=\left\{5^3\left(1-\frac{3}{5^3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1-\frac{3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}=5\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{3^2}{5^6}-\frac{5}{81}\cdot\frac{3^3}{5^9}-\cdots\cdots\right\}$$

$$=5-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{3^2}{5^5}-\frac{1}{81}\cdot\frac{3^3}{5^7}-\cdots\cdots$$

$$=5-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^7}$$

$$=5-\frac{2^2}{10^2}-\frac{2^5}{10^5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdot$$

$$=5-{\cdot}04-{\cdot}00032-\frac{{\cdot}0000128}{3}$$

$$=5-{\cdot}04-{\cdot}00032-{\cdot}0000042-\cdots\cdots$$

$$=5-{\cdot}0403242=4{\cdot}9597$$ (আসন্ন 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত)।

উদা. 16. Find the approximate value of (i) $\frac{465}{10003}$ correct to 5 places of decimals and (ii) $\frac{(1{\cdot}0002)^3}{({\cdot}9993)^2}$ correct to 4 places of decimals.

(i) $$\frac{465}{10003}=\frac{465}{(10000+3)}=\frac{465}{10^4(1+{\cdot}0003)}=\frac{{\cdot}0465}{(1+{\cdot}0003)}$$

$$={\cdot}0465(1+{\cdot}0003)^{-1}={\cdot}0465(1-{\cdot}0003)$$ [আসন্ন]

$$={\cdot}0465-{\cdot}00001395={\cdot}04649$$ [আসন্ন]

(ii) $(1{\cdot}0002)^3=(1+{\cdot}0002)^3=1+3\times{\cdot}0002=1+{\cdot}0006$ (আসন্ন)

$({\cdot}9993)^2=(1-{\cdot}0007)^2=1-2\times{\cdot}0007=1-{\cdot}0014$ (আসন্ন)

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= \dfrac{1 + \cdot 0006}{1 - \cdot 0014} = (1 + \cdot 0006)(1 - \cdot 0014)^{-1}$

$$= (1 + \cdot 0006)(1 + \cdot 0014)$$

$$= (1 + \cdot 0006 + \cdot 0014 \text{ [আসন্ন]}$$

$$= 1 \cdot 0020 \text{ [দশমিক 4 অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ] ।}$$

[দ্রষ্টব্য। উপরের সমাধানে 56 নং অনুচ্ছেদের যুক্তি প্রয়োগ করা হইয়াছে। (i)-এ $(1 + \cdot 0003)^{-1}$ এর বিস্তৃতির মাত্র প্রথম দুইটি পদ এবং (ii)-এ লব ও হরের বিস্তৃতির প্রথম দুইটি করিয়া পদ লওয়া হইয়াছে, কারণ আসন্ন মানের জন্য পরবর্তী পদগুলি উপেক্ষা করা চলে। অতএব, ঐগুলিতে $(1+x)^n = 1 + nx$ ধরা হইয়াছে। আর (ii)-এ $(1 + \cdot 0006)(1 + \cdot 0014)$ এর গুণফলে $\cdot 0006 \times \cdot 0014$টি ধরা হয় নাই, কারণ ঐ গুণফল $\cdot 00000084$ এর প্রথম ছয় অঙ্ক শূন্য হইবে বলিয়া চার অঙ্ক পর্য্যন্ত আসন্ন মানে উহা উপেক্ষা করা যায়।]

Exercise 7

Find to 4 places of decimals the value of :—

1. $(1 \cdot 04)^5$ **2.** $\sqrt[4]{621}$ **3.** $(9996)^{\frac{1}{4}}$ **4.** $\sqrt{99}$

5. $(47)^{-\frac{1}{2}}$ **6.** $\sqrt[3]{\frac{601}{500}}$ **7.** $\sqrt[3]{2}$ **8.** $(630)^{-\frac{1}{4}}$

9. Evaluate $\sqrt{24}$ by means of the Binomial Theorem to 5 places of decimals. [C. U.]

Find approximately the values of :—

10. $1 \cdot 0036 \times \cdot 996$ **11.** (*a*) $\dfrac{638}{10005}$ **11.** (*b*) $\dfrac{1}{\cdot 9997}$

12. $\dfrac{(1 \cdot 00013)^3}{(\cdot 9992)^2}$.

• If a be so small that its square and higher powers may be neglected, find the value of :—

13. $\dfrac{\sqrt{1+3a}}{(1-2a)^{\frac{1}{3}}}$ 14. $\dfrac{\sqrt[3]{8+3a}-(1-a)^{\frac{1}{5}}}{(1+5a)^{\frac{3}{5}}}$

15. If x be so small that its cube and higher powers may be neglected, show that $\dfrac{1}{(1+5x)^3}-\dfrac{1}{(1+3x)^5}=15x^2$.

16. If x be so large that $\dfrac{1}{x^9}$ is negligible, show that $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}$ is approximately equal to $\dfrac{2}{3x^2}$.

17. Find the square of

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots\text{to }\infty.$$

Find the sum to infinity of the following series :—

18. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots$ 19. $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}+\cdots\cdots$

20. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{7^3}+\cdots\cdots$

21. $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots(\text{when } -1<x<1)$

22. $1-5x+9x^2-13x^3+\cdots\cdots(\text{if } -1<x<1)$

23. $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1.3}{4.8}+\dfrac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$ [C. U. '50]

24. $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1.3}{4.8}-\dfrac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$

25. $1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

26. $1-\frac{1}{8}+\frac{1.5}{8.16}-\frac{1.5.7}{8.16.24}+\cdots\cdots$

27. $1+\frac{1}{6}+\frac{1.4}{3.6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1.4.7}{3.6.9}\cdot\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

28. $1+\frac{3}{2.4}+\frac{1.3.3^2}{2^2.4^2.\lfloor 2}+\frac{1.3.5.3^3}{2^3.4^3.\lfloor 3}+\cdots\cdots$

29. $1+\frac{2}{9}+\frac{2.5}{9.18}+\frac{2.5.8}{9.18.27}+\cdots\cdots$ [B. U. '52]

30. $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\cdots\cdots$ [Annamalai '49]

31. $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ [Gujrat '52]

32. $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\cdots\cdots$ [Andhra '54]

33. $2+\frac{5}{2!\,3}+\frac{5.7}{3!\,3^2}+\frac{5.7.9}{4!\,3^3}+\cdots\cdots$ [A. U. '46]

34. $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1.3}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10}+\cdots\cdots$ [B. U. '47]

35. Find the binomial expression whose expansion is $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$ and find its sum.

36. Prove that $\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ to ∞.

37. Show that $\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

Exhibit the following as series in G. P, continued to infinity and therefrom deduce their values :—

38. $\cdot\dot{0}\dot{9}$ **39.** $\cdot0\dot{5}$ **40.** $\cdot\dot{0}8\dot{1}$ **41.** $1\cdot\dot{5}$

42. Show by the method of summation of a series in G. P. that $\sqrt{\cdot 444\cdots} = \cdot 666\cdots$

43. Find the sum of the co-efficients of the first $(r+1)$ terms in the expansion of $(1-x)^{-3}$.

44. Find the sum of the co-efficients of the first $(r+1)$ terms in the expansion of $(1-x)^{-p}$.

45. Show that $\frac{1}{2}n + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots\cdots$
$= 2^n - 1.$

46. Show that the middle term of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{4n}$ is equal to the co-efficient of x^n in the expansion of $(1-4x)^{-n-\frac{1}{2}}$.
[P. U. '54]

47. If x is so small that x^3 and higher powers of x can be neglected, show that the nth root of $(1+x)$ is equal to $\frac{2n+(n+1)x}{2n+(n-1)x}$ nearly. [Travancore '53]

48. If $x > -\frac{1}{2}$, prove that

$$\frac{x}{\sqrt{(1+x)}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \cdots$$

[Karnatak '54]

49. If n is any positive integer show that the integral part of $(3+\sqrt{7})^n$ is an odd number. [B. U. '48)

[Hints : বিবৃতি হইতে পাওয়া যায় $(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n$ = জোড় সংখ্যা ।]

50. Prove that $1 = \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \cdots\cdots$ [Agra '41]

51. Identifying as a binomial expansion, show that

$\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots=0{\cdot}4$ nearly. [Rajputana '50]

52. Prove that the co-efficient of x^n in the expansion of $\frac{1}{1+x+x^2}$ is 1, 0, or -1 according as n is of the form $3m$, $3m-1$, or $3m+1$. [P. U. '53]

Exponential and Logarithmic Series
(সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণী)

এই অধ্যায়ে আমরা সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণী নামে পরিচিত বিস্তৃতির প্রয়োগ (use) সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই বিস্তৃতিগুলির প্রমাণ পাঠ্য বহির্ভূত, কিন্তু উহাদের প্রয়োগ প্রণালী পাঠ্যভূক্ত।

[সূচক শ্রেণী]

57. The Series e (e শ্রেণী)

$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor r}\cdots\cdots$, এই অসীম শ্রেণীটিকে e এই প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ইহাকে series e বলা হয়। গণিতশাস্ত্রে ইহা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। e শ্রেণীটি অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত বটে, কিন্তু উহার মান সসীম এবং উহা 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী।

57 প্রমাণ করিতে হইবে যে e এর মান সসীম এবং 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী। (To prove that e is finite and lies between 2 and 3).

$\because \quad e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,$

∵ e এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর (কারণ ডানপক্ষের বিস্তৃতিতে 2 এর সহিত বাকি ধনাত্মক রাশিগুলি যোগ করিলে তবে e এর সমান হয়) ।

আবার, ∵ $e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$

∴ $e<1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots \text{to } \infty)$,

অর্থাৎ $e<1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$ [ডানপক্ষের অসীম শ্রেণী যোগ করিয়া]

∴ $e<3$, সুতরাং ইহার মান সসীম।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে e এর মান সসীম এবং 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী।

[দ্রষ্টব্য : e এর মান 2 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 3 অপেক্ষা কম। e শ্রেণীর ডানপক্ষের পদগুলির 6 অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ মান যোগ করিলে পাওয়া যায় $e=2{\cdot}718282$ (6 অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ)]

59. e একটি অমেয় সংখ্যা।

(To prove that e is an incommensurable number).

যদি সম্ভব হয়, ধরা যাউক e একটি প্রমেয় রাশি এবং উহা $\frac{m}{n}$ এর সমান, যেখানে m ও n দুইটিই ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অতএব, $\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}+\frac{1}{\lfloor n+1}+\cdots\cdots$,

উভয় পক্ষকে $\lfloor n$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$m\,\lfloor n-1=\lfloor n+\lfloor n+\frac{\lfloor n}{\lfloor 2}+\frac{\lfloor n}{\lfloor 3}+\cdots$$

$$+1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$$

এক্ষণে, n অখণ্ড সংখ্যা বলিয়া $\lfloor n-1$ অখণ্ড সংখ্যা, সুতরাং বামপক্ষের $m\,\lfloor n-1$ একটি অখণ্ড সংখ্যা (∵ m-ও অখণ্ড সংখ্যা)।

কিন্তু ডানপক্ষের $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ··প্রভৃতি পদগুলি ব্যতীত অন্য পদগুলি অখণ্ড রাশি।

$\therefore\ m\lfloor n-1 =$ একটি অখণ্ড রাশি $+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

এখন, $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$

এইগুলির সমষ্টি $>\frac{1}{n+1}$,

কিন্তু $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$

$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots$ [ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী]

অর্থাৎ $<\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}$ অর্থাৎ $<\frac{1}{n}$.

অতএব, বামপক্ষের পদগুলির সমষ্টি $\frac{1}{n+1}$ ও $\frac{1}{n}$ এর মধ্যবর্তী, সুতরাং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হইবে।

$\therefore\ m\lfloor n-1 =$ একটি অখণ্ড রাশি + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ; কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ, একটি অখণ্ড রাশি কখন অপর কোন অখণ্ড রাশি ও প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টির সমান হইতে পারে না। অতএব, e একটি প্রমেয় রাশি হইতে পারে না, উহা একটি অমেয় রাশি।

[*[দ্রষ্টব্য। এখানে গুণগুলি বুঝিয়া লও, $\frac{m}{n}\times\lfloor n=\frac{m}{n}\times n\lfloor n-1$

$=m\lfloor n-1$; $\frac{1\times\lfloor n}{\lfloor n+1}=\frac{1\times\lfloor n}{(n+1)\lfloor n}=\frac{1}{n+1}$; ইত্যাদি।]

60. সূচক শ্রেণী। e^x এর বিস্তৃতিকে সূচক শ্রেণী বলা হয়।

প্রমাণ করা যায় যে, xএর যে কোন বাস্তব মানে

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots \text{to } \infty \cdots (1)$$

ইহাকে সূচক উপপাদ্য (Exponential Theorem) বলা হয় এবং ইহার ডানপক্ষটি অভিসারী।

এই উপপাদ্যটির প্রমাণ পাঠ্য বহির্ভূত, তথাপি সংক্ষেপে প্রমাণ দেওয়া হইতেছে, কিন্তু ছাত্রগণকে ইহা শিখিতে হইবে না।

প্রমাণ। যদি $n > 1$ হয়, সুতরাং $\frac{1}{n} < 1$ হয়, তবে দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে

পাই, $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx.\frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}.\frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}.\frac{1}{n^3} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + x + \frac{n^2 x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}.\frac{1}{n^2} + \frac{n^3 x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}.\frac{1}{n^3} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

অতএব, n অনন্ত হইলে $(n \to \infty)$ $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \cdots$গুলি অসীম ক্ষুদ্রসংখ্যা হইবে।

সুতরাং $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots (2)$ হইবে।

অতএব, n অনন্ত হইলে (2)-এ $x=1$ ধরিয়া পাই

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots = e.$$

এখন, $\because \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$

$\therefore \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots \text{to} \infty$

[দ্রষ্টব্য। n অনন্ত পর্যন্ত বাড়িলে $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ হয়, ইহা সংক্ষেপে বুঝাইবার জন্য $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ এইভাবে লেখা হয়।

অনুরূপে $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x$ লেখা হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত। 60 নং অনুচ্ছেদে উপপাদ্য (1) x-এর সকল মানে সিদ্ধ. সুতরাং x-এর স্থানে $-x$ ও -1 বসাইয়া উহা হইতে পাওয়া যায়

$$e^{-x} = -1 - \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots + (-1)^r \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots$$

এবং $e^{-1} = 1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + \left(-1\right)^r \frac{1}{\lfloor r} + \cdots$

61. a^x এর বিস্তৃতি (Expansion of a^x)।

সূচক উপপাদ্যে x এর স্থানে cx লিখিয়া পাই

$$e^{cx} = 1 + \frac{cx}{\lfloor 1} + \frac{c^2x^2}{\lfloor 2} + \frac{c^3x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

এক্ষণে মনে কর $e^c = a$, সুতরাং $c = \log_e a$, এবং $a^x = (e^c)^x = e^{cx}$

$$\therefore \quad a^x = 1 + x \log_e a + \frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2 + \frac{x^3}{\lfloor 3} (\log_e a)^3 + \cdots \text{to} \infty.$$

ইহাকেও সূচক উপপাদ্য বলা হয়।

[a^x ও e^x কে সূচক অপেক্ষক (Exponential function) বলে।]

[লগারিদম্ শ্রেণী (Logarithmic Series)]

62. সূচক উপপাদ্য হইতে প্রমাণ করা যায় যে

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\cdots \text{to } \infty$$

ইহাকে লগারিদম্ শ্রেণী বা লগারিদম্ উপপাদ্য বলা হয়।

এই সূত্রে ডানপক্ষের পদগুলির সংখ্যা **অসীম** এবং x এর মান -1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ঐ শ্রেণী অভিসারী (convergent) হইবে।

অতএব, x এর ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতি সিদ্ধ হইবে যদি $-1<x<1$ হয়। $-1<x\leqq 1$ এই প্রতীকের অর্থ এই যে, x এর মান -1 অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু 1 এর সমানও হইতে পারে কিংবা 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও হইতে পারে। অতএব, x এর মানের ঐ সীমার মধ্যে লগারিদম্ উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। (1) লগারিদম্ উপপাদ্যে x এর স্থানে $-x$ বসাইয়া পাই, $-1<x<1$ হইলে

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots-\frac{x^r}{r}-\cdots\text{to } \infty.$$

(2). লগারিদম্ শ্রেণীতে x এর মান 1 ধরিয়া পাই,

$$\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots\cdots\text{to } \infty.$$

(3). যদি $x=\frac{1}{n}$ হয়, তবে $x<1$ হইলে $n>1$ হইবে। এক্ষণে লগারিদম্ উপপাদ্যে $x=\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাই

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots[\,n>1 \text{ হইলে }]$$

বা, $$\log_e\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \log_e(n+1)-\log_e n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots(A)$$

অনুরূপে অনুসিদ্ধান্ত (1) হইতে পাই

$$\log_e\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

বা, $\log_e(n-1)-\log_e n=-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\cdots\right)$

$$\therefore \quad \log_e n-\log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\cdots(B)$$

আবার, (A)+(B) করিয়া পাই

$$\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)\cdots(C)$$

63. সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণীর পার্থক্য।

e^x ও $\log_e(1+x)$ বিস্তৃতিদ্বয় লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, **প্রথমটিতে** প্রথম পদ 1, সমস্তপদগুলি ধনাত্মক, হরগুলি সবই factorial এবং $(r+1)$তম পদে x^r পাওয়া যায়।

দ্বিতীয়টিতে অর্থাৎ লগারিদম্ শ্রেণীতে প্রথম পদ x, পদগুলি পর্যায়ক্রমে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, হরগুলি কোনটিতে factorial নাই এবং r-তম পদে x^r পাওয়া যায়।

64. লগারিদম্ উপপাদ্যের প্রমাণটি পাঠ্য বহির্ভূত, তথাপি প্রমাণটি এখানে দেওয়া হইল। ছাত্রগণের ইহা অভ্যাস করিতে হইবে না।

সূচক উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{y^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\cdots\cdots,$$

এক্ষণে a এর স্থানে $(1+x)$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$(1+x)^y=1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2+\cdots\cdots(1)$$

আবার, x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়,

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{\underline{|3}}x^3 + \cdots\cdots(2)$$

অতএব, x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে,

$$1 + y\log_e(1+x) + \frac{y^2}{\underline{|2}}\left\{\log_e(1+x)\right\}^2 + \cdots\cdots$$

$$= 1 + xy + \frac{y(y-1)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{\underline{|3}}x^3 + \cdots\cdots,$$

এবং ইহা একটি অভেদ। অতএব, ইহার উভয়পক্ষের y এর সহগগুলি সমান হইবে।

এখানে বামপক্ষে y এর সহগ $= \log_e(1+x)$ এবং ডানপক্ষে y এর সহগ

$$= x + \frac{-1}{\underline{|2}}x^2 + \frac{(-1)(-2)}{\underline{|3}}x^3 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{\underline{|4}}x^4 + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \left(-1\right)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \cdots \text{to } \infty,$$

যখন x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

লগ তালিকা প্রণয়ন (Construction of Logarithmic Tables.)

65. e-শ্রেণীটি অর্থাৎ পূর্বে যে শ্রেণীটিকে e প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে প্রথম লগারিদম নির্ণয়ে তাহাকেই নিধান (base) ধরা হয়। এইজন্য ঐ শ্রেণীটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। e নিধানের লগারিদম্গুলি Napierian System বলা হয়, কারণ Napier উহা প্রথম উদ্ভাবন করেন। এই লগারিদম্-গুলিকে natural লগারিদম্ও বলা হয়। আর সাধারণ লগারিদমে 10কে নিধান ধরা হয়।

এক্ষণে এই Napierian লগারিদম্ নির্ণয়ে লগারিদম্ শ্রেণীর প্রয়োগ এবং তাহা হইতে সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়ের প্রণালী সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

$\log_e(1+x)$ শ্রেণীটি $x>1$ হইলে প্রয়োগ করা যায় না তাহা পূর্বে বলা হইয়াছে এবং ঐ শ্রেণীটি অতি মন্থরভাবে অভিসারী। এইজন্য দ্রুত অভিসারী অন্য শ্রেণী নির্ণয় করিয়া লগারিদম্ তালিকা প্রস্তুত করা হয়।

আমরা 62নং অনুচ্ছেদে ও উহার অনুসিদ্ধান্তে দেখিয়াছি যে,

$-1<x<1$ হইলে,

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots,$$ এবং

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)\cdots\cdots(1)$$

এক্ষণে $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ বসাইয়া, সুতরাং $x=\frac{1}{2n+1}$ ধরিয়া পাই

$$\log_e\frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\},$$

$$\therefore\ \log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(2)$$

[সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়]

আমরা লগারিদম্ অধ্যায়ে দেখিয়াছি যে, a নিধানের কোন লগারিদম্-গুলিকে b নিধানের লগারিদমে পরিবর্তিত করিতে হইলে উহাদিগকে মডিউলাস $\frac{1}{\log_a b}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অতএব, বুঝা গেল যে, সংখ্যা সমূহের 10 নিধানের সাধারণ লগারিদম্-নির্ণয়ের জন্য, ঐ সংখ্যা সমূহের Napierian (অর্থাৎ e নিধানের) লগারিদম্-গুলিকে $\frac{1}{\log_e 10}$ মডিউলাস দ্বারা গুণ করিতে হয়।

এক্ষণে দেখ, উপরের (2) শ্রেণীতে $n=1$ ধরিয়া $\log_e 2$ পাওয়া যায়। আবার, $n=2$ ধরিয়া $\log_e 3-\log_e 2$ পাওয়া যায়, সুতরাং উহা হইতে $\log_e 3$ নির্ণয় করা যাইবে। আবার $\log_e 9=\log_e 3^2=2\ \log_e 3$, সুতরাং $\log_e 3$ হইতে $\log_e 9$ পাওয়া যায়।

এক্ষণে (2) শ্রেণীটিতে $n=9$ ধরিলে, $\log_e 10-\log_e 9$ পাওয়া যাইবে, সুতরাং উহা হইতে $\log_e 10$ নির্ণয় করা যাইবে।

এইরূপে $\log_e 10$ এর মান 2·30258509···পাওয়া যায়। অতএব, সাধারণ লগারিদম্ পদ্ধতির মডিউলাস হইল $\frac{1}{2\cdot30258509}$ বা 0·43429448 ; এই মডিউলাসকে μ দ্বারা সূচিত করা হয়।

এক্ষণে, উপরের (2) শ্রেণীকে μ দ্বারা গুণ করিয়া সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়ের সূত্র (formula) পাওয়া যায়।

অতএব, ঐ সূত্রটি হইল

$$\mu \log_e(n+1)-\mu \log_e n=2\mu\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}$$

অর্থাৎ $$\log_{10}(n+1)-\log_{10} n=2\left\{\frac{\mu}{2n+1}+\frac{\mu}{3(2n+1)^3}+\frac{\mu}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}\cdots(3)$$

[দ্রষ্টব্য। দুইটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে একটির লগারিদম্ জানা থাকিলে ঐ সূত্রের সাহায্যে অপরটির লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।]

মৌলিক সংখ্যাগুলির (prime numbers) লগারিদম্ নির্ণয়ের জন্য ঐ সূত্রের প্রয়োজন হয়। কৃত্রিম সংখ্যার (composite number) মৌলিক

উৎপাদকগুলির লগারিদম্‌গুলি যোগ করিয়া ঐ কৃত্রিম সংখ্যার লগারিদম্‌ পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য। উপরের সূত্র (3) অনুসারে প্রক্রিয়াটি সহজসাধ্য নহে। সেইজন্য নিম্নে অন্য সূত্র নির্ণয় করা হইতেছে।

$\log_{10}(1+x)=\mu\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\right)$ এই সূত্রে x এর স্থানে $\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\mu\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ \log_{10}(n+1)-\log_{10}n=\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}-\cdots\cdots(4).$$

আবার, x এর স্থানে $-\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$\log_{10}\frac{n-1}{n}=-\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}-\frac{\mu}{3n^3}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \log_{10}n-\log_{10}(n-1)=\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}+\cdots\cdots(5).$$

এই সূত্রের প্রয়োগে Calculation অপেক্ষাকৃত সহজসাধ্য হয়।

উদাহরণমালা 8

[সূচক শ্রেণী সংক্রান্ত]

উদা. 1. Find the value of $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

$$\because\ e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots,$$

$\therefore$ $x=1$ ধরিয়া পাই

$$e=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots(1)$$

এবং $x=-1$ ধরিয়া পাই

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots\cdots(2).$$

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$e-\frac{1}{e}=2+2\left(\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

উদা. 2. Find the value of $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ correct to four places of decimals. (C. U. 36)

$$\because\quad e^{x}=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,$$

$\therefore\quad x=-\frac{1}{5}$ ধরিয়া পাই

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{1}{5}\right)^4-\frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\cdots\cdots$$

$$=1-\cdot 2+\frac{\cdot 04}{\lfloor 2}-\frac{\cdot 008}{\lfloor 3}+\frac{\cdot 0016}{\lfloor 4}-\frac{\cdot 00032}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

$$=1-\cdot 2+\cdot 02-\cdot 001333\cdots+\cdot 000066\cdots-\cdot 0000026\cdots+\cdots$$

$$=1\cdot 020066\cdots-\cdot 2013359\cdots=\cdot 8187$$ (আসন্ন)।

3. Find the coefficient of x^n in the expansion of

$$1+\frac{a+bx}{\lfloor 1}+\frac{(a+bx)^2}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{(a+bx)^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots$$

এখানে প্রদত্ত শ্রেণী $=e^{a+bx}=e^{a}.e^{bx}$

$$=e^{a}\left(1+\frac{bx}{\lfloor 1}+\frac{b^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{b^nx^n}{\lfloor n}+\cdots\cdots\right)$$

$\therefore\quad x^n$ এর নির্ণেয় সহগ $=e^{a}\times\frac{b^n}{\lfloor n}=\frac{e^{a}b^n}{\lfloor n}.$

উদা. 4. Find the coefficient of x^r in the expansion of $\dfrac{1+x+x^2}{e^x}$.

$$\frac{1+x+x^2}{e^x}=(1+x+x^2)e^{-x}$$

$$=(1+x+x^2)\{1-x+\cdots+(-1)^{r-2}\frac{x^{r-2}}{\lfloor r-2}+(-1)^{r-1}\frac{x^{r-1}}{\lfloor r-1}$$
$$+(-1)^r\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots\}$$

$\therefore$ x^r এর নির্ণেয় সহগ

$$=(-1)^{r-2}.\frac{1}{\lfloor r-2}+(-1)^{r-1}.\frac{1}{\lfloor r-1}+(-1)^r.\frac{1}{\lfloor r}$$

$$=(-1)^r\left(\frac{1}{\lfloor r-2}-\frac{1}{\lfloor r-1}+\frac{1}{\lfloor r}\right)$$

$$=\frac{(-1)^r}{\lfloor r}\left\{r(r-1)-r+1\right\}=\frac{(-1)^r}{\lfloor r}\left(r^2-2r+1\right)=\frac{(-1)^r(r-1)^2}{\lfloor r}.$$

[দ্রষ্টব্য। (1) ডানপক্ষের বিস্তৃতির যে পদে x^{r-2} আছে তাহাকে প্রথম উৎপাদকের x^2 এর সহিত গুণ করিলে x^r হয়। অনুরূপে x^{r-1} এর সহিত x এর গুণফলে এবং x^r এর সহিত 1 এর গুণফলে x^r হয়। অতএব, বিস্তৃতির কেবল ঐ তিনটি পদের সহগ তিনটির যোগফলই নির্ণেয় সহগ হইল।

(2). $(-1)^{r-2}=\dfrac{(-1)^r}{(-1)^2}=(-1)^r$, এবং $(-1)^{r-1}=\dfrac{(-1)^r}{(-1)^1}$ $=-(-1)^r$, সুতরাং সহগে $\dfrac{1}{\lfloor r-1}$টি ঋণাত্মক অর্থাৎ $-\dfrac{1}{\lfloor r-1}$ হইয়াছে।

(3). $\dfrac{1}{\lfloor r-2}=\dfrac{r(r-1)}{\lfloor r}$, এবং $-\dfrac{1}{\lfloor r-1}=\dfrac{-r}{\lfloor r}$.]

উদা. 5. Expand $e^{e^{cx}}$ in ascending powers of x as far as x^4.

$$e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad e^{e^{cx}} = e^{1+cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$= e^1 \times e^{cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$= e.e^y \quad \left[\text{মনে কর } y = cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right]$$

$$= e\left(1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$

$$= e\left\{1+\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)+\frac{1}{\lfloor 2}\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^2 + \frac{1}{\lfloor 3}\left(cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^3\right\}+\cdots$$

[y এর মান বসাইয়া]

$$= e(1+cx+c^2x^2+\tfrac{5}{6}c^3x^3+\tfrac{5}{8}c^4x^4+\cdots).$$

উদা. 6. Expand $\frac{x}{e^x-1}$ in ascending powers of x as far as x^4.

$$\because \quad e^x - 1 = x + \frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{120}x^4+\cdots} \cdots\cdots(1)$$

[লব ও হরকে x দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$= 1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+m_4x^4+\cdots\cdots(\text{ মনে কর })\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \quad 1 = (1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+m_4x^4+\cdots)(1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3+\tfrac{1}{120}x^4+\cdots)$$

এক্ষণে, বামপক্ষের x, x^2, x^3, x^4 প্রভৃতির সহগ 0 ; এবং ডানপক্ষের ঐগুলির সহগ যথাক্রমে $m_1+\frac{1}{2}$, $m_2+\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{6}$, $m_3+\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{6}m_1+\frac{1}{24}$, $m_4+\frac{1}{2}m_3+\frac{1}{6}m_2+\frac{1}{24}m_1+\frac{1}{120}$.

$\because$ উভয় পক্ষের x এর অনুরূপ ঘাতের সহগ সমান হইবে,

$\therefore \quad m_1+\frac{1}{2}=0, \qquad \therefore \quad m_1=-\frac{1}{2}$;

$m_2+\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{6}=0$, বা $m_2-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=0$, $\because \quad m_2=\frac{1}{12}$.

অনুরূপে $m_3=0$ এবং $m_4=-\frac{1}{720}$.

$\therefore$ (2) হইতে $\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\cdots\cdots$

[দ্রষ্টব্য। এখানে (1) হইতে সাধারণ ভাগ কার্য্যের দ্বারাও বিস্তৃতির ঐ পদগুলি নির্ণয় করা যাইত।]

উদা. 7. Show that $e^{-1}=\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 5}+\frac{6}{\lfloor 7}+\cdots\cdots$ to ∞. [C.U.'37].

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots\cdots \text{to } \infty$$

$$=\left(\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}\right)+\cdots\cdots \text{to } \infty$$

$$=\frac{3-1}{\lfloor 3}+\frac{5-1}{\lfloor 5}+\frac{7-1}{\lfloor 7}+\cdots\cdots \text{to } \infty.$$

$$=\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 5}+\frac{6}{\lfloor 7}+\cdots\cdots \text{to } \infty.$$

উদা. 8. Express $\dfrac{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\cdots}$ in terms of e.

$\because \quad e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots(1)$

এবং $e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$e+e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots$$

আবার, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$e-e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\cdots$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}=\dfrac{\frac{e^2+1}{2e}}{\frac{e^2-1}{2e}}=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}$

9. Show that

$$1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+2^2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4}+\cdots=e^2-e.$$

[Ç. U. '29]

এখানে স্পষ্টতঃ r-তম পদ $=\dfrac{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{r-1}}{\lfloor r}$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=(2-1)+\dfrac{2^2-1}{\lfloor 2}+\dfrac{2^3-1}{\lfloor 3}+\dfrac{2^4-1}{\lfloor 4}+\cdots$ to ∞

$$=\left(\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$

$=(e^2-1)-(e-1)=e^2-e.$

[দ্রষ্টব্য। সূচক উপপাদ্যে $x=2$ ধরিয়া পাই

$e^2=1+2+\dfrac{2^2}{\lfloor 2}+\dfrac{2^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,\quad \therefore\quad e^2-1=2+\dfrac{2^2}{\lfloor 2}+\dfrac{2^3}{\lfloor 3}+\cdots$]

উদা. 10. Prove that

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)=1.$$

$\because\quad 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots=e,$

এবং $1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots=e^{-1},$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=e\times e^{-1}=e\times\frac{1}{e}=1.$

উদা. 11. Find the sum of $\frac{1^2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{3^2}{\lfloor 3}+\cdots$ to ∞.

এখানে n-তম পদ অর্থাৎ $t_n=\frac{n^2}{\lfloor n}=\frac{n(n-1)+n}{\lfloor n}$

$=\frac{n(n-1)}{\lfloor n}+\frac{n}{\lfloor n}=\frac{1}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}.$

এক্ষণে $n=1, 2, 3\cdots\cdots n$ লিখিয়া পাই

$t_1=\frac{1}{\lfloor -1}+\frac{1}{\lfloor 0}=0+\frac{1}{\lfloor 0}$ [ইহাই প্রদত্ত প্রথম পদ ; এখানে $\lfloor -1$ এর সাংখ্যমান ∞, সুতরাং $\frac{1}{\lfloor -1}=0$ ধরা হয়]

$t_2=\frac{1}{\lfloor 0}+\frac{1}{\lfloor 1}$

$t_3=\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}$

....

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\left(\frac{1}{\lfloor 0}+\frac{1}{\lfloor 1}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n-2}+\cdots\right)$

$+\left(\frac{1}{\lfloor 0}+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n-1}+\cdots\right)$

$=e+e=2e.$

উদা. 12. Sum to infinity the series

$$\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1+x}{\lfloor 2}+\frac{1+x+x^2}{\lfloor 3}+\frac{1+x+x^2+x^3}{\lfloor 4}+\cdots$$

এখানে $t_n=\frac{1+x+x^2+\cdots\text{to } n \text{ terms}}{\lfloor n}=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor n}$

$\therefore \quad t_1=\frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 1},\ t_2=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 2},\ t_3=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 3},\cdots$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল

$$=\frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{\lfloor 1}+\frac{1-x^2}{\lfloor 2}+\frac{1-x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}\left\{\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)-\left(\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{1-x}\left\{(e-1)-(e^x-1)\right\}=\frac{e-e^x}{1-x}.$$

উদা. 13. Find the value of $1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1.3}{\lfloor 4}+\frac{1.3.5}{\lfloor 6}+\cdots\text{to }\infty.$

প্রদত্ত রাশি $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4.6}+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=e^{\frac{1}{2}}.$$

উদা. 14. Apply the exponential and the binomial theorems to show that $n^n-n(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n+\cdots=n!$

[Poona '52]

সূচক শ্রেণী হইতে পাই $(e^x-1)^n=\left(x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)^n\cdots(1)$;

এক্ষণে ডান পক্ষের xএর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে বিস্তৃতি হইতে x^nএর সহগ পাওয়া যায় 1.

আবার দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাই

$$(e^x-1)^n=e^{nx}-ne^{(n-1)x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}e^{(n-2)x}-\cdots(2).$$

এখানে বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ হয়

$$\frac{n^n}{\lfloor n}-n\frac{(n-1)^n}{\lfloor n}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.\frac{(n-2)^n}{\lfloor n}-\ldots\ldots$$

(1) ও (2) এ x^n এর সহগ দুইটি সমান ধরিয়া পাই

$$\frac{n^n}{\lfloor n}-n.\frac{(n-1)^n}{\lfloor n}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.\frac{(n-2)^n}{\lfloor n}-\cdots=1.$$

এক্ষণে, উভয় পক্ষকে $\lfloor n$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$n^n-n(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-2)^n-\cdots=\lfloor n.$$

উদা. 15. Express $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ in ascending powers of x where $i=\sqrt{-1}$.

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{\lfloor 2}+\frac{(ix)^3}{\lfloor 3}+\frac{(ix)^4}{\lfloor 4}+\frac{(ix)^5}{\lfloor 5}+\frac{(ix)^6}{\lfloor 6}+\cdots$$

$$=1+ix-\frac{x^2}{\lfloor 2}-i\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+i\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots(1)$$

অনুরূপে, $e^{-ix}=1-ix-\frac{x^2}{\lfloor 2}+i\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-i\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) এর যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\tfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots\text{to }\infty.$$

[লগারিদম্ শ্রেণী সংক্রান্ত]

উদা. 16. Find the value of (i) $\log_e 2$ and (ii) $\log_e 10$ correct to 4 places of decimals.

(*i*) 62 অনুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত (2) এর সূত্র (*c*) হইল

$$\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)$$

একণে n এর মান 3 ধরিয়া পাই

$$\log_e 4-\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\right)$$

উহার বামপক্ষ $=\log_e 2^2-\log_e 2=2\log_e 2-\log_e 2=\log_e 2.$

$$\therefore\quad \log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\right)$$

$$\begin{array}{lr|r}
\text{একণে } \dfrac{1}{3}=\cdot\dot{3} & =\cdot 3333 & 33 \\
\dfrac{1}{3.3^3}=\dfrac{\cdot\dot{3}}{3.3^2}=\dfrac{\cdot 037037}{3} & =\cdot 0123 & 45 \\
\dfrac{1}{5.3^5}=\dfrac{\cdot 037037}{5.3^2}=\dfrac{\cdot 004115}{5} & =\cdot 0008 & 23 \\
\dfrac{1}{7.3^7}=\dfrac{\cdot 004115}{7.3^2}=\dfrac{\cdot 000457}{7} & =\cdot 0000 & 65 \\
\dfrac{1}{9.3^9}=\dfrac{\cdot 000457}{9.3^2}=\dfrac{\cdot 000050}{9} & =\cdot 0000 & 05 \\
\hline
 & \cdot 3465 & 71
\end{array}$$

$\therefore$ ডান পক্ষ $=2\times\cdot 346571=\cdot 693142$

$\therefore$ $\log_e 2=\cdot 6931$ (4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)।

[দ্রষ্টব্য। 65 অনুচ্ছেদের সূত্র (2) হইতেও 3 $\log_e 2$ এর মান নির্ণয় করা যায়।]

(ii) সূত্র (c) এ n এর মান 9 বসাইয়া পাই

$$\log_e 10-\log_e 8=2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\right);$$

$$\log_e 8=\log_e 2^3=3\log_e 2=3\times\cdot 693142=2\cdot 079426$$

$$\text{এক্ষণে,}\quad \frac{1}{9} = \cdot\dot{1} \qquad\qquad = \cdot 1111 \mid 11$$

$$\frac{1}{3.9^3} = \frac{\cdot\dot{1}}{3.9^2} = \frac{\cdot 001221}{3} \qquad = \cdot 0004 \mid 07$$

$$\frac{1}{5.9^5} = \frac{\cdot 001221}{5.9^2} = \frac{\cdot 000005}{5} = \cdot 0000 \mid 01$$

$$\cdot 1115 \mid 19$$

$\therefore$ ডান পক্ষ $= 2 \times \cdot 111519 = \cdot 223038$

$\therefore \quad \log_e 10 = \log_e 8 + \cdot 223038 = 2\cdot 079426 + \cdot 223038$

$= 2\cdot 302464 = 2\cdot 3025$ (আসন্ন)।

উদা. 17. Calculate $\log_{10} 3$ correct to 4 places of decimals, given $\mu = 0\cdot 43429448$.

$$\because \quad \log_e n - \log_e (n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots$$

$\therefore \quad n = 10$ বসাইয়া পাই $\log_e 10 - \log_e 9 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2.100} + \dfrac{1}{3.1000} + \cdots$

$$\therefore \quad \log_{10} 10 - \log_{10} 9 = 0\cdot 43429448 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} + \cdots\right),$$

কিন্তু $\log_{10} 10 = 1$ এবং $\log_{10} 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$

$\therefore \quad 1 - 2 \log 3 = \cdot 0434294 \cdots + \cdot 0021714 \cdots + \cdot 0001447 \cdots +$

$\cdot 0000108 \cdots + \cdot 0000086 \cdots + \cdots = \cdot 0457649 \cdots$

$\therefore \quad \log 3 = \frac{1}{2}(1 - \cdot 0457649 \cdots) = \cdot 4771$ (4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)।

[দ্রষ্টব্য। $\because \log_e \dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots\right)$

$\therefore \quad x = \dfrac{1}{2}$ ধরিয়া পাই $\dfrac{1+x}{1-x} = 3$, সুতরাং

$\log 3 = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3.2^3} + \dfrac{1}{5.2^5} + \cdots\right)$. এক্ষণে ভাগ ক্রিয়া দ্বারা ডানপক্ষের মান নির্ণয় করিয়া log 3 এর মান পাওয়া যাইবে। এই প্রণালী অপেক্ষা উপরে প্রদর্শিত প্রণালী সহজ।]

উদা. 18. Find log 10005 to six places of decimals.

$10005 = 10^4 \times 1{\cdot}0005$, $\therefore$ $\log 10005 = \log(10^4 \times 1{\cdot}0005)$

$= \log 10^4 + \log 1{\cdot}0005 = 4 + \log 1{\cdot}0005$

এক্ষণে, $\because$ $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots$

$\therefore$ $\log_{10}(1+x) = \mu\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$

$\therefore$ $x = {\cdot}0005$ বসাইয়া পাই

$\log 10005 = 4 + {\cdot}43429448\{{\cdot}0005 - \frac{1}{2}({\cdot}0005)^2\}$

[6 দশমিক পর্য্যন্ত শুদ্ধ মানের জন্য বাকী পদগুলি নিষ্প্রয়োজন]

$= 4 + {\cdot}000217 = 4{\cdot}000217.$

উদা. 19. Show that $\log_e 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots$

$\because$ $-1 > x \leqslant 1$ হইলে,

$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$ হয়

$\therefore$ xএর মান 1 বসাইয়া পাই

$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots$

$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots\cdots$ (A)

আবার, $\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots\cdots$

$= 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{7}) - \cdots\cdots$

$= 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \cdots\cdots$ (B)

এক্ষণে (A) ও (B) যোগ করিয়া পাই

$$2\log_e 2=1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}\right)+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{3-1}{1.2.3}+\frac{5-3}{3.4\,5}+\frac{7-5}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \log_e 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

উদা. 20. Prove that $\frac{1}{2\lfloor 1}+\frac{1}{2^2\lfloor 2}+\frac{1.2}{2^3\lfloor 3}+\frac{1.2.3}{2^4\lfloor 4}+\cdots=\log_e 2.$

$$\text{বামপক্ষ}=1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots$$

$$=-\log_e\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\log_e\frac{1}{2}=\log_e 2.$$

[দ্রষ্টব্য। (1) এখানে শ্রেণীতে $\frac{1}{2}=x$ ধরিলে উহা $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$ অর্থাৎ উহা $-\log_e(1-x)$ হয়। (2) $-\log_e\frac{1}{2}=-\log_e 2^{-1}=+\log_e 2.$]

উদা. 21. Sum to infinity $1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots\cdots$

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}+\frac{1}{7.2^7}+\cdots\right)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)\quad [\,x=\tfrac{1}{2}\text{ ধরিয়া}\,]$$

$$=\log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\quad [\,x\text{ এর মান }\tfrac{1}{2}\text{ বসাইয়া}\,]$$

$$=\log_e 3.$$

উদা. 22. Sum to infinity the series

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}=\cdots, \text{where } x^2<1.$$

$$\because \quad \frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণী $=(1-\frac{1}{2})x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x^2+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})x^3+\cdots$

$$=(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots)-(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{4}x^3+\cdots)$$

$$=-\log_e(1-x)+\{1-(1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{4}x^3+\cdots)\}$$

$$=-\log_e(1-x)+\left\{1-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)\right\}$$

$$=-\log_e(1-x)+1-\frac{1}{x}\times-\log_e(1-x)$$

$$=-\log_e(1-x)+1+\frac{1}{x}\log_e(1-x)$$

$$=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\log_e\left(1-x\right)=1+\frac{1-x}{x}\log_e(1-x).$$

উদা. 23. Expand $\log_e(1+x+x^2)$ and find the general term.

$$\because \quad 1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x},$$

$$\therefore \quad \log_e(1+x+x^2)=\log_e\frac{1-x^3}{1-x}$$

$$=\log_e(1-x^3)-\log_e(1-x)$$

$$=(-x^3-\tfrac{1}{2}x^6-\tfrac{1}{3}x^9-\cdots)-(-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\cdots)$$

$$=(-x^3-\tfrac{1}{2}x^6-\tfrac{1}{3}x^9-\cdots)+(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots) \qquad \cdots(1)$$

$$=x+\tfrac{1}{2}x^2+(\tfrac{1}{3}-1)x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5+(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2})x^6+\cdots$$

$$=x+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{3}x^6+\cdots\cdots$$

একণে (1) হইতে দেখা যায় যে, প্রথম শ্রেণীটিতে (প্রথম বন্ধনীর মধ্যস্থিত শ্রেণীতে) x এর ঘাতগুলি সবই 3 এর গুণিতক বা 3 দ্বারা বিভাজ্য। 3 দ্বারা বিভাজ্য নহে এরূপ x এর কোন ঘাত ঐ শ্রেণীভুক্ত হইতে পারে না।

এখন মনে কর x^r বিশিষ্ট পদটি সাধারণ পদ।

(i) অতএব, r যদি 3 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে নির্ণেয় সাধারণ পদ হইবে প্রথম বন্ধনীভুক্ত শ্রেণীর $\frac{r}{3}$ তম পদ এবং অপর শ্রেণীটির r-তম পদের সমষ্টি।

এখানে প্রথম শ্রেণীর $\frac{r}{3}$ তম পদ $= -\frac{1}{\frac{r}{3}}x^r = -\frac{3}{r}x^r$;

এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর r-তম পদ $=\frac{1}{r}x^r$;

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ পদ $=\left(-\frac{3}{r}+\frac{1}{r}\right)x^r = -\frac{2}{r}x^r$.

(ii) আবার r যদি 3 দ্বারা বিভাজ্য না হয়, তবে প্রথম শ্রেণীর কোন পদে x^r থাকিবে না, সুতরাং দ্বিতীয় শ্রেণীর r-তম পদই সাধারণ পদ হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে নির্ণেয় সাধারণ পদ $=\frac{1}{r}x^r$.

উদা. 24. Expand $\log_e(1+x+x^2+x^3)$ in ascending powers of x and find the coefficients of x^{2r} and x^{2r+1}.

$$\because \quad 1+x+x^2+x^3=(1+x)(1+x^2)$$

$$\therefore \quad \log_e(1+x+x^2+x^3)=\log_e(1+x)(1+x^2)$$
$$=\log_e(1+x)+\log_e(1+x^2)$$
$$=(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots)+(x^2-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{3}x^6+\cdots)$$
$$=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{3}{4}x^4\cdots\cdots;$$

একণে, x^{2r} এর সহগ $=-\frac{1}{2r}+(-1)^{r-1}\frac{1}{r}$ হইবে,

অতএব, r যুগ্ম হইলে x^{2r} এর সহগ $=-\frac{3}{2r}$,

এবং r অযুগ্ম হইলে x^{2r} এর সহগ $=\frac{1}{2r}$.

আবার, x^{2r+1} এর সহগ $=\frac{1}{2r+1}$.

উদা. 25. If $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots$, show that

$$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots.$$ [C. U. '31]

$\because \quad y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots=\log_e(1+x)$

$\therefore \quad 1+x=e^y, \ \therefore \quad x=e^y-1=\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\right)-1$

$$=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots$$

উদা. 26. If α and β are the roots of the equation $ax^2-bx+c=0$, show that $\log_e(a+bx+cx^2)$

$$=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots\cdots.$$

$\because \quad ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের α ও β দুইটি বীজ,

$\therefore$ দ্বিঘাত সমীকরণতত্ত্ব হইতে পাই $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

এক্ষণে, $a+bx+cx^2=a\left(1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)$

$$=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}$$
$$=a(1+\alpha x)(1+\beta x)$$

$\therefore \quad \log_e(a+bx+cx^2)=\log_e a+\log_e(1+\alpha x)+\log_e(1+\beta x)$

$$=\log_e a+\left(\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\cdots\right)+\left(\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\cdots\right)$$

$$=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots\cdots$$

Exercise 8

[সূচক শ্রেণী সংক্রান্ত]

1. Find the value of $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$.

2. Find the value of $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ correct to 4 places of decimals

3. Find the coefficient of x^r in the expansion of $\frac{1-x}{e^x}$.

4. Find the coefficient of x^n in the expansion of $\frac{p-qx}{e^x}$.

5. Expand e^{e^x} in ascending powers of x as far as x^4.

[C. U. '38]

6. Expand $e^{e^{px}}$ in ascending powers of x.

7. Find the coefficient of x^n in the expansion of $\frac{1-x-x^2}{e^x}$.

8. Expand $\frac{2x}{e^x-1}$ in ascending powers of x as far as x^4.

9. Find the coefficient of x^r in the expansion of $\frac{1+3x+x^2}{e^x}$.

10. Find the co-efficient of x^n in the expansion of $(1+x+x^2)e^{-x}$. [C. U. '15]

11. Express $\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\cdots\right)$ in terms of e. [C. U. '38]

Show that :

12. $\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{4}{\lfloor 3}+\frac{6}{\lfloor 5}+\cdots$ to $\infty=e$. [C. U. '36]

13. $\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\right)^2-\left(1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots\right)^2=1.$

14. $1+\frac{1+2}{\underline{|2}}+\frac{1+2+3}{\underline{|3}}+\frac{1+2+3+4}{\underline{|4}}+\cdots=\frac{3}{2}e.$ [C. U. '35]

15. $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\cdots=\frac{e}{2}.$ [G. U. '49]

16. $y=1+\log_e y+\frac{(\log_e y)^2}{\underline{|2}}+\frac{(\log_e y)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

17. $\frac{1^3}{\underline{|1}}+\frac{2^3}{\underline{|2}}+\frac{3^3}{\underline{|3}}+\frac{4^3}{\underline{|4}}+\cdots=5e.$ [C. U. '39]

18. $\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{\underline{|5}}+\frac{1}{\underline{|6}}-\cdots=\frac{1}{e}.$

19. $\dfrac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots}{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots}=\frac{e-1}{e+1}.$ [C. U. '34]

20. $\frac{1^2.2^2}{1!}+\frac{2^2.3^2}{2!}+\frac{3^2.4^2}{3!}+\cdots$ to $\infty=27e.$ [Andhra, '53]

21. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots=\frac{e^2+1}{2e}$

22. $1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}e\,(e^2-1).$ [Madras '53]

23. Expand $\left(1+\frac{a^2}{\underline{|2}}+\frac{a^4}{\underline{|4}}+\cdots\right)^2$ in ascending powers of a.

24. Prove that $e^{-1}=2\left(\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{3}{7!}+\cdots\right).$ [Osmania '52]

Find the sum of :

25. $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{9}{4!}+\cdots\cdots$ 26. $\frac{1^2}{\underline{|1}}+\frac{2^2}{\underline{|2}}+\frac{3^2}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

27. $1+\dfrac{1+2}{\underline{|2}}+\dfrac{1+2+2^2}{\underline{|3}}+\dfrac{1+2+2^2+2^3}{\underline{|4}}+\cdots$

28. $\dfrac{5}{\underline{|1}}+\dfrac{11}{\underline{|2}}+\dfrac{19}{\underline{|3}}+\dfrac{29}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$ to infinity.

29. $1+\dfrac{1+2}{1.2}+\dfrac{1+2+3}{1.2.3}+\dfrac{1+2+3+4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$

30. $1+\dfrac{2^3}{\underline{|2}}+\dfrac{3^3}{\underline{|3}}+\dfrac{4^3}{\underline{|4}}+\cdots$ to ∞. [Agra '55]

31. $\dfrac{2.3}{3!}+\dfrac{3.5}{4!}+\dfrac{4.7}{5!}+\dfrac{5.9}{6!}+\cdots$ [Mysore '52]

32. $1+\dfrac{2^3}{1!}x+\dfrac{3^3}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{(n+1)^3}{n\,!}x^n+\cdots$ [B. U. '48]

33. Sum to infinity the series whose nth term is $\dfrac{n^3}{\underline{|n}}$.

[C. U. '39]

34. Find the value of $\dfrac{1.2}{\underline{|1}}+\dfrac{2.3}{\underline{|2}}+\dfrac{3.4}{\underline{|3}}+\dfrac{4.5}{\underline{|4}}+\cdots$ to ∞.

[G. U. '48]

[লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী সংক্রান্ত]

35. Calculate log 2 to two places of decimals.

36. Find log 10008 to 6 places of decimals, having given $\mu = \cdot 43429448$.

37. Show that $\log_e 10 = 3\log_e 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^3 - \cdots$

[Madras '49]

Prove that

38. $\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{6.7}+\cdots = 1-\log_e 2.$ [C. U. '40]

39. $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.2^2}+\dfrac{1}{3.2^3}+\cdots = \log_e 2.$

40. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$

[C. U. '45]

41. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots$ to $\infty=3\log_e 2-1$.

[C.U.'58]

42. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x^2-1}{2(x+1)^2}+\frac{x^3-1}{3(x+1)^3}+\cdots=\log x$. [Madras '54]

43. Find the value of $2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5}+\cdots\right)$

[Annamalai '49]

44. Show that $\log_e(n+1)-\log_e(n-1)$

$=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)$. [C. U. '46]

45. Show that $\log_e 3=1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots$

[P. U. '49]

Sum to infinity

46. $1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\cdots$ [C. U. '43]

47. $1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6}+\cdots$ [C. U. '49]

48. $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$, if $x<1$. [C. U. '44]

49. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{4.2^4}+\cdots$ [C. U. '53]

50. Expand $\log_e(1-3x+2x^2)$ in ascending powers of x and find the coefficient of x^n.

51. Find the coefficient of x^n in the expansion of $\log_e(1+x+x^2)$.

52. Expand $\log_e\sqrt{(1+x)}$ in ascending powers of x.

53. Expand $\log_e(1+x+x^2+x^3)$ in ascending powers of x and find the coefficient of x^{2n}.

54. Expand $\log_e \{x^2+(a+b)x+ab\}-2\log_e x$ in a series in descending powers of x. [C. U. '12]

55. If $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$, show that $x=1-e^{-y}$

$$=y-\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}-\frac{y^4}{\lfloor 4}+\cdots$$ [C. U. '50]

56. Find the general term in the expansion of $\log_e(1+x-2x^2)$.

57. Show that the co-efficient of x^n in the expansion of $\log_e \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ in ascending powers of x is $\frac{3}{n}$ of $-\frac{1}{n}$ according as n is or is not a multiple of 4.

58. If α and β are the roots of the equation $ax^2-bx+c=0$, show that $\log(a-bx+cx^2)$

$$=\log a-(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2-\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots$$

59. If α and β are the roots of the equation $x^2-px+q=0$, show that $\log_e(1+px+qx^2)=(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\cdots$

60. Prove that $\log_e m$

$$=2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\right\}$$

61. If $y=x+x^2+\cdots+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n+1}x^{n+1}+\cdots$ to ∞,

prove that $y^2-y+x=0$. [C. U. '33]

62. Write the series for e^x and $\log_e(1+x)$.

If $a>0$, deduce from the first series that

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{\lfloor 3}(\log_e a)^3+\cdots$$

If $y=1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots$ and $z=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\cdots$,

show that $x=\log_e \frac{1}{1-e^z}$. [C. U. '51]

63. Write the exponential series for e^x. Deduce that $y=1+\log_e y+\frac{1}{\lfloor 2}(\log_e y)^2+\frac{1}{\lfloor 3}(\log_e y)^3+\cdots$. Then, putting $y=(1+x)^n$, deduce the logarithmic series $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

Can this infinitive series be a valid expansion for $\log_e(1+x)$ for all values of x ?

Show that $\log_e 2=\cdot623\cdots$ [C. U. '52]

64. Show that $\log_e \frac{4}{e}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\cdots$

[Andhra '50]

65. Find the Napierian logarithm of $\frac{1001}{999}$ correct to 7 places of decimals. [A. U. '50]

66. Prove that $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\right)^2$

$$=1+\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)^2.$$ [M. U. '49]

67. Find the sum of $1+\frac{\log_e 2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e 2)^2}{\lfloor 3}+\cdots$ [B. U. '47]

68. If $x>1$, prove that

$$2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots$$

[Agra '41]

69. Show that the co-efficient of x^n in the expansion of $\log_e(1+x+x^2)$ in ascending powers of x is $\frac{1}{n}$ or $\frac{2}{n}$ according as n is not or is a multiple of 3. [B. U. '48]

70. If α and β are the roots of the equation $x^2-px+q=0$, show that $-\log_e(1-px+qx^2)$

$$=(\alpha+\beta)x+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\cdots+\left\{\frac{(\alpha^n+\beta^n)}{n}\right\}x^n.$$ [U. U. '50]

Graphs (লেখ)

66. Graphs of x^n (n যে-কোন অখণ্ড ধনরাশি)।

n এর মান যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড রাশি হইলে x^n এর লেখ অঙ্কন প্রণালী আলোচনা করা হইতেছে।

অখণ্ড ধনরাশি জোড় ও বিজোড় দুই প্রকার হইতে পারে, সুতরাং আমরা n এর ঐ দুই প্রকার মান লইয়া আলোচনা করিব।

(*a*). n যদি কোন **বিজোড় অখণ্ড ধনরাশি** হয়, তবে উহার মান 1, 3, 5, 7···প্রভৃতি হইবে এবং ঐ মানের সাধারণ আকার হইল $2m+1$ (কারণ m এর যে-কোন অখণ্ড মানে $2m+1$ বিজোড় হইবে)।

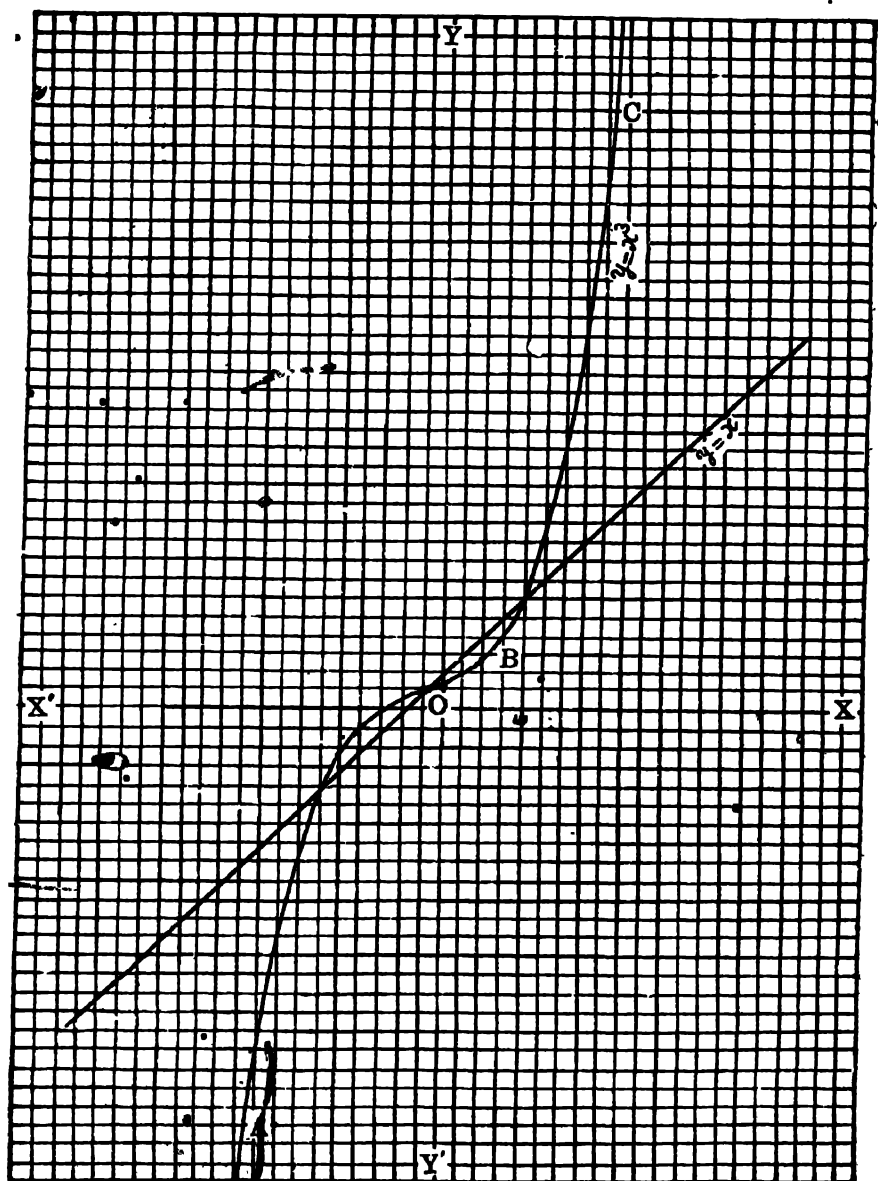
মনে কর $y=x^n$

(i) এক্ষণে $n=1$ হইলে, $y=x$ হইবে এবং ইহার লেখ অঙ্কন করা সহজ। ইহা তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। এই লেখ অঙ্কনের জন্য $(-3, -3)$, $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 4)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিলে যে সরলরেখাটি পাওয়া যায় তাহাই $y=x$ এর লেখ। লেখ 1 দেখ। এখানে ·5″=1 একক ধরিয়া অর্থাৎ লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর 5 গুণ=1 একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কন করা হইয়াছে।

(ii) $n=3$ হইলে, $y=x^3$ হইবে। উদ্দিষ্ট লেখটির উপরিস্থ কতিপয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক-তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল।

x	·5	−·5	·6	−·6	1	−1	1·5	−1·5	2	−2
y	·125	−·125	·2	−2	1	−1	3·4	−3·4	8	−8

·5″=1 একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট ABC লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 1 দেখ]

[লেখ 1]

দ্রষ্টব্য। লেখটিতে দেখা যাইতেছে যে, উহা x-অক্ষকে O মূল বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া ঐ বিন্দুতে অক্ষটিকে অতিক্রম (cross) করিয়াছে এবং দুইটি বিপরীত পাদে (এখানে প্রথম ও তৃতীয় পাদে) লেখটির অংশদ্বয় প্রতিসম (Symmetrical)। $y=mx^3$ আকারের যে-কোন সমীকরণের লেখ সম্বন্ধে এই মন্তব্যগুলি প্রযোজ্য। m ধনাত্মক হইলে লেখটি প্রথম ও তৃতীয় পাদে এবং m ঋণাত্মক হইলে উহা দ্বিতীয় ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত থাকিবে।

আরও লক্ষ্য কর যে, মূল বিন্দুর কাছাকাছি বিন্দুগুলি লইয়া লেখ অঙ্কন করা হইয়াছে। x এর মান হইতে y এর মান নির্ণয়ের জন্য লগ তালিকার সাহায্য লওয়া হয়।

(iii) $n=5$ হইলে $y=x^5$ হইবে। উহার লেখ অঙ্কনের জন্য নিম্নের স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল :—

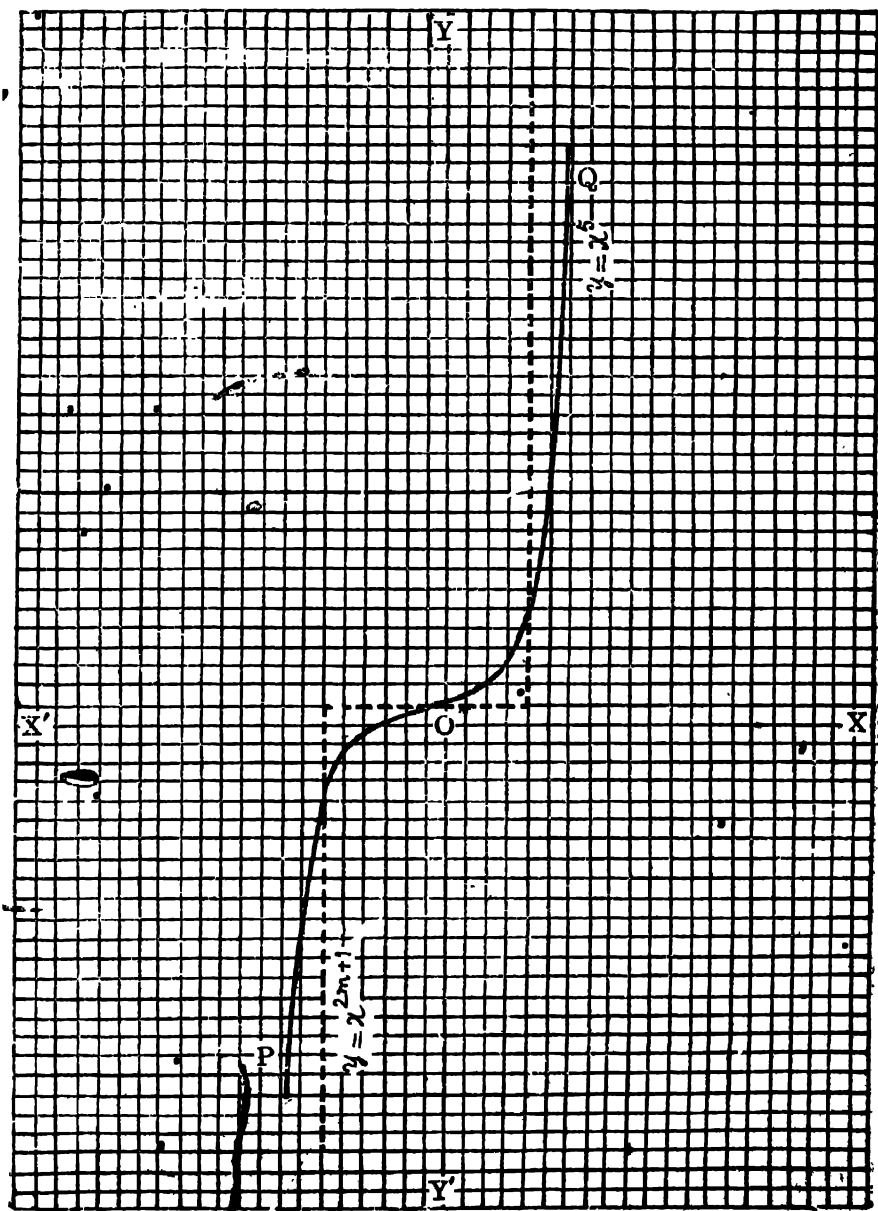
x	0	·4	− 4	·8	− ·8	1	−1	−1·1	1·1	1·2	−1·2	1·3	−1·3
y	0	·01	− ·01	·3	− ·3	1	−1	−1·6	1·6	2·5	−2·5	3·7	−3·7

এখানেও ·5″ = 1 একক ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া লেখটি অঙ্কন করা হইল। [লেখ 2 দেখ]

দ্রষ্টব্য :—স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের সময় y এর মান সাধারণতঃ এক দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ মান ধরা হয়। $y=x^3$ এর লেখটি সম্বন্ধে যে সকল মন্তব্য করা হইয়াছে, সেগুলি এই $y=x^5$ লেখটি সম্বন্ধেও প্রযোজ্য।

(iv) $y=x^{2m+1}$ এর m যদি অতি বৃহৎ অখণ্ড ধনরাশি হয়, তবে ঐভাবে স্থানাঙ্কের তালিকা প্রস্তুত করিয়া লেখ অঙ্কন করা হয় না। এক্ষেত্রে সীমাস্থ-মান প্রণালী (method of limits) অবলম্বন করা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। (1) এ পর্যন্ত যে লেখগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইল ঐ আকারের লেখগুলি $(-1, -1)$, $(0, 0)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। (2) ঐ লেখগুলির উপরিস্থিত যে-কোন (x, y) বিন্দুর অনুরূপ

[লেখ 2]

$(-x, -y)$ বিন্দু ঐ লেখস্থিত হইবে। (3) $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^{2m+1}$ প্রভৃতি লেখগুলি x-অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া ঐ বিন্দুতে x অক্ষকে পার হইয়া বিপরীত পাদে গিয়াছে। (4) লেখগুলি প্রথম ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং ঐ দুই পাদের অংশদ্বয় পরস্পর প্রতিসম অর্থাৎ প্রতিচ্ছবি। (5) $y=x^{2m+1}$ এর m বৃহৎ অখণ্ড ধনরাশি হইলে লেখটি হইতে দেখা যায় যে, m এর মান 0 হইতে ক্রমশঃ 1, 2, 3 প্রভৃতি বাড়িতে থাকিলে, $x>-1$ হইতে $x<1$ সীমার মধ্যে লেখটির অংশ ক্রমশঃ $x=\mp 1$এর সীমার মধ্যে x-অক্ষের নিকটতর হইয়াছে। আবার, ঐ সীমার বাহিরে অর্থাৎ $x<-1$ হইতে $x>-\infty$ সীমা ও $x>1$ হইতে $x<\infty$ সীমাদ্বয়ের মধ্যস্থিত লেখটির অংশদ্বয় যথাক্রমে $x=-1$ রেখার ও $x=1$ রেখার ক্রমশঃ অধিকতর নিকটবর্তী হইয়াছে এবং m এর মান অতি বৃহৎ হইলে ঐ অংশদ্বয় ঐ রেখা-গুলির সহিত প্রায় সমাপতিত হইবে।

(b). n যদি কোন জোড় অখণ্ড ধনরাশি হয়, তবে উহার মান 2, 4, 6 প্রভৃতি হইবে এবং ঐ মানের সাধারণ রূপ হইল $2m$ (কারণ m এর যে কোন অখণ্ড মানে $2m$ জোড় হইবে)।

মনে কর $y=x^n$

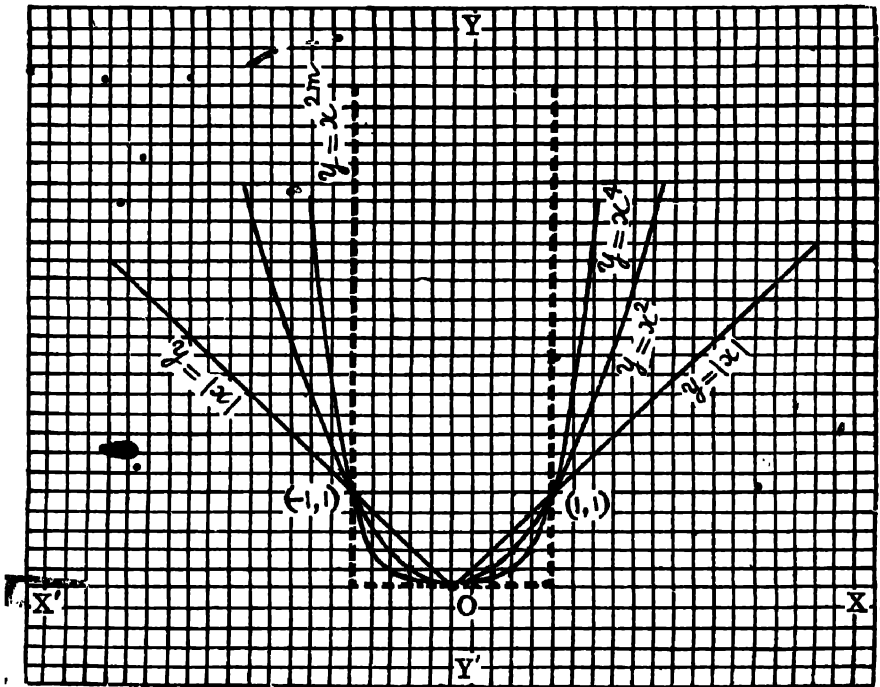
(i) $n=2$ হইলে $y=x^2$ হইবে। উহার লেখ অঙ্কনের জন্য নিম্নের স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	±·4	±·6	0	±1	±1·1	±1·2	±1·3	±1·4	±1·6	±2
y	·2	4	0	1	1·2	1·4	1·7	2·0	2·6	4

লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর 5 গুণকে দৈর্ঘ্য একক (অর্থাৎ ·5″=1 একক) ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=x^2$ এর লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 3 দেখ]

(ii) $n=4$ হইলে $y=x^4$ হইবে। উহার লেখ অঙ্কনের জন্য নিম্নের স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল :—

x	$\pm\cdot6$	0	±1	$\pm1\cdot1$	$\pm1\cdot2$	$\pm1\cdot3$	$\pm1\cdot4$
y	$\cdot1$	0	1	$1\cdot5$	$2\cdot1$	$2\cdot9$	$3\cdot8$

এক্ষণে $\cdot5'=1$ একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কন করা হইল। [লেখ 3 দেখ]।

[লেখ 3]

(iii) $y=x^{2m}$ এর m যদি অতি বৃহৎ অখণ্ড ধনরাশি হয়, তবে ঐভাবে স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করিয়া লেখ অঙ্কন করা হয় না। এক্ষেত্রেও সীমাস্থ মান-প্রণালী (method of limits) অবলম্বন করা হয়।

(*c*) **y=|x| এর লেখ।** $|x|$ এই প্রতীক দ্বারা x এর absolute value বা চরম মান অর্থাৎ $\pm$ চিহ্ন বর্জিত সাংখ্যমানটিকে বুঝায়। অতএব, $y=|x|$ এর লেখ অঙ্কনের জন্য নিম্নের স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল :—

x	± 3	± 2	± 1	0	$\pm \cdot 5$	$\pm \cdot 8$	...
y	3	2	1	0	·5	·8	...

এক্ষণে ·5″=1 একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কন করিলে দেখা যাইবে যে লেখটি মূল বিন্দুতে ছিন্ন একটি সরলরেখা এবং উহার অংশ দুইটি যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত। [লেখ 3 দেখ]

বিশেষ দ্রষ্টব্য :—(1) উপরে লেখ চারিটি $(-1, 1)$, $(0, 0)$ এবং $(1, 1)$ এই বিন্দু তিনটি দিয়া গিয়াছে।

(2) লেখগুলি x-অক্ষের উপর দিকে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত। উহাদের কোন অংশ y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত নহে।

(3) লেখগুলি y-অক্ষ বরাবর (about y-axis) প্রতিসম।

(4) $y=x^2$ $y=x^4$, $y=x^{2m}$ লেখগুলি O মূল বিন্দুতে x-অক্ষকে স্পর্শ করিয়াছে।

(5) $y=x^{2m}$ এর m বৃহৎ অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে লেখটি হইতে দেখা যায় যে, m এর মান 1, 2, 3 প্রভৃতি বাড়িতে থাকিলে, $x>-1$ হইতে $x<1$ সীমার মধ্যে লেখটির অংশ ক্রমশঃ $x=-1$ ও $x=1$ রেখাদ্বয়ের এবং $x=\pm 1$ সীমার মধ্যে x-অক্ষের নিকটতর হইয়াছে। আবার, ঐ সীমার বাহিরে $x>-\infty$ হইতে $x<-1$ সীমার ও $x>1$ হইতে $x<\infty$ সীমার মধ্যস্থিত লেখটির অংশদ্বয় যথাক্রমে $x=-1$ ও $x=1$ রেখাদ্বয়ের ক্রমশঃ নিকটতর হইয়া চরম সীমায় উহাদের সহিত প্রায় সমাপতিত হইয়াছে।

67. Graphs of e^x and $\log_e x$.

সূচকীয় অপেক্ষক e^x এবং লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক $\log_e x$ এর লেখ অঙ্কন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(i) e^x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর $y=e^x$. আমরা জানি $e=2.71828\cdots\cdots$, সুতরাং লেখটির জন্য নিম্নের স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল। তালিকা প্রণয়ন লগ-তালিকার সাহায্যে করা হইয়া থাকে।

x	0	−·5	·5	−1	1	−1·2	1·2	−1·5	1·5	−
y	1	·61	1·65	·37	2·72	·30	3·32	·22	4·48	·14

এক্ষণে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর 5 গুণ (বা ·5″)=1 একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=e^x$ এর লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 4 দেখ]

(ii) $\log_e x$ এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর $y=\log_e x$. আমরা জানি $\log_e n=\log_{10} n\times\log_e 10$ এবং $\log_e 10=2.30258\cdots$, সুতরাং সাধারণ লগকে 2·3 দিয়া গুণ করিয়া এখানে লগ-তালিকার সাহায্যে নিম্নের স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল :—

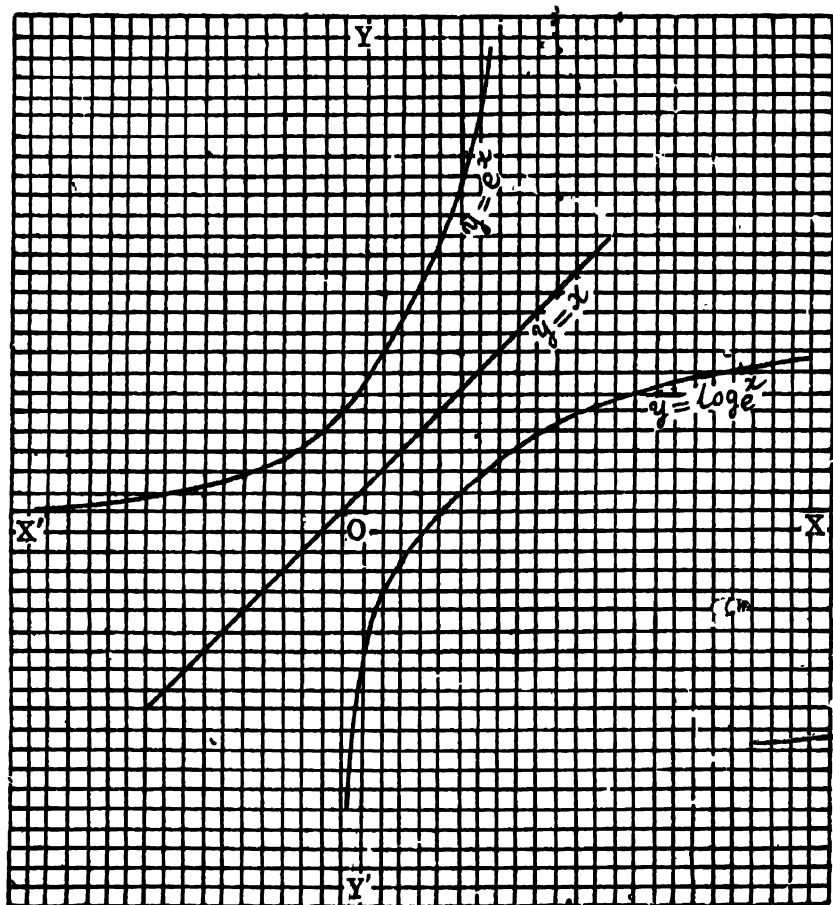
x	·05	·14	·22	·37	1	1·65	2·24	2·72	3·25	4·06
y	−·3	−·2	−1·5	−1	0	·5	·8	1	1·2	1·4

এক্ষণে ·5′=1 একক ধরিয়া উপরের স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=\log_e x$ এর লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 4 দেখ]

দ্রষ্টব্য :—(1) এখানে মূল বিন্দুর সন্নিকটের বিন্দুগুলি লইয়া লেখ দুইটি অঙ্কন করা হইয়াছে।

(2) লেখ দুইটি হইতে দেখা যায় যে, উহারা $y=x$ সমীকরণের লেখটির দুই পার্শ্বে প্রতিসম বা পরস্পর প্রতিচ্ছবি।

(3) x-অক্ষের ঋণাত্মক অংশটি $y=e^x$ এর লেখটির asymptote অর্থাৎ লেখটি ঐ অংশের ক্রমশঃ অধিকতর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু স্পর্শ করিবে না এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক অংশটি $y=\log_e x$ এর asymptote.

(4) $y=e^x$ এর লেখ সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের উপরিভাগে অবস্থিত এবং $y=\log_e x$ এর লেখটির সম্পূর্ণরূপে y-অক্ষের ডানদিকে অবস্থিত।

[লেখ 4]

68. Graphs of $y=10^x$ and $y=\log_{10}x$.

(i) $y=10^x$ এর লেখ অঙ্কন।

লগ-তালিকার সাহায্যে এখানে একটি স্থানাঙ্ক-তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	−2	−1·5	−1	−·5	−·3	0	·3	·5	·6	·8
y	·01	·08	·1	·32	5	1	2	3·2	4	6·4

এক্ষণে ·5′=1 একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি লেখ-কাগজে স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=10^x$ এর লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 5 দেখ]

(ii) $y=\log_{10}x$ এর লেখ।

x	·01	·03	·05	·1	·3	·5	1	2	4	6
y	−2	−1·5	−1·3	−1	−·5	−·3	0	·3	·6	·8

এক্ষণে ·5″=1 একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 5 দেখ]

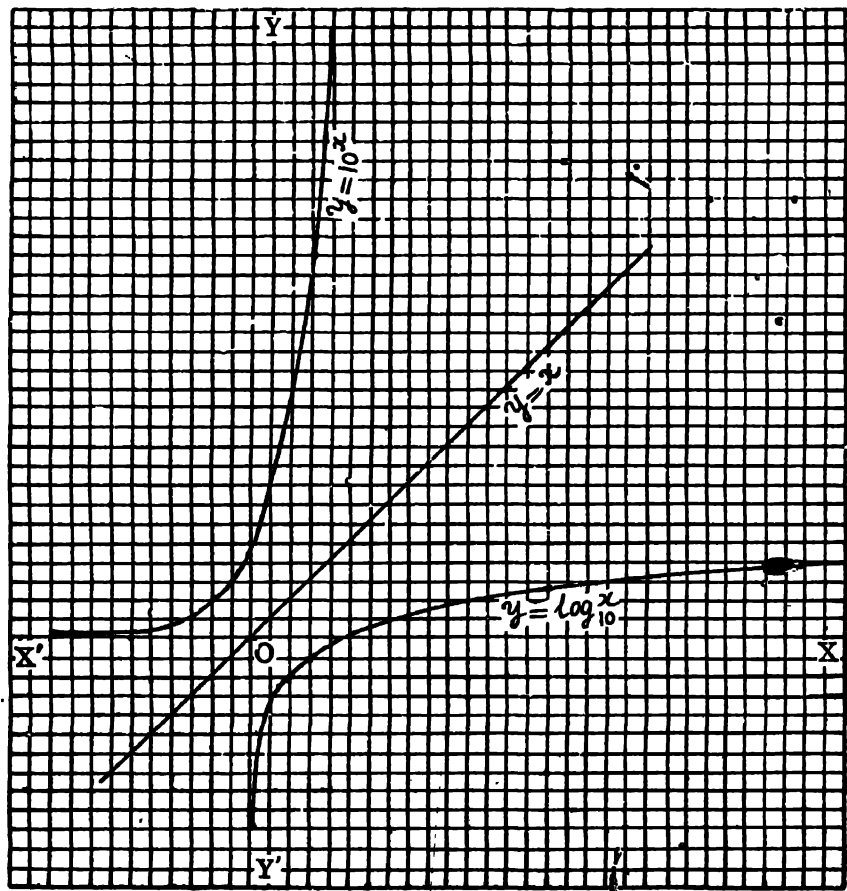
দ্রষ্টব্য :—(1) এখানে মূল-বিন্দুর সন্নিকটের বিন্দুগুলি লইয়া লেখ দুইটি অঙ্কন করা হইয়াছে।

(2) লেখ দুইটি $y=x$ সমীকরণের লেখটি সম্পর্কে প্রতিসম অর্থাৎ উহার উভয় পার্শ্বে পরস্পর প্রতিচ্ছবি স্বরূপ।

(3) x-অক্ষের ঋণাত্মক অংশ $y=10^x$ এর এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক অংশ $y=\log_{10}x$ এর asymptote.

(4) $y=10^x$ এর লেখ সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের উপরিভাগে অবস্থিত এবং $y=\log_{10}x$ এর লেখ সম্পূর্ণরূপে y-অক্ষের ডান দিকে অবস্থিত।

(5) একই অক্ষদ্বয় লইয়া $y=e^x$, $y=10^x$, $y=\log_e x$ ও $y=\log_{10} x$ এর লেখ চারিটি অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, (1, 0) বিন্দুটি $y=\log_e x$ ও $y=\log_{10} x$ এর ছেদবিন্দু এবং (0, 1) বিন্দু $y=e^x$ ও $y=10^x$ এর ছেদবিন্দু।

[লেখ 5]

দ্বিতীয় অধ্যায়

TRIGONOMETRY (ত্রিকোণমিতি)

Trigonometrical Equations and General Values

(সমীকরণ ও সাধারণ মান)

69. পূর্বে তোমরা দেখিয়াছ যে, এরূপ অসংখ্য কোণ থাকিতে পারে যাহাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান একই অর্থাৎ সমান। মনে কর, $\sin\theta=\frac{1}{2}$; এক্ষেত্রে θ এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান 30°, কারণ $\sin 30°=\frac{1}{2}$. আবার, যেহেতু সম্পূরক কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমান হয়, সেইজন্য $\sin 150°=\sin 30°=\frac{1}{2}$. এইরূপে দেখা যায় যে, যে সকল কোণের 30° বা 150° হইতে পার্থক্য 360° এর সম্পূর্ণ গুণিতক তাহাদেরও sine (এবং অপর কোণানুপাতগুলিও) সমান হইবে। অতএব এস্থলে 30°, 150°, 390°, ⋯, −330°, −210°, ⋯ প্রভৃতি কোণগুলির sine সমান অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ হইবে।

এইরূপে অসংখ্য কোণের cosine বা অপর কোণানুপাতগুলিও একই হইতে পারে।

অতএব, ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধানের জন্য যে সকল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান একই সেই কোণগুলির প্রকাশক সংক্ষিপ্ত সাধারণ রূপ নির্ণয় করা প্রয়োজন।

70. যে কোণসমূহের কোন একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত শূন্য তাহাদের সাধারণ রূপ নির্ণয়।

(i) মনে কর, $\sin\theta=0$ হইলে θ কোণের মানগুলি সাধারণ আকারে প্রকাশ করিতে হইবে।

একটি কোণের কোন বাহুস্থিত একটি বিন্দু হইতে উহার অপর বাহুটির উপর লম্বপাত করিলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$কে ঐ কোণের sine বলে। অতএব, কোন কোণের sine শূন্য (0) হইলে ঐ লম্বটির দৈর্ঘ্য শূন্য হইবে; কিন্তু ইহা হইতে

পারে কেবল যদি ঐ কোণের বাহুদ্বয় এক সরলরেখায় অবস্থিত হয়। অতএব, এরূপ কোণ অবশ্যই π (বা 180°) এর জোড় বা বিজোড় গুণিতক হইবে।

∴ **$\sin \theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$ হইবে** এবং এক্ষেত্রে n এর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা হইতে পারে।

(ii) কোন কোণের পক্ষে $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ উহার cosine হইয়া থাকে, সুতরাং কোন কোণের cosine শূন্য হইলে ভূমির পরিমাণ শূন্য হইবে; কিন্তু তাহা হওয়া সম্ভব যদি ঐ কোণের বাহুদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত হয়। অতএব, ঐ কোণের পরিমাণ অবশ্যই $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ বা $\frac{\pi}{2}$ এর কোন বিজোড় গুণিতক হয়।

∴ **$\cos \theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে** এবং এখানে nএর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা হইতে পারে।

(iii) যদি কোন কোণের tangent অর্থাৎ $\frac{\sin}{\cos}$ শূন্য হয়, তবে অবশ্যই উহার লব অর্থাৎ sineটি শূন্য হইবে।

∴ **$\tan \theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$** হইবে।

অনুরূপে, যদি $\cot \theta=0$ হয়, তবে অবশ্যই $\cos \theta=0$ হইবে।

∴ **$\cot \theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$** হইবে।

(iv) $\sec \theta$ ও $\operatorname{cosec} \theta$ এর সাংখ্যমান কখনই 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না, সুতরাং উহাদের মান শূন্য হইতে পারে না।

71 যে কোণসমূহের sine সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয়।

(General expression of angles having the same sine)

মনে কর, যে সকল কোণের sine প্রদত্ত sine পরিমাণের সমান তাহাদের মধ্যে যেন ক্ষুদ্রতম কোণটি α এবং অপর একটি কোণ θ.

অতএব, $\sin\theta = \sin\alpha$ একটি সমীকরণ হইল এবং এখানে θ-র এরূপ সাধারণ একটি মান নির্ণয় করিতে হইবে যাহা দ্বারা ঐ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$$\because \quad \sin\theta = \sin\alpha,$$

$$\therefore \quad \sin\theta - \sin\alpha = 0,$$

বা, $2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$

অতএব, $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$, অথবা $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0.$

এক্ষণে যদি $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ হয়, তবে $\frac{\theta+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ এর কোন বিজোড় গুণিতক [অনু. 70 (II)] হইবে।

অর্থাৎ $\theta+\alpha = \pi$ এর কোন বিজোড় গুণিতক

$\therefore\ \theta = -\alpha + \pi$ এর কোন বিজোড় গুণিতক $= -\alpha + (2m+1)\pi \cdots (1)$

আবার, যদি $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ হয়, তবে $\frac{\theta-\alpha}{2} = \pi$ এর যে কোন গুণিতক,

অর্থাৎ $\theta - \alpha = \pi$ এর যে কোন জোড় গুণিতক,

$\therefore\ \theta = \alpha + \pi$ এর যে কোন জোড় গুণিতক $= \alpha + 2m\pi \cdots\cdots (2)$

অতএব, (1) ও (2) মিলিত করিয়া পাই $\theta = (-1)^n\alpha + n\pi \cdots\cdots (3)$ যেখানে $n = 0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ইহাই θ-র মানের সাধারণ রূপ।

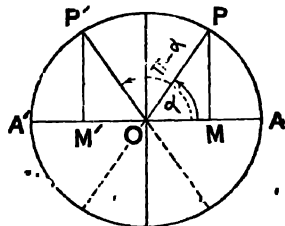
দ্রষ্টব্য। উপরের (3) সূত্রে n বিজোড় হইলে উহা (1)এর অনুরূপ হইবে এবং n জোড় হইলে উহা (2) এর অনুরূপ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ হইলে $\sin\theta = \sin\alpha$ হইবে। $\therefore$ যে কোণসমূহের cosecant সমান তাহাদেরও সাধারণ মান হইবে $\theta = (-1)^n\alpha + n\pi.$

[জ্যামিতিক প্রমাণ]

71A. মনে কর AOP এরূপ কোন একটি কোণ যাহার sine প্রদত্ত সাইনের সমান এবং উহাকে যেন α দ্বারা সূচিত করা হইল।

অঙ্কন। OPকে ব্যাসার্ধ করিয়া AP′A′ বৃত্ত অঙ্কিত কর। PM⊥OA টান এবং MO এর বর্ধিতাংশ হইতে OM এর সমান OM′ অংশ কাটিয়া লও। M′P′⊥OA′ টান, উহা যেন পরিধিকে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল। OP′ যোগ কর।

(চিত্র 2)

প্রমাণ। △POM ও △P′OM′ সর্বসম, সুতরাং $\angle P'OM' = \angle POM = \alpha$ $\therefore$ $\angle AOP' = \pi - \alpha$.

কোণ-উৎপাদক OP সরলরেখা কেবল যখন OP বা OP′ অবস্থানে থাকে (অন্য কোন অবস্থানে নহে) তখন উহা দ্বারা উৎপন্ন কোণের sine প্রদত্ত সাইনের সমান হয়।

এখন দেখ, ঐ কোণোৎপাদক সরলরেখাটি যখন OP অবস্থানে আসিয়াছে, তখন উহা অখণ্ডবার, সম্পূর্ণ পাক ঘুরিয়া তৎপরে আবার α কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। অতএব বলা যায় যে, উহা যে কোণ উৎপন্ন করিয়াছে তাহার পরিমাণ $2m\pi + \alpha \cdots (1)$, কারণ উহা একটি সম্পূর্ণ পাক ঘুরিলে 2π কোণ উৎপন্ন করে, এখানে $m = 0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ডসংখ্যা।

অনুরূপে, ঐ কোণোৎপাদক সরলরেখাটি যখন OP′ অবস্থানে আসিয়াছে তখন উহা $(2m\pi + \text{AOP}')$ কোণ অর্থাৎ $2m\pi + \pi - \alpha$ কোণ অর্থাৎ $(2m+1)\pi - \alpha$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে$\cdots(2)$. এখানে $m = 0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোন অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে, (1) ও (2) দ্বারা প্রকাশিত সমস্ত কোণই $n\pi + (-1)^n\alpha \cdots (3)$ এর অন্তর্গত। কারণ, $n = 2m$ হইলে $(-1)^{2m} = 1$, তখন (3) হইতে পাই $2m\pi + \alpha$ এবং ইহাই (1) দ্বারা প্রকাশিত। আবার $n = 2m+1$ হইলে

$(-1)^{2m+1}=-1$, তখন (3) হইতে পাই $(2m+1)\pi-\alpha$ এবং ইহাই (2) দ্বারা প্রকাশিত। অতএব, যে সকল কোণের সাইন সমান তাহাদের সাধারণ মান হইল $n\pi+(-1)^n\alpha$, যেখানে $n=0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

72. যে সকল কোণের cosine সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয়।

(To find the general value of angles having the same cosine).

এখানে মনে কর, α এরূপ একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার cosine, θ কোণের cosine এর সমান। অতএব, এখানে $\cos\theta=\cos\alpha$ এই সমীকরণের সমাধান করিতে হইবে।

$\because\ \cos\theta=\cos\alpha,\quad \therefore\ \cos\theta-\cos\alpha=0,$

বা, $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0,$

সুতরাং, $\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ অথবা $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0.$

এক্ষণে, $\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ হইলে,

$\frac{\theta+\alpha}{2}=\pi$ এর যে কোন গুণিতক

বা, $\theta+\alpha=2\pi$ এর যে কোন গুণিতক

$\therefore\ \theta=-\alpha+2\pi$ এর যে কোন গুণিতক $=2n\pi-\alpha.$

আবার, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$ হইলে, $\frac{\theta-\alpha}{2}=\pi$ এর যে কোন গুণিতক,

বা, $\theta-\alpha=2\pi$ এর যে কোন গুণিতক।

$\therefore\ \theta=\alpha+2\pi$ এর যে কোন গুণিতক $=2n\pi+\alpha.$

অতএব, যে সকল কোণের cosine সমান তাহাদের সাধারণ মান হইল $\theta=2n\pi\pm\alpha\cdots(4)$, যেখানে $n=0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

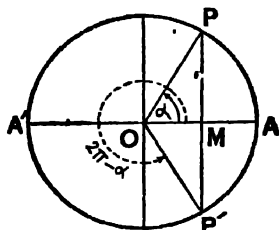
অনুসিদ্ধান্ত। $\sec\theta = \sec\alpha$ হইলে, $\cos\theta = \cos\alpha$ হইবে। অতএব, যে সকল কোণের **secant** সমান তাহাদেরও সাধারণ মান হইল $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.।

[জ্যামিতিক প্রমাণ]

72A. মনে কর, AOP কোণের cosine প্রদত্ত কোসাইনের সমান এবং ঐ কোণটি α দ্বারা সূচিত।

অঙ্কন। O কে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি APP′ বৃত্ত অঙ্কিত কর। PM⊥OA টান এবং PMকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে P′ বিন্দুতে ছেদ কর। OP, OP′ যোগ কর।

প্রমাণ। এখানে △MOP ও △MOP′ সর্বসম, ∴ PM = P′M এবং ∠P′OM = ∠POM = α,

সুতরাং ∠AOP′ = $2\pi - \alpha$.

(চিত্র 3)

এক্ষণে, কোণোৎপাদক সরলরেখাটি যখন কেবল OP বা OP′ অবস্থানে থাকে (অন্য কোন অবস্থানে নহে) তখন উৎপন্ন কোণের কোসাইন প্রদত্ত কোসাইনের সমান হয়।

এখন দেখ, ঐ কোণোৎপাদক সরলরেখাটি কয়েকটি পূর্ণসংখ্যক সম্পূর্ণ পাক ঘুরিয়া তৎপরে আবার α কোণ উৎপন্ন করিলে, তবে OP অবস্থানে আসে। অতএব, তখন উহা দ্বারা উৎপন্ন কোণটি হইবে $2n\pi + \alpha \cdots (1)$ যেখানে $n = 0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

আবার, ঐ কোণোৎপাদক রেখাটি কয়েকটি পূর্ণসংখ্যক সম্পূর্ণ পাক ঘুরিয়া তৎপরে আবার $-\alpha$ কোণ উৎপন্ন করিলে উহা OP′ অবস্থানে আসিতে পারে। অতএব, তখন উহা দ্বারা উৎপন্ন কোণটি হইবে, $2n\pi - \alpha \cdots (2)$.

এক্ষণে, (1) ও (2) এর অন্তর্গত সমস্ত কোণই $2n\pi \pm \alpha$ এর অন্তর্গত।

অতএব, যে সকল কোণের কোসাইনগুলি সমান তাহাদের সাধারণ মান হইল $2n\pi \pm \alpha$, যেখানে $n = 0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

73. যে কোণসমূহের tangent সমান তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয়।

(To find the general value of angles having the same tangent).

মনে কর, α এরূপ একটি ক্ষুদ্রতম কোণ যাহার tangent কোণ θর tangent এর সমান।

এক্ষণে $\tan \theta = \tan \alpha$ সমীকরণটির সমাধান করিতে হইবে,

$$\because \quad \tan \theta = \tan \alpha$$

$$\therefore \quad \tan \theta - \tan \alpha = 0, \text{ বা } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha}{\cos \theta \cos \alpha} = 0, \text{ বা } \frac{\sin (\theta - \alpha)}{\cos \theta \cos \alpha} = 0,$$

$\because$ কোন কোণের cosine এর মান অনন্ত হইতে পারে না,

$\therefore \quad \dfrac{1}{\cos \theta \cos \alpha} = 0$ হইতে পারে না।

$\therefore$ এখানে $\sin (\theta - \alpha) = 0$,

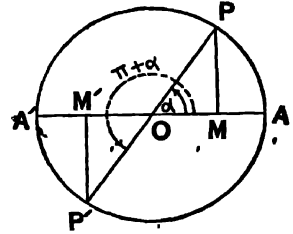
সুতরাং $\theta - \alpha = \pi$ এর যে কোন গুণিতক $= n\pi$, $\quad \therefore \quad \theta = \alpha + n\pi$.

অতএব, যে সকল কোণের tangent একই তাহাদের সাধারণ মান হইল $\theta = \alpha + n\pi$ ...(5) যেখানে $n = 0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত। $\cot \theta = \cot \alpha$ হইলে, $\tan \theta = \tan \alpha$ হয়, সুতরাং যে সকল কোণের **cotangent** সমান তাহাদেরও সাধারণ মান হইল $\theta = \alpha + n\pi$.

[জ্যামিতিক প্রমাণ]

73A. মনে কর, AOP কোণের tangent প্রদত্ত tangent এর সমান এবং কোণটি α দ্বারা সূচিত।

অঙ্কন। Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া APA′ বৃত্ত অঙ্কিত কর। POকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে P′ বিন্দুতে ছেদ কর। AA′এর উপর PM ও P′M′ লম্ব টান। এখানে কোণ AOP′ $=\pi+\alpha$ হইল।

(চিত্র 4)

প্রমাণ। ∵ △POM ও △P′OM′ সর্বসম,

∴ PM = P′M′, OM = OM′ এবং ∠P′OM′ = ∠POM = α,

সুতরাং AOP ও AOP′ কোণের tangent সমান।

এখন দেখ, কোণোৎপাদক সরলরেখাটি পূর্ণসংখ্যক সম্পূর্ণ পাক ঘুরিয়া এবং তৎপরে আরও α কোণ উৎপন্ন করিলে OP অবস্থানে আসে, সুতরাং তখন উহা দ্বারা উৎপন্ন কোণ হইল $2m\pi+\alpha \cdots (1)$, এখানে $m=0$ অথবা কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

আবার, ঐ কোণোৎপাদক রেখাটি কয়েকটি সম্পূর্ণ পাক ঘুরিয়া আরও $\pi+\alpha$ কোণ উৎপন্ন করিলে উহা OP′ অবস্থানে আসে, সুতরাং তখন উৎপন্ন কোণ হইল $2m\pi+\pi+\alpha$ বা $(2m+1)\pi+\alpha \ldots (2)$, এখানে $m=0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(1) ও (2) এর অন্তর্গত কোণগুলি সবই $n\pi+\alpha$ এর অন্তর্গত। কারণ n জোড় হইলে $n=2m$, সুতরাং (3) হইতে পাওয়া যায় $2m\pi+\alpha$ এবং ইহা (1) দ্বারা প্রকাশিত। আর, n বিজোড় হইলে $n=2m+1$, সুতরাং (3) হইতে পাওয়া যায় $(2m+1)\pi+\alpha$ এবং ইহা (2) দ্বারা প্রকাশিত।

অতএব, যে সকল কোণের tangent সমান তাহাদের সাধারণ মান হইল $n\pi+\alpha$, যেখানে $n=0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

74. বিশেষ দ্রষ্টব্য। নিম্নের সাধারণ মানগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়, সুতরাং ঐগুলি স্মরণ রাখিতে হইবে :—

যদি $n=0$ অথবা যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড রাশি হয়, তবে

(1) $\sin\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$.

$\sin\theta=\sin\alpha$ হইলে, $\theta=(-1)^n\alpha+n\pi$

$\sin\theta=1=\sin\frac{\pi}{2}$ হইলে, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\sin\theta=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ হইলে, $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}$.

(2). $\cos\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\cos\theta=\cos\alpha$ হইলে, $\theta=2n\pi\pm\alpha$

$\cos\theta=1$ হইলে, $\theta=2n\pi$

$\cos\theta=-1$ হইলে, $\theta=(2n+1)\pi$

(3) $\tan\theta=0$ হইলে, $\theta=n\pi$

$\tan\theta=\tan\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$

(4) $\cot\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\cot\theta=\cot\alpha$ হইলে, $\theta=n\pi+\alpha$.

উদাহরণমালা 9

উদা. 1. Find the general expression for all angles whose cosine is $-\frac{1}{2}$.

যে সকল কোণের cosine এর মান $-\frac{1}{2}$, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম কোণটি হইল 120° বা $\frac{2\pi}{3}$.

অতএব, যে সকল কোণের কোসাইন $-\frac{1}{2}$, তাহাদের সাধারণ আকার হইল $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ [অনু. 72 দেখ।]

উদা. 2. Find the general solution of $\sin^2 x = \sin^2\theta$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\sin x = \sin\theta \cdots\cdots (1)$

অথবা, $\sin x = -\sin\theta = \sin(-\theta) \cdots\cdots (2)$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $x = n\pi + (-1)^n\theta$,

এবং (2) ,, ,, $x = n\pi + (-1)^n(-\theta)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x = n\pi \pm \theta$.

উদা. 3. Find the general value of α which satisfies both the equations $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ and $\tan\alpha = 1$.

0° হইতে 360° মধ্যে যে কোণের cosine $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ও tangent 1 তাহার মান 225° বা $\pi + \frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ α কোণের নির্ণেয় সাধারণ মান $= 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$.

উদা. 4. Solve the equation $\cos x - \tan x = 2$. [C. U. '34]

$\cot x - \tan x = 2$,

বা, $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2$,

বা, $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x\cos x$,

বা, $\cos 2x = \sin 2x$, বা, $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$,

বা, $\tan 2x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ $2x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $\therefore$ $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = (4n+1)\frac{\pi}{8}$.

উদা. 5. Solve $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. [C. U. '35]

সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1,$$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=1$

$$\left[\because \sin\frac{\pi}{4}=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}\right]$$

বা, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1=\cos 0°$ $[\because \cos 0°=1]$

$$\therefore \quad x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm 0°. \quad \therefore \quad x=2n\pi+\frac{\pi}{4}=(8n+1)\frac{\pi}{4}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। (1) অনেক সময় সাধারণ সমাধানটি বিভিন্ন প্রণালীতে করা যায়, কিন্তু লব্ধ ফলগুলির আকার বিভিন্ন হইলেও তাহারা একই কোণ শ্রেণীর অন্তর্গত হইয়া থাকে।

(2) উদা. 5এ যে সমীকরণটির সমাধান করা হইয়াছে, অনেক সময় তাহার উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া সমাধান করা হয়, কিন্তু উহা ঠিক নহে। কারণ উহাতে লব্ধ মানগুলির সব কয়টি দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হয় না অর্থাৎ উহাতে extraneous root (অবান্তর বীজ) পাওয়া যায়। উপরের সমীকরণটি লইয়া নিম্নে উহা দেখান হইতেছে।

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2},$$

$\therefore \quad \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=2,$

বা, $1+2\sin x\cos x=2,$

বা, $1+\sin 2x=2,$ বা $\sin 2x=1=\sin\frac{\pi}{2},$

$\therefore \quad 2x=(4m+1)\frac{\pi}{2}, \quad \therefore \quad x=(4m+1)\frac{\pi}{4},$ এখানে $m=0$ বা অন্য যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে, m জোড় হইলে, মনে কর, $m=2n.$

সুতরাং $x=(8n+1)\frac{\pi}{4}$ ········(1)

এবং m বিজোড় হইলে, মনে কর, $m=2n+1,$

সুতরাং $x=(8n+5)\frac{\pi}{2}$ ······· (2)

এখানে $x=(8n+5)\frac{\pi}{2}$ একটি অতিরিক্ত সমাধান পাওয়া গেল, ইহা উপরে উদা. 5 এর সমাধানে x এর সাধারণ মানের অন্তর্ভূর্ত নহে। কিন্তু x এর এই মানটি বসাইয়া দেখা যায় যে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। ইহাকে ঐ সমীকরণের অবান্তর বীজ বলে। অতএব, যদি এই প্রণালীতে সমাধান করা হয়, তবে লব্ধ বীজগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কিনা তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখিতে হইবে—কোন অবান্তর বীজ থাকিলে ইহাতে ধরা যাইবে।

উদা. 6. Solve $\cos 2\theta=\cos\theta\sin\theta$.

$$\cos 2\theta=\cos\theta\sin\theta,$$

বা, $2\cos 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta,$

বা, $\cot 2\theta=\frac{1}{2}=\cot\alpha$ (মনে কর)

$\therefore\ 2\theta=n\pi+\alpha,\ \therefore\ \theta=\frac{1}{2}(n\pi+\alpha)$, এখানে $\cot\alpha=\frac{1}{2}$.

উদা. 7. Solve $a\cos x+b\sin x=c$, where $c \not> \sqrt{a^2+b^2}$.

সমীকরণের উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\cdots\cdots(1)$$

এক্ষণে মনে কর, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ এবং $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$,

সুতরাং (1) হইতে পাই $\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

বা, $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$ (মনে কর)

$\therefore\ x-\alpha=2n\pi\pm\beta,\quad\therefore\ x=\alpha+2n\pi\pm\beta.$

দ্রষ্টব্য। (1) এখানে a, b ও c জ্ঞাত রাশি বলিয়া α ও β জ্ঞাত হইবে।

(2) কোন সমীকরণের সমাধানের জন্য নূতন কোন কোণের সাহায্য লইলে সেই নূতন কোণকে **Subsidiary** কোণ বলে। এখানে α ও β দুইটি Subsidiary কোণ।

(3) এই প্রকার সমীকরণের সমাধানে $\cos x$ ও $\sin x$ এর সহগদ্বয়ের বর্গ-সমষ্টির বর্গমূল দিয়া উভয় পক্ষকে ভাগ করিতে হয়।]

উদা. 8. Solve the equation $\tan 3\theta = \cot 2\theta$.

এখানে $\tan 3\theta = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$.

যে সকল কোণের tangent-গুলি $\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$ কোণের tangent-এর সমান তাহাদের সাধারণ মান হইল $n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$, যেখানে n যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অতএব, এখানে $3\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2\theta$, বা, $5\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$,

$\therefore\ \theta = \frac{1}{5}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, যেখানে n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

উদা. 9. Solve $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$. [B. H. U. '46]

এখানে $\tan x + \tan 2x + \tan (x + 2x) = 0$,

বা, $(\tan x + \tan 2x) + \dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x .\ \tan 2x} = 0$,

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(1 + \dfrac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$,

সুতরাং $\tan x + \tan 2x = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$.

অথবা $\left(1 + \dfrac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $\tan 2x = -\tan x = \tan(-x) = \tan(n\pi - x)$

$\therefore\ 2x = n\pi - x$, বা, $3x = n\pi$, $\therefore\ x = \frac{n\pi}{3}$.

আবার, (2) হইতে পাই $1 = \dfrac{1}{\tan x \tan 2x - 1}$,

বা, $\tan x \tan 2x - 1 = 1$, বা, $\tan x \tan 2x = 2$,

বা, $\tan x \cdot \frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x} = 2,$

বা, $2 \tan^2 x = 2 - 2 \tan^2 x$, বা, $4 \tan^2 x = 2,$

বা, $\tan^2 x = \frac{1}{2}$, $\therefore \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \tan \alpha$ (মনে কর)

$\therefore$ $x = n\pi \pm \alpha$, যেখানে $\tan^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

উদা. **10.** Solve $\cos 9x = \cos 5x - \cos x$.

$$\cos 9x = \cos 5x - \cos x,$$

বা, $\cos 9x + \cos x = \cos 5x,$

বা, $2 \cos 5x \cos 4x - \cos 5x = 0$

বা, $\cos 5x (2 \cos 4x - 1) = 0,$

$\therefore$ হয় $\cos 5x = 0 \cdots\cdots(1)$, অথবা, $2 \cos 4x - 1 = 0 \cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $5x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\therefore x = (4n \pm 1)\frac{\pi}{10}$;

এবং (2) হইতে পাই $\cos 4x = \frac{1}{2}$, $\therefore 4x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

$$\therefore x = (6n \pm 1)\frac{\pi}{12}.$$

উদা. **11.** Solve $\frac{\sin \theta}{\sin 2x} + \frac{\cos \theta}{\cos 2x} = 2.$ [C. U. '58]

$$\frac{\sin \theta}{\sin 2x} + \frac{\cos \theta}{\cos 2x} = 2,$$

বা, $\sin \theta \cos 2x + \cos \theta \sin 2x = 2 \sin 2x \cos 2x,$

বা, $\sin (\theta + 2x) = \sin 4x$

$\therefore$ $4x = m\pi + (-1)^m (\theta + 2x)$, যেখানে m যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে m = জোড় সংখ্যা $= 2n$ হইলে,

$4x = 2n\pi + \theta + 2x$, বা $2x = 2n\pi + \theta$, $\therefore x = n\pi + \frac{\theta}{2}$.

আবার, $m =$ বিজোড় সংখ্যা $= 2n+1$ হইলে

$$4x = (2n+1)\pi - (\theta + 2x), \text{ বা, } 6x = (2n+1)\pi - \theta,$$

$$\therefore \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{6}.$$

উদা. 2. Solve $7 \cos \theta + 3 \sin \theta = 3$, given $\tan 72°18' = 2\frac{1}{3}$,

মনে কর, $72°18' = \alpha$;

এখানে $7 \cos \theta + 3 \sin \theta = 3$, বা, $\frac{7}{3} \cos \theta + \sin \theta = 1$,

বা, $\tan \alpha . \cos \theta + \sin \theta = 1$ $\left[\because \frac{7}{3} = \tan 72°18' = \tan \alpha \right]$

বা $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \theta + \sin \theta = 1$,

বা, $\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta = \cos \alpha$,

বা, $\sin (\alpha + \theta) = \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

$\therefore \quad \alpha + \theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

$= n\pi + (-1)^n . 17°42'$ $\left[\because \frac{\pi}{2} - \alpha = 90° - 72°18' = 17°42' \right]$

$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n 17°42' - \alpha = n\pi + (-1)^n 17°42' - 72°18'.$

উদা. 13. Solve $\sqrt{3} \cos A + \sin A = \sqrt{3}$ for $-2\pi \leq A < 2\pi$.

এখানে, $(\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$; উভয় পক্ষকে $\sqrt{4}$ বা 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\cos A . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

বা, $\cos A . \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

বা, $\cos \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, $\therefore \quad A - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$,

$\therefore \quad A = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \cdots (1)$ অথবা $A = 2n\pi \cdots (2)$.

এক্ষণে, (1) হইতে দেখা যায় $n = 0$ ও -1 হইলে A এর মান -2π ও 2π এর মধ্যে থাকে, $\therefore \quad A = \frac{\pi}{3}, \; -\frac{5\pi}{3}$.

আবার, (2 হইতে পাই যে, কেবল যদি $n=0$ হয়, তবে A এর মান -2π হইতে 2π এর মধ্যে থাকিবে ; সুতরাং $A=0$.

অতএব, $A=-\frac{5\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$.

উদা. **14.** Find all the values of θ between 0° and 1000° that satisfy the equation $2\sin^2\theta-\sin\theta=3$.

এখানে $2\sin^2\theta-\sin\theta-3=0$,

বা, $2\sin^2\theta-3\sin\theta+2\sin\theta-3=0$,

বা, $(\sin\theta+1)(2\sin\theta-3)=0$,

$\therefore$ $\sin\theta=-1$ অথবা $\frac{3}{2}$; কিন্তু কোন কোণের সাইনের সাংখ্যমান $\frac{3}{2}$ হইতে পারে না।

$\therefore$ $\sin\theta=-1$, $\therefore$ $\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}=(4n-1)90°$

এখানে $n=1, 2$ ও 3 হইলে θ এর মান 0° ও 1000° মধ্যে থাকিবে।

$\therefore$ $\theta=270°, 630°, 990°$.

Exercise 9

1. Write down the general expression of all angles whose sine is equal to $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. What are the general values of θ which satisfy the equation $\tan\theta=-1$?

3. What is the most general value of θ which satisfy both the equations $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ and $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$?

Solve the following equations :—

4. $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$.

5. $\tan^2\theta=3\operatorname{cosec}^2\theta-1$. [C. U. '39]

6. $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$. [C. U. '40]

7. $\tan x+\cot x=4$. [C. U. '13]

8. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [B. H. U. '48]

9. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$.

10. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$. [B. H. U. '47]

11. $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 3\cot\theta$.

12. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0$ [C. U.]

13. $\sin 4\theta = \sin\theta$. [B. H. U. '49]

14. $\tan 5\theta = \cot 2\theta$. [A. U. '43]

15. $\sin 2\theta = \cos\theta$. [C. U. '53]

16. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. [C. U. '46]

17. $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$.

18. $\sec\theta - 1 = (\sqrt{2} - 1)\tan\theta$.

19. $\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin\theta = 0$. [P. U. '39]

20. $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x . \cos 7x$. [B. H. U. '46]

21. $\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin\theta$. [A. U. '39]

22. $\tan x + \tan 3x = 2\tan 2x$.

23. $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$.

24. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$. [C. U. '41, '45, '48]

25. $\tan\theta + \tan 2\theta = \tan 3\theta$

26. $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$

27. $\cos 2\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha$

28. $4\sin 4\theta + 1 = \sqrt{5}$ [C. U.]

29. $\tan^2 3x = \cot^2\alpha$

30. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$. [C. U. '49]

31. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$ [C. U. '43]

32. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$ [A. I. '41]

33. $\cos x - \sin x = \cos\alpha + \sin\alpha$ [B. H. U. '38]

34. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$ [C. U. '59]

35. $\frac{\cos\alpha}{\cos x}+\frac{\sin\alpha}{\sin x}=2.$

36. Solve $3\cos x+2\sin x=2$ having given
$\tan 65°22'=1\frac{1}{2}$.

37. Solve $\sin\frac{n+1}{2}\theta=\sin\frac{n-1}{2}\theta+\sin\theta$. [U.P.B. '53]

38. Find all the values of θ between 0° and 1000° that satisfy the equation $3\sin^2\theta-8\sin\theta+5=0$.

39. Solve $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=\tan x\tan 2x\tan 3x$.
[C. U. '56]

40. Solve $\sin\theta+2\cos\theta=1$. [C. U. '34]

41. If $\sin A=\sin B$, and $\cos A=\cos B$, prove that either A and B are equal or they differ by some multiple of four right angles. [C. U. '35]

42. Solve $4\sin\theta\cos\theta=1-2\sin\theta+2\cos\theta$ in the interval $0<\theta<\pi$. [C. U. '50]

43. Solve the equation $\sin 4\theta=\cos 3\theta+\sin 2\theta$ in the interval $0<\theta<\pi$. [C. U. '51]

44. Solve $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ in $-\pi<\theta<+\pi$. [C. U. '52]

Solve the following for θ when $0<\theta<2\pi$:—

45. $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$ [C. U. '36]

46. $\cot\theta-\tan\theta=2$ [C. U. '37]

47. $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2}$. [C. U. '38]

48. Solve the equations (general solutions not required) $\tan x+\tan y=2$ and $2\cos x\cos y=1$. [C. U. '55]

49. If $\cos\theta-\sin\theta=\cos\alpha-\sin\alpha$, prove that
$\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. [B. H. U. '40]

Inverse Circular Functions

(বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক)

75. যদি $\sin\theta = k$ হয় যেখানে k একটি জ্ঞাত রাশি, তবে θ-র মান নির্দিষ্টরূপে জানা যায় না। কিন্তু জানা যায় যে, যে কোণগুলির sine k-এর সমান θ সেই কোণগুলির অন্যতম। অতএব $\sin\theta = k$ দ্বারা বুঝায় যে θ এরূপ যে কোন একটি কোণ যাহার সাইন হইল k. এই উক্তিটি আবার সংক্ষেপে বিপরীত ক্রমে (inversely) প্রকাশ করা হয় $\theta = \sin^{-1} k$ এইরূপ লিখিয়া।

অতএব, প্রতীক চিহ্ন $\sin^{-1}$ k দ্বারা বুঝায় এরূপ একটি কোণ যাহার সাইন হইল k. $\theta = \sin^{-1} k$ এই প্রতীক চিহ্নে (inverse notationএ) শুধু θ এক পক্ষে থাকে এবং ইহাতে প্রকাশ পায় θ এরূপ একটি কোণ যাহার মান উহার সাইনের মাধ্যমে জানা যায়।

অনুরূপে, $\cos^{-1} x$ দ্বারা বুঝায় এরূপ একটি কোণ যাহার কোসাইন হইল x. এইভাবে $\tan^{-1}\sqrt{3}$ দ্বারা যে সকল কোণের tangent এর মান $\sqrt{3}$ তাহাদের একটিকে বুঝায়। কিন্তু আমরা দেখিয়াছি যে ঐরূপ সমস্ত কোণগুলি $n\pi + \frac{\pi}{3}$এর অন্তর্গত। $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3}$ এবং $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$, এই দুইটি বিভিন্ন রূপের হইলেও একই অর্থ প্রকাশ করে।

এখানে কয়েকটি বিষয় লক্ষ্য করা প্রয়োজন। এখন দেখ, **$\sin^{-1}$ k হইল একটি কোণ, কিন্তু $\sin\theta$ হইল একটি** সংখ্যা এবং $\sin\theta = k$ ও $\theta = \sin^{-1} k$ একই অর্থ প্রকাশ করে, ইহাদের একটি জানা থাকিলেই অন্যটি জানা যায়। আবার দেখ, কোন কোণের sine এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, সুতরাং $\sin^{-1} x$ অর্থহীন হইবে যদি না $-1 < x < 1$ হয়।

অনুরূপে $\cos^{-1} x$-এর পক্ষে $-1 < x < 1$; $\operatorname{cosec}^{-1} x$ ও $\sec^{-1} x$ এই উভয় পক্ষে $(-1 < x, x > 1)$ হইবে, এবং $\tan^{-1} x$ ও $\cot^{-1} x$ এর পক্ষে x-এর যে কোন মান (for all x) হইতে পারে।

76. প্রতীকটি পাঠের নিয়ম। $\sin^{-1} k$ এই প্রতীকটিকে **"sine inverse k"** বা **"sine minus one k"** পড়া হয়। অনেক পুস্তকে ইহাকে "*arc sin k*" দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\cos^{-1} k$কে cos-inverse k পড়া হয়। $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} a$, $\tan^{-1} b$ এই আকারের expression গুলিকে **Inverse Circular Functions** বলে।

দ্রষ্টব্য। এখানে বুঝিয়া রাখা উচিত যে $\sin^{-1} k$ ও $(\sin k)^{-1}$ এক নহে, কারণ $(\sin k)^{-1} = \frac{1}{\sin k}$; কিন্তু এখানে $\sin^{-1} k$ এর -1টি সূচক নহে।

77. যদি θ এরূপ একটি কোণ হয় যাহার সাইন $=k$, তবে $n\pi + (-1)^n\theta$এর অন্তর্ভূক্ত সমস্ত কোণেরই সাইন k হইবে, সুতরাং $\sin^{-1} k$ একটি বহুমান function. অতএব $\sin^{-1} k$ এর সাধারণ মান (general value) হইবে $n\pi + (-1)^n \sin^{-1} k$. অনুরূপে $\cos^{-1} k$, এবং $\tan^{-1} x$ এর সাধারণ মান যথাক্রমে $2n\pi \pm \cos^{-1} k$ এবং $n\pi + \tan^{-1} k$.

78. $\sin^{-1} k$ দ্বারা যে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণের সাইন k তাহাই সূচিত হয়। অনুরূপে $\cos^{-1} k$, $\tan^{-1} k$, $\cot^{-1} k$, $\text{cosec}^{-1} k$, $\sec^{-1} k$ প্রভৃতি ক্ষেত্রেও বুঝিতে হইবে।

মুখ্যমান (Principal value): θ-এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম মানকে $\sin^{-1} k$ এর principal value বা মুখ্যমান বলে।

যদি একই মান (অনুপাত) বিশিষ্ট দুইটি এরূপ কোণ থাকে যাহাদের সাংখ্যমান সমান, কিন্তু একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক, তবে ধনাত্মক কোণটিকেই সাধারণতঃ মুখ্যমান ধরা হইয়া থাকে। সাংখ্যমান নির্ণয়ের স্থলে এই মুখ্যমানটিই ধরা হয়।

উদাহরণ। (1) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর principal value $=45°$

(2) $\cos 60° = \frac{1}{2}$ এবং $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$; এখানে $60°$ ও $-60°$ উভয় কোণেরই কোসাইন $\frac{1}{2}$, কিন্তু $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান হইবে $60°$, $-60°$ নহে।

79. উপরের নিয়ম অনুসারে $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ ও $\operatorname{cosec}^{-1}x$ সতত $-90°$ ও $+90°$ এর মধ্যে থাকিবে। কিন্তু $\cos^{-1}x$ ও $\sec^{-1}x$ সতত $0°$ ও $180°$-র মধ্যে থাকিবে।

x ধনাত্মক হইলে $\sin^{-1}x$, $0°$ ও $90°$ এর মধ্যে এবং x ঋণাত্মক হইলে $\sin^{-1}x$, $-90°$ ও $0°$ এর মধ্যে হইবে।

x ধনাত্মক হইলে $\cos^{-1}x$, $0°$ ও $90°$ এর মধ্যবর্তী এবং x ঋণাত্মক হইলে $\cos^{-1}x$ $90°$ ও $180°$ এর মধ্যবর্তী হইবে।

80. (i) $\sin\theta=x$ হইলে, $\theta=\sin^{-1}x$, $\therefore$ $\theta=\sin^{-1}\sin\theta$.

অনুরূপে, $\theta=\cos^{-1}\cos\theta$, $\theta=\tan^{-1}\tan\theta$, ইত্যাদি।

(ii) আবার, $\theta=\sin^{-1}x$ হইলে, $\sin\theta=x$, $\therefore$ $\sin\sin^{-1}x=x$.

অনুরূপে, $\cos\cos^{-1}x=x$, $\tan\tan^{-1}x=x$, ইত্যাদি।

(iii) প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$, $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x}$, $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$ হইবে।

প্রমাণ। মনে কর $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\operatorname{cosec}\theta=x$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\frac{1}{x}, \quad \therefore \sin^{-1}\frac{1}{x}=\theta.$$

অতএব, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$.

অনুরূপে অপর দুইটিও সহজে প্রমাণ করা যায়।

[দ্রষ্টব্য। উপরের প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}=\sin^{-1}x,\ \cot^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}x,\ \sec^{-1}\frac{1}{x}=\cos^{-1}x.$$]

81. ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলিকে উহাদের কোন একটি কোণানুপাতের আকারে প্রকাশ করা যায়। অতএব, ব্যতিরেকী (inverse) কোণানুপাতগুলিকে কোন একটি ব্যতিরেকী অনুপাতে প্রকাশ করা যাইবে।

মনে কর $\theta=\sin^{-1}x$, সুতরাং $\sin\theta=x$,

$\therefore \quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$; $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{x}$

অতএব, প্রমাণিত হইল যে,

$$\theta = \sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

দ্রষ্টব্য। উপরের সিদ্ধান্ত হইতে পাই $\theta = \sin^{-1}x$ ও $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, কিন্তু ইহা হইতে বলা যায় না যে $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} \cdots (1)$ সর্বক্ষেত্রে সমান হইবে। কারণ, $\theta = \sin^{-1}x$ ও $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ এই দুইটিতে θ এর অনন্ত সংখ্যক মান আছে, কিন্তু সাইন ও কোসাইনের সাধারণ মান দুইটি (general values) এক নহে, সুতরাং ঐ (i) সমীকরণটি সতত সত্য নহে।

দৃষ্টান্ত স্বরূপ মনে কর $x = \frac{1}{2}$, সুতরাং $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

এক্ষেত্রে $\sin^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = 30°, 150°, 390°, 510°, \cdots$ প্রভৃতি,

এবং $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30°, 330°, 390°, 690° \cdots\cdots$ ইত্যাদি।

অতএব, দেখা গেল যে, $\sin^{-1}x$ ও $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ সতত সমান নহে।

82. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$.

প্রমাণ। (i) মনে কর $\sin^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sin\theta=x$.

একণে, $\because \sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$,

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$, সুতরাং $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$.

$\therefore \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(ii) মনে কর $\tan^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\tan\theta=x$.

আবার, $\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\therefore \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$,

$\therefore \cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$. $\therefore \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(ii) মনে কর $\sec^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sec\theta=x$.

একণে, $\sec\theta=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$; $\therefore \operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$.

$\therefore \sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

83. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

এবং (ii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$.

প্রমাণ। (i) মনে কর $\tan^{-1}x=\alpha$ এবং $\tan^{-1}y=\beta$;

সুতরাং $\tan\alpha=x$ এবং $\tan\beta=y$.

একণে, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+y}{1-xy}$.

$\therefore \quad \alpha+\beta=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

অতএব, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

(ii) মনে কর $\tan^{-1}x=\alpha$ ও $\tan^{-1}y=\beta$,
সুতরাং $\tan\alpha=x$ ও $\tan\beta=y$.

এক্ষণে, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x-y}{1+xy}$

$$\therefore \quad \alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy},$$

অতএব, $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

84. প্রমাণ কর যে,

(i) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$,

এবং (ii) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

প্রমাণ। (i) মনে কর $\cot^{-1}x=\alpha$ ও $\cot^{-1}y=\beta$,
সুতরাং $\cot\alpha=x$ ও $\cot\beta=y$.

এক্ষণে, $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}=\dfrac{xy-1}{y+x}$

$\therefore \quad \alpha+\beta=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$, $\quad\therefore \cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$.

(ii) অনুরূপে, $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}=\dfrac{xy+1}{y-x}$,

$\therefore \quad \alpha-\beta=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$, $\quad\therefore \cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

85. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yx-zx-xy}$.

মনে কর, $\tan^{-1}x=A$, $\tan^{-1}y=B$ এবং $\tan^{-1}z=C$,
সুতরাং $\tan A=x$, $\tan B=y$ এবং $\tan C=z$.

একণে, $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\ \tan B\ \tan C}{1-\tan B\ \tan C-\tan C\ \tan A-\tan A\ \tan B}$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

$\therefore\quad A+B+C=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy},$

কিন্তু $A+B+C=\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z,$

$\therefore\quad \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$

86. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$

(iii) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}.$

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}.$

প্রমাণ। (i) মনে কর $\sin^{-1}x=\alpha$, এবং $\sin^{-1}y=\beta$,

সুতরাং $\sin\alpha=x$, এবং $\sin\beta=y$.

$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2},$

এবং $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-y^2}.$

একণে, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$$

$\therefore\quad \alpha+\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$

$\therefore\quad \sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$

(ii) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$ [(i) দেখ].

$\alpha-\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$

$\therefore\quad \sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$

(iii) মনে কর $\cos^{-1} x = \alpha$ এবং $\cos^{-1} y = \beta$,

সুতরাং $\cos \alpha = x$ এবং $\cos \beta = y$,

$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-x^2}$

এবং $\sin \beta = \sqrt{1-\cos^2 \beta} = \sqrt{1-y^2}$.

একণে, $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$= xy - (\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-y^2})$

$\therefore \alpha + \beta = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

$\therefore \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

(iv) $\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$= xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ [(iii) দেখ]

$\therefore \alpha - \beta = \cos^{-1}\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

$\therefore \cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

87. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $2 \sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

(ii) $2 \cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

(iii) $2 \tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

প্রমাণ। (i) মনে কর $\sin^{-1} x = \theta$, সুতরাং $\sin \theta = x$,

$\therefore \cos \theta = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \sqrt{1-x^2}$.

একণে, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2x\sqrt{1-x^2}$.

$\therefore 2\theta = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$,

$\therefore 2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) মনে কর $\cos^{-1}x = \theta$, সুতরাং $\cos \theta = x$.

$\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$. $\therefore 2\theta = \cos^{-1}(2x^2-1)$

$\therefore 2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$.

(iii) মনে কর $\tan^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\tan\theta=x$

একণে, $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$,

$\therefore\ 2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $\quad\therefore\ 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

88. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

(ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

(iii) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

প্রমাণ। (i) মনে কর $\sin^{-1}x=\alpha$, সুতরাং $\sin\alpha=x$.

একণে, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3x-4x^3$

$\therefore\ 3\alpha=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

$\therefore\ 3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) মনে কর $\cos^{-1}x=\alpha$, সুতরাং $\cos\alpha=x$.

একণে, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4x^3-3x$,

$\therefore\ 3\alpha=\cos^{-1}(4x^3-3x)$,

$\therefore\ 3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(iii) মনে কর $\tan^{-1}x=\alpha$, সুতরাং $\tan\alpha=x$.

একণে $\because\ \tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

$\therefore\ 3\alpha=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $\quad\therefore\ 3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

89. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

প্রমাণ। মনে কর $\tan^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\tan\theta=x$.

একণে $\because\ \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2x}{1+x^2}$.

$\therefore \quad 2\theta=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}, \quad \therefore \quad 2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}.$

আবার, $\because \quad \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2},$

$\therefore \quad 2\theta=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad . \quad 2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}.$

পুনরায়, $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore \quad 2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, \quad \therefore \quad 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$

অতএব, $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$

[দ্রষ্টব্য। উপরের সিদ্ধান্তগুলি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় এবং বিভিন্ন সমাধানে প্রায়ই উহাদের প্রয়োগ হইয়া থাকে। ঐগুলি মনে রাখিতে হইবে।]

উদাহরণমালা 10

উদা. 1. Find the value of $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

মনে কর $\theta=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, সুতরাং $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ=\sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{\pi}{3}$.

উদা. 2. Express $\sec^{-1}x$ in terms of other inverse functions.

মনে কর $\sec^{-1}x=\theta$, সুতরাং $\sec\theta=x$.

$\therefore \quad \frac{1}{\cos\theta}=x$, বা $\cos\theta=\frac{1}{x}, \quad \therefore \quad \theta=\cos^{-1}\frac{1}{x}.$

আবার $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\pm x}$

$\therefore \quad \theta=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\pm x}.$

একণে, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\sqrt{x^2-1}$,

$\therefore\ \theta=\tan^{-1}(\pm\sqrt{x^2-1})$,

$\cot\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\therefore\ \theta=\cot^{-1}\frac{\pm1}{\sqrt{x^2-1}}$

এবং $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\therefore\ \theta=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}}$.

অতএব; $\sec^{-1}x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\pm x}=\cos^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}(\pm\sqrt{x^2-1})$

$$=\cot^{-1}\frac{\pm1}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

উদা. 3. Show that $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

মনে কর $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\theta$, সুতরাং $\sin\theta=\frac{12}{13}$.

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}$.

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{12}{13}\times\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$, $\therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{12}{5}$

অতএব, $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

উদা. 4. Show that $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

মনে কর $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha$, এবং $\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$,

সুতরাং $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\beta=\frac{12}{13}$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=\alpha+\beta$, এখন ইহাকে inverse cosine এর আকারে প্রকাশ করিতে হইবে; কারণ ডানপক্ষটি inverse cosine এর আকারে আছে।

একণে, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

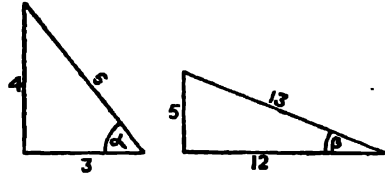
ডানদিকে অঙ্কিত চিত্রদ্বয় হইতে ডানপক্ষের function-গুলির মান বসাইয়া পাই

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$

$=\frac{36}{65}-\frac{4}{13}=\frac{16}{65}$

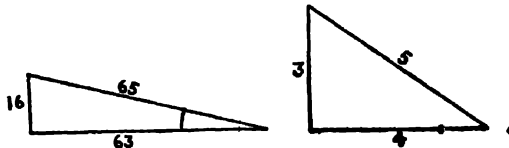
$\therefore\quad \alpha+\beta=\cos^{-1}\frac{16}{65}.$

অতএব,

$\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{16}{65}.$

(চিত্র 5)

[দ্রষ্টব্য। (i) উপরের উদাহরণে $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ হইতে অঙ্ক কষিয়া $\cos\alpha$ এর মান এবং $\cos\beta=\frac{12}{13}$ হইতে $\sin\beta$ এর মান নির্ণয় করিয়া সমাধান করা যাইত, কিন্তু প্রদর্শিত প্রণালীতে চিত্র অঙ্কন করিয়া সমাধান করা সহজ হয়। এখানে দেখ, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ আছে, সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = 5 একক ও লম্ব = 4 একক ধরা হইয়াছে, অতএব ভূমিটি = 3 একক হইবে। অনুরূপে দ্বিতীয় চিত্রে অতিভুজ = 13 একক ও ভূমি = 12 একক ধরা হইয়াছে, সুতরাং লম্বটি = 5 একক হইয়াছে।

(ii) অনেক ক্ষেত্রে tangent বা cotangent রূপে প্রকাশ করিয়া সমাধান করা সহজ হইয়া থাকে। নিম্নে উদাহরণ 5 দেখ।]

উদা. 5. Show that $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\sin^{-1}\frac{3}{5}.$

(চিত্র 6)

বামপক্ষ $=\tan^{-1}\dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

[$\because$ চিত্র 6 হইতে পাই $\cos^{-1}\frac{63}{65}=\tan^{-1}\frac{16}{63}$]

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}+\tan^{-1}\tfrac{16}{63}=\tan^{-1}\tfrac{5}{12}+\tan^{-1}\tfrac{16}{63}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{16}{63}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{16}{63}}=\tan^{-1}\frac{\frac{507}{12\times 63}}{\frac{169}{189}}=\tan^{-1}\tfrac{3}{4}$$

$$=\sin^{-1}\tfrac{3}{5}.$$

[দ্রষ্টব্য। এখানে $\cos^{-1}\frac{63}{65}$ দেওয়া থাকায় প্রথম চিত্রে অতিভুজ $=65$ ও ভূমি$=63$ ধরা হইয়াছে, সুতরাং লম্বটি$=16$ হইল। এখন দেখ, যে কোণের cosine$=\frac{63}{65}$, তাহার $\tan=\frac{16}{63}$, সুতরাং $\cos^{-1}\frac{63}{65}=\tan^{-1}\frac{16}{63}$ ধরা হইয়াছে। আবার, সমাধান করিয়া বামপক্ষ$=\tan^{-1}\frac{3}{4}$ হইয়াছে, সুতরাং দ্বিতীয় চিত্রে লম্ব$=3$ ও ভূমি$=4$ ধরা হইয়াছে, সুতরাং অতিভুজ $=5$ হইল। এখন দেখ যে কোণের tangent $\frac{3}{4}$, তাহার sine হইল $\frac{3}{5}$, সুতরাং $\tan^{-1}\frac{3}{4}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$ হইল।]

উদা. 6. Prove that $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)$
$=\tan^{-1}(x^2+x+1)$. [C.U. '60]

$$\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}\frac{1}{x+1},$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ}=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x+1}=\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{x+1}}{1-x.\frac{1}{x+1}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{x^2+x+1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\tan^{-1}(x^2+x+1).$$

উদা. 7. Prove that $\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

মনে কর $\sin^{-1}x=\theta$, $\therefore\ \sin\theta=x$,

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$.

এক্ষণে, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2x\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ 2\theta=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$,

বা, $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$\therefore \quad \sin(2\sin^{-1} x) = \sin\{\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})\} = 2x\sqrt{1-x^2}$.

উদা. 8. Show that $\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy} + \tan^{-1}\dfrac{y-z}{1+yz}$

$$+\tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx} = 0.$$

$$\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy} = \tan^{-1}x - \tan^{-1}y \cdots\cdots (1)$$

$$\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz} = \tan^{-1}x - \tan^{-1}z \cdots\cdots (2)$$

এবং $\tan^{-1}\dfrac{z-x}{1+zx} = \tan^{-1}z - \tan^{-1}x \cdots\cdots (3)$

এক্ষণে (1), (2) ও (3) যোগ করিয়া পাই

$$\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy} + \tan^{-1}\frac{y-z}{1+zy} + \tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx} = 0.$$

উদা. 9. Prove that $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1} x = x$.

মনে কর $\sin^{-1} x = \theta$, সুতরাং $\sin\theta = x$, $\therefore \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \quad \cot\sin^{-1} x = \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

সুতরাং $\tan^{-1}\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore \quad$ প্রদত্ত বামপক্ষ $= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x$.

উদা. 10. Solve $\sin^{-1}x = \cos^{-1}x$.

মনে কর $\cos^{-1}x = \theta$, $\therefore \cos\theta = x$,

$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\quad \therefore \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \theta$

এক্ষণে $\sin^{-1}x = \cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$,

বা, $x=\sqrt{1-x^2}$, বা $x^2=1-x^2$, বা $2x^2=1$,

বা, $x^2=\frac{1}{2}$, $\therefore$ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

উদা. 11. Solve $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$.

$$\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4},$$

বা, $\tan^{-1}\frac{2x+3x}{1-2x\times 3x}=\frac{\pi}{4}$, বা $\tan^{-1}\frac{5x}{1-6x^2}=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\frac{5x}{1-6x^2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$,

বা, $6x^2+5x-1=0$, বা $(6x-1)(x+1)=0$,

$\therefore$ $6x-1=0$, অথবা $x+1=0$, $\therefore$ $x=\frac{1}{6}$ বা -1.

এখানে x এর ঋণাত্মক মান -1 দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না, অতএব উহা একটি অবাস্তব মান।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{1}{6}$.

উদা. 12. Solve $\tan^{-1}\frac{1}{1+2x}+\tan^{-1}\frac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\frac{2}{x^2}$.

[Agra '47]

$\because$ $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$,

$$\therefore \tan^{-1}\frac{1}{1+2x}+\tan^{-1}\frac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+4x}}{1-\frac{1}{(1+2x)(1+4x)}}.$$

$$=\tan^{-1}\frac{2(1+3x)}{2x(3+4x)}=\tan^{-1}\frac{1+3x}{x(3+4x)}.$$

অতএব, $\tan^{-1}\frac{1+3x}{x(3+4x)}=\tan^{-1}\frac{2}{x^2}$,

$\therefore$ $\frac{1+3x}{x(3+4x)}=\frac{2}{x^2}$, বা $\frac{1+3x}{3+4x}=\frac{2}{x}$,

বা, $x+3x^2=6+8x$, বা $3x^2-7x-6=0$,

বা, $(3x+2)(x-3)=0$,

$\therefore$ $x=-\frac{2}{3}$ অথবা 3.

উদা. 13. Solve $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2)$.

মনে কর $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\cos^{-1}x=\beta$,

$\therefore\ \sin\alpha=x$ এবং $\cos\beta=x$;

সুতরাং $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ এবং $\sin\beta=\sqrt{1-x^2}$.

এক্ষণে সমীকরণটি হইতে পাই

$\alpha-\beta=\sin^{-1}(3x-2)$

$\therefore\ 3x-2=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=x\times x-\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{1-x^2}$

$=x^2-(1-x^2)=2x^2-1,$

বা, $2x^2-3x+1=0$, বা $(2x-1)(x-1)=0$,

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ বা 1.

√উদা. 14. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$,

show that $xy+yz+zx=1$.

$\because\ \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yx-yz-zx}$,

$\therefore\ \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\ \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=\tan\frac{\pi}{2}=\infty\ \left[\because\ \tan\frac{\pi}{2}=\tan 90^\circ=\ \right]$

কোন ভগ্নাংশের মান অনন্ত (∞) হইতে পারে, যদি তাহার হরটি শূন্য হয়, কারণ শূন্য দ্বারা কোন রাশিকে ভাগ করিলে ভাগফল অসীম হইয়া থাকে।

$\therefore$ এখানে $1-xy-yz-zx=0$, $\therefore\ xy+yz+zx=1$.

Exercise 10

Find the value of :

1. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4. $\cos^{-1}0$. 5. $\sin^{-1}(\frac{4}{5})+\operatorname{cosec}^{-1}(\frac{5}{3})$

6. $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$ [C. U. '17]

7. Express the following in terms of other inverse functions :—

(i) $\sin^{-1}x$ (ii) $\tan^{-1}x$.

Show that :—

8. $\tan^{-1}\frac{8}{15}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{17}{8}$.

9. $\sin^{-1}\frac{77}{85}=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}$.

10. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$. [B. H. U. '48]

11. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '39]

12. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\cot^{-1}\frac{24}{7}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$.

13. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$. [C. U. '41]

14. $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$.

15. $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{12}{5}$.

16. $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$.

17. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$. [U. P. B.]

18. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$. [C. U. '43]

19. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$. [C. U. '51]

20. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '37]

21. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$. [B. H. U. '52]

22. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$. [C. U. '52, 55]

23. Given $\sec^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}y$, prove by general reasoning that $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$. [C. U. '50]

Prove that :—

24. $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c=\tan^{-1}a.$ [C. U. '55]

25. $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca}$

$$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}.$$

[P. U. 31']

26. $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)=\pi-2x.$

27. $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})=1.$

28. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}p=p.$

29. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0.$ [C. U. '48]

30. $\tan^{-1}r+\cot^{-1}(r+1)=\tan^{-1}(r^2+r+1).$

31. $\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{x-y}+\cot^{-1}\dfrac{yz+1}{y-z}+\cot^{-1}\dfrac{zx+1}{z-x}=0.$

32. $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$
$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$ [C. U. B. Sc. '39]

Solve for x :—

33. $\tan^{-1}x=\cot^{-1}x.$ 34. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\dfrac{\pi}{3}.$

35. $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}.$

36. $\cot^{-1}x+\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\pi}{4}.$

37. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x.$

38. $\sin^{-1}\dfrac{5}{x}+\sin^{-1}\dfrac{12}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ [C. U. '14]

39. $\tan^{-1}(x+1)-\cot^{-1}\dfrac{1}{x-1}=\tan^{-1}2.$

40. $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x.$ [C. U. B. Sc.]

41. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\pi$. [Agra '42]

42. $2\cot^{-1}2+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\text{cosec}^{-1}x$.

43. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\cot^{-1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{\pi}{4}$.

44. $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$. [C. U. '47]

45. $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)$

46. $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$ [Agra '43]

47. Solve : $\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2}{3}\pi\\ \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{1}{3}\pi\end{array}\right]$ [C. U. '40]

48. Find if there is any value of x which strictly satisfies the equation $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7)$.

49. Find the value of $\tan(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x)$.

50. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, shew that $x+y+z=xyz$. [C. U. '54]

51. If $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, show that $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. [C. U. B. Sc. '41]

52. If $A+B+C=\pi$ and if $A=\tan^{-1}2$, $B=\tan^{-1}3$, show that $C=\frac{\pi}{4}$. [C. U. 51]

53. Show that $\tan^{-1}\frac{1}{a+b}+\tan^{-1}\frac{b}{a^2+ab+1}=\tan^{-1}\frac{1}{a}$. [C. U. '49]

54. Prove that $\sec^2(\tan^{-1}2)+\text{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$. [C. U. '56]

55. Prove that $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$. [A. U. '47]

56. If $\sin^{-1}\alpha+\sin^{-1}\beta+\sin^{-1}\gamma=\pi$, show that $\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+\beta\sqrt{1-\beta^2}+\gamma\sqrt{1-\gamma^2}=2\alpha\beta\gamma$. [B. H. U. '44]

Properties of Triangles

(ত্রিভুজের গুণাবলী)

বিভাগ (ক) [বাহু ও কোণানুপাতের সম্বন্ধ]

90. তোমরা জ্যামিতি হইতে জান যে প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ এই ছয়টি অঙ্গ আছে। আর ত্রিভুজগুলি কোণ অনুসারে সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী এবং ভুজানুসারে বিষমবাহু, সমবাহু ও সমদ্বিবাহু এই ছয় শ্রেণীর হইয়া থাকে।

ত্রিভুজের কোণ তিনটিকে সাধারণতঃ A, B, C দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আর A কোণের বিপরীত বাহুকে a দ্বারা, B কোণের বিপরীত বাহুকে b দ্বারা এবং C কোণের বিপরীত বাহুকে c দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ বা S দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন বিভাগে আমরা ত্রিভুজের বাহুগুলি, কোণগুলি, ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ, অন্তর্ব্যাসার্ধ ও বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ সংক্রান্ত সূত্রগুলি (formulas) নির্ণয় করিব।

91. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণের সাইনগুলির সমানুপাতী।

(In any triangle ABC prove that $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.)

[Sine Rule]

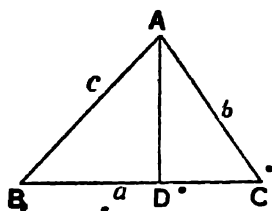
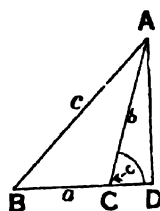
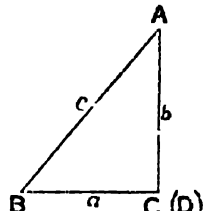
অথবা

কোন ত্রিভুজের কোণগুলির সাইন তিনটি বিপরীত বাহুগুলির সমানুপাতী

(In any triangle the sines of angles are proportional to the opposite sides.)

অথবা, প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজে $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.

মনে কর ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ।
উহা (i) চিত্রে সূক্ষ্মকোণী, (ii) চিত্রে স্থূলকোণী এবং (iii) চিত্রে সমকোণী

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

চিত্রে 7

প্রমাণ। A হইতে BC-র বা বর্ধিত BC-র উপর AD লম্ব টান। (iii) চিত্রে AD লম্ব AC-র উপর সমাপতিত।

এক্ষণে, $\triangle$ABD হইতে $AD = AB \sin ABD = c \sin B$,

এবং $\triangle$ACD হইতে $AD = AC \sin ACD = b \sin C$ [চিত্র (i) এ]

অথবা $\triangle$ACD হইতে $AD = b \sin(\pi - C)$ [চিত্র (ii)এ]
$= b \sin C$

$\therefore\ b \sin C = c \sin B,\quad \therefore\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

অনুরূপ B হইতে ACএর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

চিত্র (iii)এ C একটি সমকোণ বলিয়া

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c} \text{ এবং } \sin C=\sin 90°=1.$$

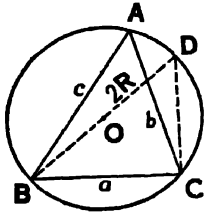
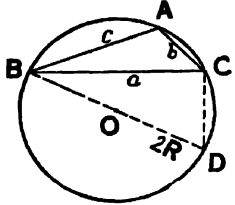
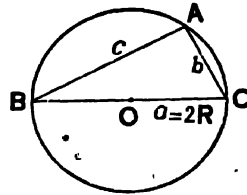
$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=c,\ \frac{b}{\sin B}=c \text{ এবং } c=\frac{c}{\sin C}.\quad [\because \sin C=1]$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

অতএব, যে কোন ত্রিভুজে $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

[বিকল্প প্রমাণ]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R.

A কোণটি সূক্ষ্ম বা স্থূলকোণ হইলে (অর্থাৎ চিত্র IV ও V-এ) BO যোগ

(iv) (v) (vii) চিত্র ৪

করিয়া পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DC যোগ কর।

এক্ষণে, BO = DO = R, সুতরাং BD = 2R.

∠A সূক্ষ্মকোণ হইলে (চিত্র IV)

∵ ∠BCD = সমকোণ (অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া),

∴ △BCD হইতে $\sin BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$.

আবার, ∠BDC = ∠A (একই বৃত্তাংশস্থ কোন বলিয়া)

$\therefore \frac{a}{2R} = \sin A$, বা $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

∠A স্থূলকোণ হইলে (চিত্র V)

ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায় $\angle BDC = 180° - \angle A$,

$\therefore \sin A = \sin (180° - A) = \sin BDC = \frac{a}{2R}$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$.

আবার, ∠A সমকোণ হইলে (চিত্র VI)

$\sin A = \sin 90° = 1 = \frac{a}{a} = \frac{a}{2R}$, সুতরাং $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

অতএব, যে কোন ত্রিভুজেই $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

অনুরূপে, AO যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে যদি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে BE ও CE যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{b}{\sin B}=2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C}=2R.$$

অতএব, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ [∵ প্রত্যেকটি $=2R$].

অনুসিদ্ধান্ত। ∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$

(i) ∴ $a=2R \sin A$, $b=2R \sin B$ এবং $c=2R \sin C$.

(ii) $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$.

(iii) ∴ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, ইত্যাদি।

[**দ্রষ্টব্য।** (i) উপরের প্রমাণিত সম্বন্ধটিকে **Sine Rule** বলা হয়।

(ii) কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদ বিন্দুটি উহার শীর্ষত্রয় হইতে সমদূরবর্তী। অতএব, ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া উহা হইতে যে কোন শীর্ষ পর্যন্ত দূরত্বকে ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত (circum-circle) হয়। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দুটি পরিবৃত্তের কেন্দ্র হয় এবং অতিভুজটি ব্যাস হয়।

92. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা কোণগুলির কোসাইনের প্রকাশ।

(Cosines of angles of a triangle in terms of sides). এই সম্বন্ধকে **Cosine Rule** বলে।

অথবা

In any triangle to prove that

$$\mathbf{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A} \quad \text{বা} \quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\mathbf{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B} \quad \text{বা} \quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\mathbf{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C} \quad \text{বা} \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

[এখানে 91 অনুচ্ছেদের চিত্র (i), (ii) ও (iii) অঙ্কিত কর

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A হইতে BC বা বর্ধিত BCর উপর AD লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ। যদি C একটি সূক্ষ্মকোণ হয় [চিত্র (*i*)], তবে

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.CD$, বা $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD$.

এক্ষণে, $\triangle ACD$ হইতে পাই $CD = AC \cos C = b \cos C$.

$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$

$$\text{বা } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

যদি C একটি স্থূলকোণ হয়, তবে

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD$, বা $c^2 = a^2 + b^2 + 2a.CD$,

এবং $\triangle ACD$ হইতে পাই $CD = AC \cos ACD = b \cos (\pi - C)$

$$= -b \cos C \quad [\because \cos(\pi - C) = -\cos C]$$

$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$

যদি C একটি সমকোণ হয়, তবে

$AB^2 = BC^2 + AC^2,$

অর্থাৎ $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times 0$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad [\because \cos C = \cos 90° = 0]$$

অতএব, প্রমাণিত হইল যে C এর সর্বমানে $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

$$\text{অর্থাৎ } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

অনুরূপে অন্য সূত্র দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

93. 91 নং অনুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত এবং 92 নং অনুচ্ছেদ হইতে পাওয়া গিয়াছে যে, $\sin A = \frac{a}{2R}$ এবং $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

$$\therefore \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{2R} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$$

অনুরূপে $\tan B = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$, এবং

$$\tan C = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

94. যে কোন ABC ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$a = b \cos C + c \cos B$

$b = c \cos A + a \cos C$

$c = a \cos B + b \cos A.$

91 নং অনুচ্ছেদের চিত্র (i) এ, $\triangle ABC$ এর C সূক্ষ্মকোণ হইলে

$BC = BD + CD = AB \cos ABD + AC \cos ACD$

$\therefore a = c \cos B + b \cos C.$

C কোণটি স্থূলকোণ হইলে [চিত্র (ii) এ]

$BC = BD - CD = AB \cos ABD - AC \cos ACD$

$= c \cos B - b \cos (180° - C)$

$= c \cos B + b \cos C$ [$\because \cos (180° - C) = -\cos C$]

আবার, C কোণটি সমকোণ হইলে [চিত্র (iii) এ]

$BC = AB \cos B,$

$a = c \cos B + b \cos 90°$ [$\because \cos 90° = 0$]

$= c \cos B + b \cos C$ [$\therefore \cos 90°$]

অতএব, সর্বক্ষেত্রেই $a = b \cos C + c \cos B$.

অপর সূত্র দুইটিও অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

[দ্রষ্টব্য ঃ—এখানে জানা গেল যে, ত্রিভুজের যে কোন বাহু তাহার উপর অপর বাহুদ্বয়ের অভিক্ষেপ দুইটির সমষ্টির সমান হয়।]

95. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির সাইনের প্রকাশ।

(To find the sines of half the angles in terms of the sides).

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, যে কোন ABC ত্রিভুজে

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

আবার, $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$.

$$\therefore\ 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \ldots\ldots(1)$$

মনে কর, $s =$ ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা (semi-perimeter),

স্বতরাং $2s = a+b+c$.

এক্ষণে, $a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c)$,

এবং $a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b)$.

অতএব, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$.

$$\therefore\ \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

এখানে $(s-b)(s-c)$এর কেবল ধনাত্মক বর্গমূলটি ধরা হইয়াছে। কারণ, A কোণটি ত্রিভুজের কোণ বলিয়া 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, স্বতরাং $\frac{A}{2} < 90°$. অতএব, $\sin\frac{A}{2}$ সতত ধনাত্মক হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\ \text{এবং}\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

96. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির কোসাইনের প্রকাশ।

(To find the cosines of half the angles in terms of the sides).

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

এবং $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$.

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{2s(2s-2a)}{2bc}\ [\ 2s=a+b+c \text{ ধরিয়া }]$$

$$=\frac{4s(s-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc},$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc},\quad \therefore\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

এখানে বর্গমূলের ধনাত্মক মানটিই গ্রহণ করা হইয়াছে। কারণ ত্রিভুজের কোণ $\frac{A}{2}<90°$, সুতরাং $\cos\frac{A}{2}$ সতত ধনাত্মক হইবে।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \text{ এবং } \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

97. ত্রিভুজের বাহু দ্বারা অর্ধকোণগুলির ট্যান্‌জেণ্টের প্রকাশ।

(To find the tangents of half the angles in terms of the sides).

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

অতএব 95 ও 96 অনুচ্ছেদ হইতে পাই,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\div\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

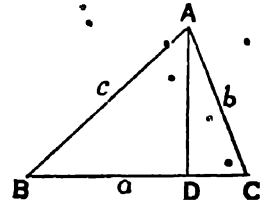
অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \text{ এবং } \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

এখানে ত্রিভুজের কোণ $A<180°$, অর্থাৎ $\frac{A}{2}<90°$, সুতরাং $\tan\frac{A}{2}$ সতত ধনাত্মক হইবে। সেইজন্য এখানে কেবল ধনাত্মক বর্গমূল গ্রহণ করা হইয়াছে।

98. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

(To find the area of a triangle).

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং উহার ক্ষেত্রফলকে Δ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হইল। $AD\perp BC$ টান। AD ত্রিভুজটির উচ্চতা হইল। এক্ষণে ΔACD হইতে পাই $AD = AC \sin C = b \sin C$.

চিত্র 9

আবার, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} BC.AD = \frac{1}{2} ab \sin C.$

অনুরূপে, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$.

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$$
$$= \frac{1}{2} ac \sin B$$
$$= \frac{1}{2} bc \sin A$$

$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2}$ (যে কোন দুই বাহুর গুণফল) $\times$ অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন$\cdots$(i)

[অন্য আকারে ক্ষেত্রফল নির্ণয়]

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc \times 2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} = bc \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}$$

$$= bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = bc \times \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \text{(ii)}$$

আবার, ∵ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,

∴ $a+b+c=2s$, $(a+b-c)=2(s-c)$, $(b+c-a)=2(s-a)$,

$c+a-b=2(s-b)$.

∴ $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c).\tfrac{1}{2}(b+c-a).\tfrac{1}{2}(c+a-b).\tfrac{1}{2}(a+b-c)}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}\ \cdots\cdots\text{(iii)}$$

আবার, ∵ $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R}$ [R = পরিব্যাসার্ধ]

∴ $\Delta=\dfrac{abc}{4R}$ অথবা $R=\dfrac{abc}{4\Delta}$.

অনুসিদ্ধান্ত। $\sin A=\dfrac{2\Delta}{bc}$, $\sin B=\dfrac{2\Delta}{ca}$, $\sin C=\dfrac{2\Delta}{ab}$.

99. ত্রিভুজের বাহু ও কোণের সাইনের সম্বন্ধ।

(Sine of an angle of a triangle in terms of the sides)

$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

∴ $\sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

অনুরূপে, $\sin B=\dfrac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$\sin C=\dfrac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

আবার, $\sin A=\dfrac{2\Delta}{bc}=\dfrac{2\times\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{bc}$

$$=\frac{\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{2bc}.$$

অনুরূপে sin B ও sin C নির্ণয় করা যায়।

[এখানে $A < 180°$ বলিয়া বর্গমূলের কেবল ধনাত্মক চিহ্ন লওয়া হইয়াছে।]

100. অনুচ্ছেদ 97 হইতে পাই,

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \cdot \frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}.$$

অনুরূপে, $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ এবং $\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

আবার, $\cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)} \cdot \frac{s(s-a)}{s(s-a)}}$

$$= s(s-a)$$

অনুরূপে, $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং $\cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$.

101. প্রমাণ করিতে হইবে যে, যে কোন ABC ত্রিভুজে

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2} \quad \text{[Tangent Rule]}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

এখানে $A+B+C=180°$, $\therefore \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$.

এক্ষণে, যে কোন ABC ত্রিভুজে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \therefore \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\therefore \frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\left[\because \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ, \quad \therefore \cot\frac{B+C}{2}=\cot\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\tan\frac{A}{2}\right]$$

$$\therefore \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}.\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

অনুরূপে অপর সম্বন্ধ দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত। $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$, $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$

এবং $\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)}$.

উদাহরণমালা 11

উদা. 1. If in a triangle $a=7$, $b=3$, $c=5$, find A.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5}=\frac{-15}{30}=-\tfrac{1}{2}=\cos 120^\circ$$

$\therefore \quad A=120^\circ$.

উদা. 2. If $B=60^\circ$, $c=2\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}$, find A.

সূত্র হইতে পাই $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}.\sin 60^\circ$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore$ $C=45^\circ$, বা 135°, কিন্তু এখানে $C=135^\circ$ হইতে পারে না, কারণ তাহা হইলে $B+C$ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

$\therefore \quad C=45^\circ. \qquad \therefore \quad A=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ.$

উদা. 3. If $a=25$, $b=52$ and $c=63$, find $\tan\frac{B}{2}$.

এখানে $s=\frac{25+52+63}{2}=70.$

$\therefore s-a=70-25=45$, $s-b=70-52=18$, $s-c=70-63=7$

$$\therefore \quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{7\times 45}{70\times 18}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

[এখানে ঋণাত্মক বর্গমূলটি গ্রাহ্য হইতে পারে না।]

উদা. 4. If $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$, find C.

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $c^4+a^4+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2=0,$

বা, $c^4+a^4+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+2a^2b^2=2a^2b^2,$

বা, $(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2,$

বা, $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=\frac{1}{2}$ [উভয় পক্ষকে $4a^2b^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া];

$\therefore \quad \cos^2 C=\frac{1}{2}\left[\because \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right]$

$\therefore \quad \cos C=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore \quad C=45^\circ$ বা, 135°.

উদা. 5. The sides of a triangle are x^2+x+1, $2x+1$ and x^2-1. Determine the value of the greatest angle.

[C. U. '10]

মনে কর, বৃহত্তম কোণটি θ.

ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণটি বৃহত্তম কোণ হয়।

এখন প্রদত্ত বাহু তিনটির মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম প্রথমে তাহাই দেখিতে হইবে।

$\because$ ত্রিভুজের বাহু ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore$ x^2-1 ধনাত্মক হইবে, সুতরাং xএর মান অবশ্যই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

$x>1$ হইলে দেখা যায় যে x^2+x+1 বৃহত্তম হইবে।

এক্ষণে, $\cos\theta=\dfrac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x^3+x^2-2x-1)}$$

$$=\frac{-(2x^3+x^2-2x-1)}{2(2x^3+x^2-2x-1)}=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore\quad \cos\theta=-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ,\ \therefore\ \theta=120^\circ.$

উদা. 6. In any triangle prove that

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}.$$

$\because\quad a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C,$

$\therefore\quad b-c=2R(\sin B-\sin C),$

$$\frac{b-c}{a}=\frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R\sin A}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$\left[\because\quad \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা পাই $(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}.$

উদা. 7. In $\triangle ABC$, show that $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$.

বামপক্ষ $= ab \cos C - ac \cos B$

$$= ab \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - ac \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - \frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(2b^2-2c^2) = b^2-c^2.$$

উদা. 8. In any triangle ABC, prove that

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

বামপক্ষ $= (a \sin B - b \sin A) + (b \sin C - c \sin B)$
$+ (c \sin A - a \sin C)$.

এক্ষণে, $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (যে কোন ত্রিভুজে)

$\therefore$ $a \sin B = b \sin A$, $\therefore$ $a \sin B - b \sin A = 0$,

অনুরূপে $b \sin C - c \sin B = 0$ এবং $c \sin A - a \sin C = 0$,

$\therefore$ বামপক্ষ $= 0 + 0 + 0 = 0$.

উদা. 9. In $\triangle ABC$, show that

$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0.$$

$\because$ $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$, $\cos^2\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{ca}$, $\cos^2\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{ab}$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $= \frac{b-c}{a} \cdot \frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b} \cdot \frac{s(s-b)}{ca} + \frac{a-b}{c} \cdot \frac{s(s-c)}{ab}$

$$= \frac{s}{abc}(s-a)(b-c) + \frac{s}{abc}(s-b)(c-a) + \frac{s}{abc}(s-c)(a-b)$$

$$= \frac{s}{abc}[s(b-c+c-a+a-b) - \{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}]$$

$$= \frac{s}{abc} \times 0 = 0.$$

উদা. 10. Prove that in $\triangle ABC$,

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{32\triangle^3}{a^2b^2c^2}.$$

$\because \quad A+B+C=180°,$

$\therefore \quad \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4 \sin A \sin B \sin C$

[ইহা ত্রিকোণমিতিক অভেদ অধ্যায়ে প্রমাণিত হইয়াছে]

আবার, $\sin A=\frac{2\triangle}{bc}$, $\sin B=\frac{2\triangle}{ca}$ এবং $\sin C=\frac{2\triangle}{ab}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=4 \sin A \sin B \sin C$

$$=4\times\frac{2\triangle}{bc}\times\frac{2\triangle}{ca}\times\frac{2\triangle}{ab}=\frac{32\triangle^3}{a^2b^2c^2}.$$

উদা. 11. If $c=2a$ and $C=3A$, find the angles of the triangle ABC.

$$\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore \quad \frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a}, \quad \text{বা,} \quad \frac{\sin 3A}{\sin A}=\frac{2a}{a}=2.$$

বা, $\frac{3 \sin A-4 \sin^3 A}{\sin A}=2$, বা $3 \sin A-4 \sin^3 A=2 \sin A$,

বা, $4 \sin^3 A=\sin A$, বা $\sin^2 A=\frac{1}{4}$,

$\therefore \quad \sin A=\frac{1}{2}=\sin 30° \quad \therefore \quad A=30°$

$\therefore \quad C=3A=90°$, এবং $B=180°-(A+C)=60°$.

উদা. 12. If the cosines of two of the angles are inversely proportional to the opposite sides, show that the triangle is either isosceles or right-angled. [C. U. '23]

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$; আবার $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$;

$$\therefore \quad \frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A},$$

বা, $\sin A \cos A = \sin B \cos B$,

বা, $2 \sin A \cos A = 2 \sin B \cos B$, বা $\sin 2A = \sin 2B$

$\therefore$ $2A = 2B$ অথবা $(180° - 2B)$.

এক্ষণে, $2A = 2B$ হইলে, $A = B$ হইবে,

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

আবার, $2A = 180° - 2B$ হইলে, $A + B = 90°$,

$\therefore$ অবশিষ্ট C কোণটি 90° হইবে, সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

অতএব, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী ত্রিভুজ।

উদা. 13. In any triangle prove that cot A, cot B, cot C are in A. P, if a^2, b^2, c^2 are in A. P. [A. U. '43]

$$\because \quad \sin A = \frac{a}{2R} \text{ এবং } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\therefore \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc},$$

অনুরূপে, $\cot B = \dfrac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$ এবং $\cot C = \dfrac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$

এক্ষণে, cot A, cot B, cot C in A. P. হইবে

যদি $\dfrac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$, $\dfrac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$, $\dfrac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$ in A. P. হয়,

অর্থাৎ যদি $b^2 + c^2 - a^2$, $c^2 + a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - c^2$ in A. P. হয়,

অর্থাৎ যদি $(c^2 + a^2 - b^2) - (b^2 + c^2 - a^2) = (a^2 + b^2 - c^2) - (c^2 + a^2 - b^2)$ হয়,

অর্থাৎ যদি $2a^2 - 2b^2 = 2b^2 - 2c^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$ হয়,

অর্থাৎ যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণী হয়।

Exercise 11

1. If $a=5$, $b=5\sqrt{3}$, $c=5$, find the angles of the triangle ABC.

2. If $a=3$, $b=3\sqrt{3}$ and $A=30°$, find B. [C. U. '21]

3. If $a=43$, $b=35$, $C=60°$, find c.

4. If $a=13$, $b=14$, $c=15$, find $\tan\frac{B}{2}$.

5. Find sin B, if $a=18$, $b=24$, $c=30$.

6. If $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, find A.

Find the area of the triangles :—

7. If $a=13$, $b=14$, $c=15$. 8. If $a=6$, $b=8$ and $s=12$.

9. The sides are as 3 : 4 : 5 and $s=216$ ft.

Prove the following :—

10. $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$. [C. U. '13]

11. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.

12. $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

13. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$. [P. U. '37]

14. $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$.

15. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$.

16. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b^2-c^2}{a^2}$.

17. $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$.

18. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$.

19. $(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(c+a-b)\tan\frac{B}{2}=(a+b-c)\tan\frac{C}{2}$.

20. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$. [A. U. '44]

21. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\Delta$.

22. $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$.

23. $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4\Delta$.

24. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$.

25. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$.

26. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$. [C. U. '12]

27. $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$. [B. H. U. '45]

28. If $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$, show that the triangle is isosceles. [B. H. U. '44]

29. If $b=2a$ and $B=3A$ find the angles of the triangle.

30. If $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, show that $C=60°$. [P. U.]

31. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 5, $5\sqrt{3}$, 5.

32. If $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$, show that the triangle is either isosceles or right-angled.

33. In a triangle if a, b, c are in A.P., show that the cotangents of the semi-angles are also in A.P. [C. U. '54]

34. If the consines of two anlges of a triangle be proportional to the opposite sides, show that the triangle is isosceles. [C. U. '24]

35. If the tangents of the semi-angles of a triangle are in A. P., show that the cosines of the angles are in A. P. [C U. '54]

36. If in a triangle the angles be to one another as 1 : 2 : 3, prove that the corresponding sides are as 1 : $\sqrt{3}$: 2.

37. Prove geometrically that in any triangle,

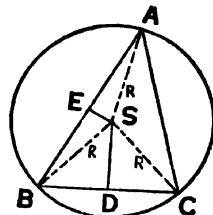
$a = b \cos C + c \cos B$, discussing separately the two cases (i) when B and C are both acute and (ii) when B is acute and C is obtuse. [C. U. '31]

38. If $a \cos^2\frac{C}{2} + c \cos^2\frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$, show that the sides of the triangle are in A. P. [P. U. '41]

বিভাগ (খ) [ত্রিভুজের গুণাবলী]

102. ত্রিভুজের পরিবৃত্ত (Circum-circle)। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উহার পরিবৃত্ত বা পরিলিখিত বৃত্ত (Circumscribed circle বা circum-circle) বলে। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু হয় ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং ঐ বিন্দু হইতে যে কোন কৌণিক বিন্দু পর্য্যন্ত দূরত্ব হয় ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ। ঐ কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) বলে এবং S অক্ষর দ্বারা উহাকে সূচিত করা হয়। আর ঐ ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (circum-radius) বলে এবং উহাকে R দ্বারা সূচিত করা হয়। কোন ত্রিভুজের একটিমাত্র পরিবৃত্ত হয়।

ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ নির্ণয়।

(i) ABC ত্রিভুজের BC ও AB বাহু দুইটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যেন S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। S হইল ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। SB ও SC যোগ কর। উহারাই পরিব্যাসার্ধ R হইল।

∵ △BSD ও △CSD সর্বসম,

∴ ∠BSD = ∠CSD = A.

চিত্র 10

[∴ কোন চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।]

এক্ষণে BSD ত্রিভুজের $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$, $\angle BSD = A$ এবং $\angle BDS =$ এক সমকোণ।

$$\therefore \sin A = \sin BSD = \frac{BD}{BS} = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R}, \quad \therefore R = \frac{a}{2 \sin A}.$$

অনুরূপে, $R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$

অতএব, $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$ ......(i)

(ii) আবার, ∵ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$,

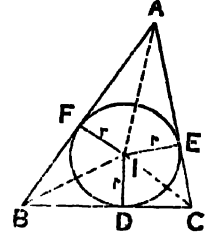
$$\therefore R = \frac{abc}{4\Delta} \text{.........(2).}$$

103. ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (In-cirle)। যে বৃত্ত ত্রিভুজের ভিতরে উহার বাহু তিনটিকে স্পর্শ করে তাহাকে উহার অন্তর্বৃত্ত বা অন্তর্লিখিত বৃত্ত (In-circle বা Inscribed circle) বলে। ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির ছেদবিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। উহাকে অন্তঃকেন্দ্র (In-centre) বলে এবং উহা I অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। আর ঐ কেন্দ্র হইতে যে কোন বাহুর উপর লম্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius) হয় এবং উহাকে r দ্বারা সূচিত করা হয়।

ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius) নির্ণয়।

(i) মনে কর ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিল। I হইতে বাহু তিনটির উপর ID, IE, ও IF লম্ব টানা হইল। ঐ লম্ব তিনটি সমান হইবে। I-কে কেন্দ্র করিয়া ID ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অতএব DEF বৃত্ত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত এবং ID (বা r) উহার ব্যাসার্ধ হইল, সুতরাং ID = IE = IF = r.

চিত্র 11

IA যোগ কর।

এক্ষণে $\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle IAB + \triangle IAC$

$$= \tfrac{1}{2}BC.ID + \tfrac{1}{2}AB\ IF + \tfrac{1}{2}AC.IE$$

$$= \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}cr + \tfrac{1}{2}br = \tfrac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= rs \quad [\ s = \text{ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা}\ ]$$

$$\therefore\ r = \frac{\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}}{s} = \frac{\Delta}{s} \ldots\ldots(1)$$

(ii) আবার, $\triangle IBD$ হইতে $BD = r\cot\frac{B}{2}$

এবং $\triangle ICD$ হইতে $CD = r\cot\frac{C}{2}$.

$$\therefore\ a = BC = BD + CD = r\cot\frac{B}{2} + r\cot\frac{C}{2}$$

$$= r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = r\left(\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B} + \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}\right)$$

$$= r\left(\frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C + \sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}\right)$$

$$= r \times \frac{\sin(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} = r\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$[\because \sin(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C) = \sin(90^\circ - \tfrac{1}{2}A) = \cos\tfrac{1}{2}A]$$

$$\therefore\ r = \frac{a.\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

একণে $\because a=2R \sin A=2R.\ 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$

$=4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A,$

$\therefore r=4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$ [a এর মান বসাইয়া]···(2)

(iii) আবার, $\because$ $AF=AE$

$BD=BF$

$CD=CE$

$\therefore$ $AF+BD+CD=$ অর্ধপরিসীমা $=s$

$\therefore$ $AF+BC=s$, বা $AF+a=s$,

$\therefore$ $AF=s-a$, অনুরূপে $BF=s-b$ এবং $CE=s-c$

একণে, $\triangle AIF$ হইতে, $IF=AF\tan IAF=AF\tan\frac{1}{2}A$,

বা, $r=(s-a)\tan\frac{1}{2}A$

অনুরূপে, $r=(s-b)\tan\frac{1}{2}B$ ······(3)

এবং $r=(s-c)\tan\frac{1}{2}C$

104. অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির দূরত্ব। ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুগুলি পর্যন্ত দূরত্ব তিনটি হইল IA, IB ও IC.

$\triangle AIF$ হইতে, $IA=IF\ \text{cosec}\ IAF$

$\therefore$ $IA=r\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}A.$

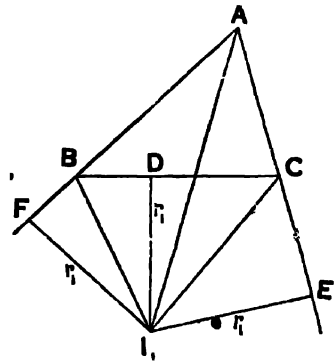
অনুরূপে, $IB=r\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}B$ এবং $IC=r\ \text{cosec}\ \frac{1}{2}C.$

105. বহির্বৃত্ত (ex-circle)। যে বৃত্ত ত্রিভুজের কোন একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত বা বহির্লিখিত বৃত্ত (ex-circle বা escribed circle) বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত হয়। যে বৃত্ত ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে এবং AB ও AC বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে তাহাকে A কোণের বিপরীত (অথবা A কোণ সাপেক্ষ) বহির্বৃত্ত বলে। ঐরূপ B ও C কোণ দুইটির বিপরীত আরও দুইটি বহির্বৃত্ত হইতে পারে।

ত্রিভুজের কোন একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও অপর যে কোন কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই (অথবা যে কোন দুই কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই) বহির্বৃত্তের কেন্দ্র (ex-centre) হয়। আর ঐ বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর লম্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ **বহির্ব্যাসার্ধ** (**ex-radius**) হইয়া থাকে। A, B ও C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তগুলির কেন্দ্রগুলিকে যথাক্রমে I_1, I_2, I_3 এবং ব্যাসার্ধগুলিকে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধগুলি নির্ণয়।

[To find the ex-radii of a triangle]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A কোণের দ্বিখণ্ডক এবং B কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক I_1 বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল (C কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকও ঐ বিন্দুতে মিলিত হইবে)। I_1 বিন্দু ত্রিভুজটির একটি বহির্বৃত্তের কেন্দ্র। I_1 বিন্দু হইতে BC এর উপর I_1D লম্ব এবং AB ও AC এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে I_1F ও I_1E লম্ব টানা হইল। জ্যামিতি হইতে পাই এই লম্বগুলি সমান ও বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ। অতএব, $I_1D = I_1E = I_1F = r_1$. I_1 কে কেন্দ্র করিয়া I_1D (অর্থাৎ r_1) ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত BC কে এবং বর্ধিত AC ও AB কে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

চিত্র 12

অনুরূপে মনে কর r_2 ও r_3 যথাক্রমে B কোণের ও C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ।

(*i*) CI_1 যোগ করা হইল।

এক্ষণে, $\triangle ABC = \triangle ABI_1 + \triangle ACI_1 - \triangle BCI_1$

$$= \tfrac{1}{2}AB.FI_1 + \tfrac{1}{2}AC\,EI_1 - \tfrac{1}{2}BC\,DI_1$$

$$=\tfrac{1}{2}cr_1+\tfrac{1}{2}br_1-\tfrac{1}{2}ar_1$$
$$=\tfrac{1}{2}r_1(b+c-a)=\tfrac{1}{2}r_1(b+c+a-2a)$$
$$=\tfrac{1}{2}r_1(2s-2a)=r_1(s-a),$$

$\therefore$ Δ (অর্থাৎ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল) $=r_1(s-a)$,

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad r_1&=\frac{\Delta}{s-a}\\ \text{অনুরূপে,}\quad r_2&=\frac{\Delta}{s-b}\\ \text{এবং}\quad r_3&=\frac{\Delta}{s-c}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

(ii) আবার, $\angle DBI_1=\tfrac{1}{2}\angle FBD=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=90^\circ-\tfrac{1}{2}B.$

এখন ΔBDI_1 হইতে পাই

$$BD=I_1D.\frac{BD}{I_1D}=r_1\cot DBI_1=r_1\cot(90^\circ-\tfrac{1}{2}B).$$

অনুরূপে ΔCDI_1 হইতে পাই $CD=r_1\cot CDI_1=r_1\cot(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)$

$$\therefore\quad a=BC=BD+CD=r_1\cot(90^\circ-\tfrac{1}{2}B)+r_1\cot(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)$$
$$=r_1\tan\tfrac{1}{2}B+r_1\tan\tfrac{1}{2}C=r_1(\tan\tfrac{1}{2}B+\tan\tfrac{1}{2}C)$$
$$=r_1\left(\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}+\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}\right)$$
$$=r_1\left(\frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\right)$$
$$=r_1\frac{\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}=r_1\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$$
$$[\because\ \sin(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=\sin(90^\circ-\tfrac{1}{2}A)=\cos\tfrac{1}{2}A]$$

$$\therefore\quad r_1=\frac{a.\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A},$$

কিন্তু $a=2R.\sin A=2R.\,2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$

$$=4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$$

$\therefore\ r_1 = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$ [a এর মান বসাইয়া]
অনুরূপে, $r_2 = 4R \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}C$ ......(2)
এবং $r_3 = 4R \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B$

(iii) আবার, $AE = AC + CE = AC + CD = b + CD$
এবং $AF = AB + FD = AB + BD = c + BD$
কিন্তু $AE = AF$ ($\because$ $\triangle AFI_1$ ও $\triangle AEI_1$ সর্বসম)
$\therefore\ 2AE = AE + AF = b + CD + c + BD = b + c + (BD + CD)$
$= b + c + a = 2s$ [$\because$ $2s$ = পরিসীমা]
$\therefore\ AE = s.$

অতএব, $\triangle AEI_1$ হইতে পাই $EI_1 = AE \tan AEI_1$,
$\therefore\ r_1 = s \tan \frac{1}{2}A$
অনুরূপে, $r_2 = s \tan \frac{1}{2}B$ ......(3)
এবং $r_3 = s \tan \frac{1}{2}C$

106. বহির্বৃত্তের কেন্দ্রগুলি হইতে কৌণিক বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয়।

$\triangle AFI_1$ হইতে পাই $I_1A = I_1F . \operatorname{cosec} I_1AF$
$\therefore\ AI_1 = r_1 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A.$
$\triangle I_1BD$ হইতে পাই $I_1B = r_1 \operatorname{cosec} I_1BD = r_1 \operatorname{cosec} (90° - \frac{1}{2}B)$
$\therefore\ BI_1 = r_1 \sec \frac{1}{2}B$, অনুরূপে $CI_1 = r_1 \sec \frac{1}{2}C$,
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,
$I_2B = r_2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}B,\ I_2A = r_2 \sec \frac{1}{2}A,\ I_1C = r_2 \sec \frac{1}{2}C$
এবং $I_3C = r_3 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}C,\ I_3A = r_3 \sec \frac{1}{2}A,\ I_3B = r_3 \sec \frac{1}{2}B.$
আবার দেখ, $AI_1 = r_1 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$,
কিন্তু $r_1 = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$
$\therefore\ AI_1 = 4R \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$
$BI_1 = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}C.$
$CI_1 = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B.$
অনুরূপ প্রণালীতে I_2A, I_2B প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণমালা 12

উদা. 1. The sides of a triangle are 13, 14 and 15 ft, find R.

$$R=\frac{abc}{4\Delta}.$$

এখানে, $s=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$ ফুট

$\therefore\quad \Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$=\sqrt{21\times8\times7\times6}=84$ ব. ফু.

$\therefore\quad R=\dfrac{13\times14\times15 \text{ ঘ. ফু.}}{4\times84 \text{ ব. ফু.}}=\dfrac{65}{8}$ ফু. $=8\frac{1}{8}$ ফুট।

উদা. 2. Show that $2R^2\sin A\sin B\sin C=\Delta$.

$\because\quad \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R,$

$\therefore\quad 2R\sin A=a,\ 2R\sin B=b$

$\therefore\quad 2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}\times2R\sin A\times2R\sin B\sin C$

$=\frac{1}{2}a.\ b.\ \sin C=\frac{1}{2}a.\ b.\ \dfrac{c}{2R}\quad\left[\because\ \sin C=\dfrac{c}{2R}\right]$

$$=\frac{abc}{4R}=\Delta.$$

উদা. 3. Show that in $\triangle ABC$, $4Rrs=abc$.

$\because\quad R=\dfrac{abc}{4\Delta}$, এবং $r=\dfrac{\Delta}{s}$,

$\therefore\quad 4Rrs=4\times\dfrac{abc}{4\Delta}\times\dfrac{\Delta}{s}\times s=abc.$

উদা. 4. In a triangle prove that $r\,r_1\,r_2\,r_3=\Delta^2$.

$\because$ কোন ত্রিভুজে $r=\dfrac{\Delta}{s}$, $r_1=\dfrac{\Delta}{s-a}$, $r_2=\dfrac{\Delta}{s-b}$ এবং $r_3=\dfrac{\Delta}{s-c}$,

$\therefore\quad r\,r_1\,r_2\,r_3=\dfrac{\Delta}{s}\times\dfrac{\Delta}{s-a}\times\dfrac{\Delta}{s-b}\times\dfrac{\Delta}{s-c}$

$$=\frac{\Delta^2\times\Delta^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{\Delta^2\times\Delta^2}{\Delta^2}=\Delta^2.$$

উদা. 5. If I be the in-centre of the $\triangle ABC$, prove that
$IA.IB\ IC = abc \tan\frac{A}{2} \tan\frac{B}{2} \tan\frac{C}{2}$.

$\because \quad IA = r \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad IB = \dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}, \quad IC = \dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

$\therefore \quad IA.\ IB.\ IC. = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}.\dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}.\dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}}$

এক্ষণে, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

এবং $r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2}$

$$\therefore \quad IA.\ IB.\ IC. = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}}$$

$$= abc\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

উদা. 6. Prove that $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

$\because \quad A + B + C = 180°$,

$\therefore \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ......(1)

আবার, $\because\ r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\therefore \quad \frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ .... (2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে পাই

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

উদা. 7. Prove that $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$ [C. U. ; B. H. U.]

$\because \quad r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a}, \quad r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b}, \quad r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c}$,

$$\therefore \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}=\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}$$

$$=\frac{3s-2s}{\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}\left[\because r=\frac{\Delta}{s}\right]$$

উদা. 8. Prove that $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$.

$$\text{বামপক্ষ}=\left(\frac{\Delta}{s-a}-\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta}{s-b}-\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta}{s-c}-\frac{\Delta}{s}\right)$$

$$=\Delta^3\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right)$$

$$=\Delta^3\times\frac{a}{s(s-a)}\times\frac{b}{s(s-b)}\times\frac{c}{s(s-c)}$$

$$=\Delta^3\times\frac{abc}{s^2\times\Delta^2}=\Delta\times\frac{abc}{s^2}$$

$$=\Delta\times\frac{4\Delta R}{s^2}\left[\because R=\frac{abc}{4\Delta}\right]$$

$$=4R\times\frac{\Delta^2}{s^2}=4Rr^2\left[\because \quad r=\frac{\Delta}{s}\right].$$

উদা. 9. Show that $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2$

$$=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right).$$

$\because \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$ [উদা. 7 দেখ]

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2=\left(\frac{2}{r}\right)^2=\frac{4}{r^2}$$

$$=\frac{4}{r}\cdot\frac{1}{r}=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right).$$

উদা. 10. If $r_1=R$ in $\triangle ABC$, show that $\cos B+\cos C=\cos A$.

$\because \quad r_1=4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C,$

$\therefore \quad 4\sin\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=\frac{r_1}{R}=1\ [\because r_1=R]$

এক্ষণে $\cos B+\cos C-\cos A$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}-1\ [\because \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=90°]$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)-1$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\right)-1\quad\left[\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°\right]$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$$

$=1-1=0,$

$\therefore\ \cos B+\cos C=\cos A.$

উদা. 11. Prove that $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$.

প্রদত্ত বামপক্ষ $= a.\dfrac{\cos A}{\sin A}+b.\dfrac{\cos B}{\sin B}+c.\dfrac{\cos C}{\sin C}$

$$=\frac{a}{\sin A}\cdot\cos A+\frac{b}{\sin B}\cdot\cos B+\frac{c}{\sin C}\cdot\cos C$$

$=2R\cos A+2R\cos B+2R\cos C$

$$\left[\because\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right]$$

$=2R(\cos A+\cos B+\cos C)=2R\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$ [উদা. 6 দেখ]

$=2(R+r).$

উদা. 12. If $\left(1-\dfrac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\dfrac{r_1}{r_3}\right)=2$, show that the triangle is right-angled.

$\because\ r_1=\dfrac{\Delta}{s-a},\quad r_2=\dfrac{\Delta}{s-b}$ এবং $r_3=\dfrac{\Delta}{s-c}$,

$\therefore\ \dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{\Delta}{s-a}\div\dfrac{\Delta}{s-b}=\dfrac{s-b}{s-a}$, এবং $\dfrac{r_1}{r_3}=\dfrac{s-c}{s-a}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই,

$$\left(1-\frac{s-b}{s-a}\right)\left(1-\frac{s-c}{s-a}\right)=2,$$

বা, $\frac{b-a}{s-a} \times \frac{c-a}{s-a} = 2$, বা, $(b-a)(c-a) = 2(s-a)^2$

বা, $(b-a)(c-a) = 2(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a)^2$ [$\because s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$]

বা, $(b-a)(c-a) = \frac{1}{2}(b+c-a)^2$

বা, $2bc - 2ac - 2ab + 2a^2 = b^2 + c^2 + a^2 + 2bc - 2ab - 2ac$,

বা, $a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore$ A কোণটি সমকোণ।

অতএব, ত্রিভুজটি সমকোণী।

উদা. 13. The perpendiculars from the angles of a triangle on the opposite sides meet at O and OA $= x$, OB $= y$, OC $= z$. Show that $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}$. [A. U. '40]

মনে কর, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র S (চিত্র আঁকিয়া লও), এবং SP⊥BC. SB ও SC যোগ কর।

এক্ষণে $\angle$BSC $= 2\angle$A, সুতরাং $\angle$BSP $= \angle$A,

$\because$ পরিকেন্দ্র হইতে কোন বাহুর দূরত্ব লম্ব বিন্দু হইতে বিপরীত কৌণিক বিন্দুর দূরত্বের অর্ধেক, $\therefore$ SP $= \frac{1}{2}$AO $= \frac{1}{2}x$.

আবার, SP $=$ BP cot BSP $= \frac{1}{2}a$ cot A,

অর্থাৎ $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a \cot A$, বা, $x = a \cot A$,

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{1}{\cot A} = \tan A.$$

অনুরূপে, $\frac{b}{y} = \tan B$ এবং $\frac{c}{z} = \tan C$

$$\therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \tan A + \tan B + \tan C$$

এখন, $\because$ A + B + C $= 180°$

$$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C = \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z}$$

$$\therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}.$$

Exercise 12

1. In a triangle ABC if $a=13$, $b=14$, and $c=15$, find r and r_1.

2. Express the circum-radius of a triangle in a form not involving the angles.

In a $\triangle$ABC, *prove the following* :—

3. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}$.

4. $\frac{rr_1}{r_2r_3}=\tan^2\frac{A}{2}$. [A. U. '47]

5. $r_1+r_2=c\cot\frac{1}{2}C$. [A. U. '46]

6. $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{s}{R}$.

7. $\Delta=\sqrt{r_1r_2r_3r}$.

8. $\frac{a}{\tan A}+\frac{b}{\tan B}+\frac{c}{\tan C}=2(R+r)$.

9. $\frac{1}{2}S=R^2\sin A\sin B\sin C$.

10. $\frac{b-c}{r_1}+\frac{c-a}{r_2}+\frac{a-b}{r_3}=0$.

11. $\frac{bc-r_2r_3}{r_1}=\frac{ca-r_3r_1}{r_2}=\frac{ab-r_1r_2}{r_3}$.

12. $\Delta=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

13. $r_1+r_2+r_3-r=4R$.

14. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\frac{S}{R}$.

15. $r_1r_2+rr_3=ab$.

16. $(r_2+r_3)\sqrt{\frac{rr_1}{r_2r_3}}=a$.

17. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$. [B. H. U. '56]

18. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4r^2R$. [A. U. '49]

19. $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2$.

20. $\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)=\frac{4R}{r^2s^2}=\frac{16R}{r^2(a+b+c)^2}$.

21. With the usual notation establish that

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}$. [C. U. '51, '55]

22. If $8R^2=a^2+b^2+c^2$, prove that the triangle is right-angled.

23. The sides of a triangle are as 3 : 7 : 8, find the ratio R : r.

24. If $r_1=r+r_2+r_3$, show that the triangle is right-angled.

25. The sides of a triangle are 5 ft., 8 ft., and 5 ft. Prove that two of its escribed circles are equal. [C. U. '18]

26. If $R=2r$, show that the triangle is equilateral.

27. If the lengths of the perpendiculars from the circum-centre on the sides BC, CA, AB of the $\triangle ABC$ are x, y, z respectively, prove that $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{4xyz}$.

28. If the altitudes of a triangle be h_1, h_2, h_3, prove that $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$.

29. In any triangle, prove that the area of the in-circle is to the area of the triangle as π : $\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$.

30. If IA, IB, IC are respectively equal to x, y, z, show that $\frac{abc}{xyz}=\frac{s}{r}$.

31. If P be the area of the in-circle and P_1, P_2, P_3 the areas of the escribed circles of a triangle, prove that

$$\frac{1}{\sqrt{P}}=\frac{1}{\sqrt{P_1}}+\frac{1}{\sqrt{P_2}}+\frac{1}{\sqrt{P_3}}.$$

Use of Logarithmic and Trigonometric Tables
(লগারিদম্ ও ত্রিকোণমিতিক তালিকার ব্যবহার)

107. সাধারণ লগ তালিকার ব্যবহার।

তোমরা সাধারণ লগ তালিকা ও য়্যান্টিলগ তালিকার সাহায্যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ নির্ণয়ের প্রণালী এবং কোন লগারিদম্ হইতে তাহার অনুরূপ সংখ্যাটি নির্ণয়ের প্রণালী পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ। এই পুস্তকের শেষে **Table I**এ 10 হইতে 10000 পর্যন্ত সংখ্যার অর্থাৎ দুই হইতে চারি অঙ্কযুক্ত সংখ্যার লগারিদম্ দেওয়া আছে। উহা পড়িবার নিয়মও তোমরা শিখিয়াছ।

Table II হইল য়্যান্টি-লগারিদম্ তালিকা (Anti-log table), ইহার সাহায্যে কোন সংখ্যার প্রদত্ত লগারিদম্ হইতে সেই সংখ্যাটি নির্ণয় করা যায়। এই তালিকার ব্যবহারও তোমরা জান।

Table III. [Natural sine and cosine Table]

এই তালিকায় 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 1′ (এক মিনিট) ব্যবধানে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাধারণ সাইন ও কোসাইনগুলি একই তালিকায় দেওয়া আছে। এই তালিকার চারিটি অংশ। উহাতে প্রথম অংশে সর্ববামে 0°, 1°, 2°,· · ···90° পর্যন্ত তলায় তলায় লেখা আছে এবং তৃতীয় অংশে 89°, 88°,···· 0° পর্যন্ত নীচে নীচে লেখা আছে। ইহা ব্যতীত তালিকায় আরও দুইটি অংশ আছে। দ্বিতীয় অংশে আড়াআড়িভাবে, (horizontally) মাথার উপর পর পর 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′, 60′ লেখা আছে (60 মিনিটে 1 ডিগ্রী) এবং প্রত্যেকটির অনুরূপ সাইনের মান নীচে নীচে দেওয়া আছে। সর্বশেষে ডানদিকের চতুর্থ অংশে (অন্তরের অংশে বা mean difference অংশে) আবার উপরে 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′, 9′, লেখা আছে এবং তলায় তলায় অনুরূপ মানগুলি দেওয়া আছে। সাধারণ সংখ্যার লগ তালিকা পড়িবার প্রণালীতে এই তালিকাও পাঠ করিতে হয়।

তালিকাটি এরূপভাবে প্রস্তুত করা হইয়াছে যে একই তালিকা হইতে সাইন ও কোসাইন নির্ণয় করা যাইবে। তালিকার উপরে লেখা আছে **Natural sines** এবং নীচে লেখা আছে Natural cosines. সাইন নির্ণয়ের জন্য উপরের ভাগ হইতে নিম্নভাগে বামদিক হইতে ডানদিকে এবং কোসাইন নির্ণয়ের জন্য নিম্নভাগ হইতে উপরিভাগে ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িতে হয়।

তালিকাটি এইরূপে প্রস্তুত যে, কোন কোণের সাইনের ও তাহার পূরক কোণের (complement-এর) কোসাইনের মান সমাপতিত হইয়াছে (coincide)।

স্বাভাবিক সাইন নির্ণয়। মনে কর, sin 42° 36′ নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথম অংশের স্তম্ভে উপর দিক হইতে নীচের দিকে যেখানে 42° লেখা আছে সেই সারিতে ডান দিকে মাথার 30′ এর তলায় আছে ·67559; এখানে আরও 6′ হইলে তবে 36′ হইবে। ঐ সারিতেই অন্তরের অংশে (চতুর্থ অংশে) মাথার 6′ এর তলায় আছে 129, তালিকাটি দশমিক পাঁচ অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমানে প্রস্তুত বলিয়া 129 এর অর্থ 00129 (অর্থাৎ 129এর বামে প্রয়োজনমত শূন্য বসাইয়া 5 অঙ্কবিশিষ্ট করিয়া সর্ববামে দশমিক বিন্দু বসিবে)।

অতএব, sin 42° 36′ = ·67559 + ·00129 = ·67688.

যদি প্রদত্ত কোণে সেকেণ্ড পর্যন্ত দেওয়া থাকে তবে তাহার সাইন নির্ণয়ের প্রণালী পরে আলোচনা করা হইবে।

কোসাইন নির্ণয়। পূর্বেই বলা হইয়াছে যে table III হইতে কোসাইন নির্ণয়ের জন্য নীচের দিক হইতে উপরের দিকে উঠিয়া তৃতীয় স্তম্ভে প্রদত্ত কোণের নিকট প্রথমে আসিতে হইবে এবং উহার সারিতে ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িয়া যাইতে হইবে। তালিকার সর্বনিম্নে দ্বিতীয় অংশে দেখ ডানদিক হইতে বামদিকে 0′, 10′, 20′,·· 60′ পর্যন্ত লেখা আছে। আর চতুর্থ অংশের (অন্তরের অংশের) তলায় 1′, 2′, 3′,···9′ ক্রমশঃ বামদিক হইতে ডানদিকে লেখা আছে।

মনে কর, cosine 46° 43′ নির্ণয় করিতে হইবে। তৃতীয় অংশে যেখানে 46° আছে, সেইখানে প্রথমে আসিয়া ঐ সারিতে **নীচের 40′** স্তম্ভের উপর দিকে লেখা আছে ·68624 (কোসাইনের জন্য তলার দিক হইতে উপরের দিকে উঠিতে হয়)। আরও 3′ প্রয়োজন। ঐ সারিতে ডানদিকে অন্তরের স্তম্ভে 3′ এর উপরে লেখা আছে 63 অর্থাৎ ·00063 (মোট 5 অঙ্কের করা হইল)।

∴ cosine 46°43′ = ·68624 − ·00063 = ·68561.

বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ—ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ বৃদ্ধি পাইলে উহার সাইনের মানও ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, সুতরাং **সাইন নির্ণয়ে বর্ধিত মিনিটের জন্য অন্তরের অংশটি যোগ করিতে হইবে।** আর ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ ক্রমশঃ বাড়িলে উহার কোসাইনের মান ক্রমশঃ কমিতে থাকে, সুতরাং **কোসাইন নির্ণয়ে** বর্ধিত মিনিটের জন্য **অন্তরের অংশ** (mean difference) **বিয়োগ করিতে হয়।**

Table IV [Natural Tangent and cotangent Table] তৃতীয় তালিকার ন্যায় এই তালিকায় 1′ এর ব্যবধানে (অর্থাৎ ক্রমশঃ 1′ বাড়িয়া) 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণের tangents ও cotangents দেওয়া আছে। এই তালিকাও সাইন-কোসাইন তালিকার ন্যায় প্রস্তুত করা হইয়াছে। Tangent নির্ণয়ের জন্য স্তম্ভের ক্রমশঃ উপরিভাগ হইতে নিম্নভাগে এবং সারির বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হয়। আর cotangent নির্ণয়ের জন্য নিম্নভাগ হইতে উপরিভাগে এবং সারির ডানদিক হইতে ক্রমশঃ বামদিকে পড়িতে হয়।

সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ ক্রমশঃ বাড়িলে তাহার tangent এর মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, কিন্তু তাহার cotangent এর মান ক্রমশঃ কমিতে থাকে। অতএব, tangent নির্ণয়ের সময় অতিরিক্ত মিনিটের জন্য **অন্তরের অংশ** (mean difference) **যোগ হয়**; cotangent নির্ণয়ের সময় **উহা বিয়োগ করিতে হয়।**

উদাহরণ। $\tan 30°23' = \cdot58513 + \cdot00118 = \cdot58631$

$\cot 45°32' = \cdot98270 - \cdot00114 = \cdot98156.$

Table V [Logarithmic sine and cosine Table]

তোমরা জান যে, যে কোন কোণের সাইন বা কোসাইনের সাংখ্যমান 1 (unity) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। আর, 0° হইতে 45° এর মধ্যবর্তী কোণগুলির tangent এর এবং 45° ও 90° এর মধ্যবর্তী কোণগুলির cotangent এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব, ঐগুলির লগারিদম্ (log) ঋণাত্মক হইবে। মাথার উপরে bar চিহ্ন ($\bar{2}$, $\bar{3}$ প্রভৃতি) দিয়া লেখা অসুবিধা বলিয়া উহা এড়াইবার জন্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের log এর সহিত সতত 10 যোগ করিয়া তালিকা প্রস্তুত করা হয়। ইহাকে লগারিদমিক কোণানুপাত বলে এবং ঐগুলি $L \sin\theta$, $L \cos\theta$, $L \tan\theta$ প্রভৃতি লেখা হয়। অতএব, $L \sin\theta = 10 + \log \sin\theta$, $L \cos\theta = 10 + \log\cos\theta$, ইত্যাদি।

এই তালিকায় 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির $L \sin\theta$ ও ও $L \cos\theta$ এর মান দেওয়া আছে।

Natural sine ও cosine নির্ণয়ের জন্য তালিকা যে প্রণালীতে পড়িতে হয় এই তালিকাও সেইভাবে পড়িয়া $L \sin\theta$ ও $L \cos\theta$ এর মান নির্ণয় করিতে হয়।

মনে কর, $L \sin 36°23'$ নির্ণয় করিতে হইবে। এই তালিকার প্রথম স্তম্ভের 36°এর সারিতে ডানদিকে মাথার 20′ এর তলায় লেখা আছে ·77268 অর্থাৎ 9·77268, সুতরাং $L \sin 36°20' = 9\cdot77268$. এক্ষণে ঐ সারিতেই ডানদিকে অন্তরের অংশে 3′ এর নীচে লেখা আছে 51, সুতরাং নির্ণেয় $L \sin 36°23' = 9\cdot77268 + \cdot00051 = 9\cdot77319$.

আবার, (তালিকার নীচের দিক হইতে উপরের দিকে এবং দ্বিতীয় অংশের সারির ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িয়া) $L \cos 45°32' = 9\cdot84566 - \cdot00026 = 9\cdot84540$.

Table VI [Logarithmic Tangent and cotangent Table]

Table V এর অনুরূপভাবে এই তালিকাটিও প্রস্তুত করা হইয়াছে এবং ইহার পাঠের প্রণালীও অনুরূপ। এই তালিকায় 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির $L \tan \theta$ ও $L \cot \theta$ দেওয়া আছে।

$L \tan \theta$ নির্ণয়ের সময় mean difference যোগ করিতে হয় এবং $L \cot \theta$ নির্ণয়ের সময় উহা বিয়োগ করিতে হয়।

$L \tan 52°36' = 10{\cdot}11502 + {\cdot}00157 = 10{\cdot}11659,$

$L \cot 65°45' = 9{\cdot}65535 - {\cdot}00168 = 9{\cdot}65367.$

108. Principle of Proportional Parts

[সমানুপাতী অংশের তথ্য]

তোমরা জান যে, কোন চল রাশির মানের পরিবর্তন যদি সামান্য হয়, তবে সেই চলরাশির অপেক্ষকের [function, যথা $f(x)$ প্রভৃতি] মানের পরিবর্তন ঐ চলরাশির মানের পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হইয়া থাকে।

সমানুপাতী অংশের তথ্য :—

(i) কোন সংখ্যার লগারিদমের মানের পরিবর্তন ঐ সংখ্যার ক্ষুদ্র পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হয়।

(ii) ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মানের পরিবর্তন কোণের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের প্রায় সমানুপাতী হয়।

এই তথ্যটির প্রমাণ পাঠ্য বহির্ভূত, কিন্তু ইহার প্রয়োগ শিখিতে হইবে নিম্নের উদাহরণগুলিতে সেই প্রয়োগবিধি শিখান হইতেছে

উদাহরণমালা 13

উদা. 1. Given $\log 74583 = 4{\cdot}8726398$ and $\log 74584 = 4{\cdot}8726457$, find (i) $\log 74{\cdot}5836$ and (ii) the number whose logarithm is $\bar{2}{\cdot}8726412$.

(i) এখানে দেখা যায় যে, $\log 74583{\cdot}6$ এর অংশক $\log 74583$ ও $\log 74584$ এর মধ্যবর্তী হইবে এবং $74583{\cdot}6$ সংখ্যাটি 74583 অপেক্ষা ${\cdot}6$ বেশী।

এক্ষণে, $\log 74584 = 4{\cdot}8726457$
এবং $\log 74583 = 4{\cdot}8726398$

$\therefore$ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= {\cdot}0000059$,

$\therefore$ ${\cdot}6$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= {\cdot}0000059 \times {\cdot}6 = {\cdot}00000354 = {\cdot}0000035$

[সমানুপাতী অংশের তথ্য অনুসারে দশমিক 7 অঙ্ক পর্যন্ত]

$\therefore$ $\log 74583{\cdot}6 = 4{\cdot}8726398 + {\cdot}0000035 = 4{\cdot}8726433$.

$\therefore$ নির্ণেয় $\log 74{\cdot}5836 = 1{\cdot}8726433$.

(ii) $4{\cdot}8726412$ সংখ্যাটি $4{\cdot}8726398$ ও $4{\cdot}8726457$ এর মধ্যবর্তী এবং প্রথমটি হইতে উহার অন্তর ${\cdot}0000014$.

অতএব, $4{\cdot}8726412$ যে সংখ্যার লগারিদম্ তাহা অবশ্যই 74583 ও 74584 এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে কর, উহা $74583 + x$ এর লগারিদম্।

এক্ষণে, 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর ${\cdot}0000059$ (সংক্ষেপে 1 এর জন্য অন্তর 59) এবং x এর জন্য অন্তর হইয়াছে ${\cdot}0000014$ (সংক্ষেপে 14),

সুতরাং Principle of proportional parts হইতে পাই

$$59 : 14 :: 1 : x,$$

বা, $x = \frac{14}{59} = {\cdot}23\cdots$

$\therefore$ $\log 74583{\cdot}23\cdots = 4{\cdot}8726412$.

এক্ষণে, নির্ণেয় সংখ্যাটির প্রদত্ত লগারিদম্ $\bar{2}{\cdot}8726412$ এর অংশক এবং উপরে লব্ধ ভাগের অংশক একই, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটি $74583{\cdot}23$ এর অঙ্ক কয়টি লইয়াই একই ক্রমে গঠিত সংখ্যা হইবে। অতএব, উহার পূর্ণক $\bar{2}$ অর্থাৎ -2 বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যাটি $= {\cdot}07458323\cdots$.

উদা. 2. Given $\sin 36°41' = 0{\cdot}59739$ and $\sin 36°42' = 0{\cdot}59763$, find $\sin 36°41'33''$.

$\sin 36°42' = {\cdot}59763$
$\sin 36°41' = {\cdot}59739$

$\therefore$ $1'$ এর জন্য অন্তর $= 24$ (সংক্ষেপে)

$\because$ $1' = 60''$, $\therefore$ $60''$ এর জন্য অন্তর $= 24$

$\therefore$ $33''$ এর জন্য অন্তর $= \frac{24 \times 32}{60} = 12{\cdot}8$ (অর্থাৎ $\cdot 000128$)

$\therefore$ $\sin 36°41'33'' = {\cdot}59739 + {\cdot}000128 = {\cdot}597518$.

উদা. 3. Given $\cos 46°24' = 0{\cdot}68962$ and difference for $1' = 21$, find $\cos 46°24'40''$.

এখানে $46°24'40''$ ও $46°24'$ এর অন্তর $40''$

এবং $1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর 21 (অর্থাৎ $\cdot 00021$)।

$\therefore$ $40''$ এর জন্য অন্তর $= \frac{21 \times 40}{60} = 14$ (অর্থাৎ $\cdot 00014$)

$\because$ কোণ পরিমাণ বাড়িলে cosine কমে,

$\therefore$ $\cos 46°24'40'' = {\cdot}68962 - {\cdot}00014 = {\cdot}68948$.

উদা. 4. Given $L \sin 44°17' = 9{\cdot}8439842$ and $L \sin 44°18' = 9{\cdot}8441137$, find $L \sin 44°17'33''$ and deduce the value of L cosec $44°17'33''$.

(i) $L \sin 40°18' = 9{\cdot}8441137$

$L \sin 40°17' = 9{\cdot}8439842$

$\therefore$ $1'$ জন্য অন্তর $= 1295$ (অর্থাৎ $\cdot 0001295$)

অর্থাৎ $60''$ জন্য অন্তর $= 1295$

$\therefore$ $33''$ জন্য অন্তর $= \frac{1295 \times 33}{60} = 712{\cdot}25$ অর্থাৎ $= {\cdot}000071225$

$\therefore$ $L \sin 40°17'33'' = 9{\cdot}8439842 + {\cdot}0000712$

$= 9{\cdot}8440554$.

(ii) মনে কর, $44°17'33'' = \theta$

এখানে $\log \sin \theta = L \sin \theta - 10$.

এখানে $\log \operatorname{cosec} \theta = \log \frac{1}{\sin \theta} = -\log \sin \theta$ [$\because$ $\log 1 = 0$]

$= -(L \sin \theta - 10) = 10 - L \sin \theta$

$= 10 - 9{\cdot}8440554 = {\cdot}1559446$

L cosec $44°17'33'' = \log \operatorname{cosec} \theta + 10 = 10{\cdot}1559446$.

উদা. 5. Given cosec $13°8' = 4.4010616$ and cosec $13°9'$ $= 4.3955817$, find the value of cosec $13°8'19''$.

এখানে কোণের পরিমাণ $1'$ বা $60''$ বেশী হওয়ার জন্য cosec এর মান $(4.4010616 - 4.3955817)$ বা $.0054799$ কমিয়াছে।

$\therefore$ কোণের $19''$ বৃদ্ধির জন্য cosec এর মান কমিবে

$\frac{19}{60} \times .0054799$ বা $.0017353$.

$\therefore$ cosec $13°8'19'' = 4.4010616 - .0017353 = 4.3993263$.

উদা. 6. Given L cot $62°26' = 9.5257779$ and L cot $62°27'$ $= 9.5253589$, find the value of L cot $62°26'47''$ and solve the equation $L \cot \theta = 9.5254782$.

(i) L cot $62°26' = 9.5257779$

L cot $62°27' = 9.5253589$

$\therefore$ কোণের $1'$ বা $60''$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= .0004190$

অর্থাৎ কোণের $60'$ বৃদ্ধির জন্য লগের মান $.0004190$ কমিয়াছে,

$\therefore$ $47''$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= \dfrac{47 \times .0004190}{60} = .0003282$

$\therefore$ L cot $62°26'47'' = 9.5257779 - .0003282 = 9.5254497$.

(ii) এক্ষণে, $L \cot \theta = 9.5254782$ এই সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে

এখানে L cot $62°26' = 9.5257779$

এবং $L \cot \theta \quad = 9.5254782$

$\therefore$ অন্তর $= 2997$ (সংক্ষেপে)

কিন্তু প্রদত্ত সর্ত হইতে $1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর $= 4190$ (সংক্ষেপে),

$\therefore$ লগ 4190 কমে কোণের $60''$ বৃদ্ধির জন্য

$\therefore$ লগ 2997 „ „ $\frac{60'' \times 2997}{4190}$ বৃদ্ধির জন্য বা $42.9''$ বৃদ্ধির জন্য

$\therefore$ $\theta = 62°26'43''$.

উদা. 7. Find by interpolation the angle whose L tan is 9·732235.

Logarithmic tangent এর তালিকা (table VI) হইতে পাই $L \tan 28°20' = 9·73175$ এবং 1′ এর জন্য অন্তর = ·00030,

∴ $L \tan 28°21' = 9·73205$, এবং $L \tan 28°22' = 9·73235$.

∵ প্রদত্ত L tan এর মান 9·73205, ও 9·73235 এর মধ্যবর্তী,

∴ নির্ণেয় কোণটি 28°21′ ও 28°22′ এর মধ্যবর্তী হইবে।

$9·732235 - 9·73205 = ·000185$

∵ ·00030 অন্তর হয় কোণের 1′ বা 60″ বৃদ্ধির জন্য।

∴ ·000185 „ „ „ $\dfrac{60'' \times ·000185}{·00030}$ বা 37″ বৃদ্ধির জন্য।

∴ নির্ণেয় কোণ = 28°21′37″.

উদা. 8. Find from the tables the value of

$$\frac{\tan 82°6' \times \sin 34°17'}{\sec 12°37'}.$$

মনে কর, প্রদত্ত রাশি = x,

সুতরাং $x = \tan 82°6' \times \sin 34°17' \times \cos 12°37'$

∴ $\log x = \log \tan 82°6' + \log \sin 34°17' + \log \cos 12°37'$

এক্ষণে তালিকা হইতে পাই

$\log \tan 82°6' = L \tan 82°6' - 10 = ·85806$

$\log \sin 34°17' = L \sin 34°17' - 10 = \bar{1}·75072$

$\log \cos 12°37' = L \cos 12°37' - 10 = \bar{1}·98938$

∴ (যোগ করিয়া) $\log x = ·59816$

∵ Antilog ·59816 = 3·9642, ∴ $x = 3·9642$

∴ নির্ণেয় মান = 3·9642.

উদা. 9. Solve $\sin x = ·7$, given $\log 7 = ·84510$,

$L \sin 44°25' = 9·84501$ and diff. for $1' = 13$.

$\because \sin x = \cdot 7$

$\because \log \sin x = \log \cdot 7 = \bar{1}\cdot 84510$

$\therefore L \sin x = 9\cdot 84510$

এবং $L \sin 44°25' = 9\cdot 84501$

$\therefore$ diff. = 9

এক্ষণে, $13 = 1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর

$\therefore 9 = \frac{60''}{13} \times 9$ বা $41\cdot 5''$ এর জন্য অন্তর

$\therefore L \sin x = L \sin 40°25'41\cdot 5''$

$\therefore x = 40°25'41\cdot 5''$.

Exercise 13

Find from the Tables the values of :—

1. sin 44° 58′
2. cos 25° 12′
3. tan 35° 42′
4. cot 38° 25′
5. sec 36° 48′
6. cosec 50° 25′

Evaluate—

7. L cos 45° 15′
8. L tan 22° 27′
9. L sin 41° 15′
10. L cot 27° 34′

11. If $L \cos \theta = 9\cdot 55533$, find θ to the nearest minute.

12. Given log $4827 = 3\cdot 68367$ and log $4828 = 3\cdot 68376$, find log $4827\cdot 5$.

13. Given log $3534 = 3\cdot 54826$ and log $3535 = 3\cdot 54838$, find the number whose logarithm is $\bar{2}\cdot 54831$.

14. Find the seventh root of $\cdot 034574$, having given log $34574 = 4\cdot 5387496$, log $61837 = 4\cdot 7912434$ and difference for $\cdot 00001 = \cdot 0000071$.

15. If log $256\cdot 12 = 2\cdot 4084435$, log $30\cdot 317 = 1\cdot 4816862$ and log $3\cdot 0318 = \cdot 4817005$. find the fifth root of $\cdot 0025612$.

16. Given log 4376 = 3·64108 and log 4377 = 3·64118, find by interpolation the logarithm of 437·66.

17. If sin 35°24′ = ·57952 and sin 35°25′ = ·57965, find by interpolation the angle whose sine is ·57960.

18. If cos 48°16′ = ·66566 and difference for 1′ = 22, find cos 48° 16′ 36″.

19. If cos 58°18′ = ·5254716 and cos 58°19′ = ·5252241, find the angle whose cosine is ·5254221.

20. Given tan 76°21′ = 4·1177784 and tan 76° 22′ = 4·1230079, find the angle whose tangent is 4·1203060.

21. Find the value of L tan 79° 41′ 24″ from the table.

22. Given L sin 37° 43′ 40″ = 9·7867152 and L sin 37°43′50″ = 9·7867424, find L sin 37° 43′ 56″. [C.U.'10]

23. Given L tan 79° 51′ 40″ = 10·7475657 and L tan 79°51′ 50″ = 10·7476872, find the angle whose L tan is 10·7476532. [C.U.'21]

24. If L sec 27°39′ = 10·0526648 and difference for 10″ = 110, find θ when L sec θ = 10·0527253.

25. Given log 2 = ·30103, log 6684 = 3·82504 and diff. for 1 = 7, find $(\cdot 04)^{\frac{1}{8}}$.

26. Given L sin 14° 6′ = 9·386704, find L cosec 14° 6′.

27. Given L sin 35°20′ = 9·7621775 and L cos 35° 20′ = 9·9115844, find L tan 35° 20′.

28. Prove that L sin θ + L cosec θ = L tan θ + L cot θ = 20, where θ is an acute angle.

Evaluate :—

29. $\sin 25^\circ 12' \times \cos 45^\circ 15'$.

30. $\dfrac{\sin 47^\circ 13'}{\tan 22^\circ 27'}$.

31. Find the value of $\dfrac{\cot 27^\circ 12' \times \sin 34^\circ 17'}{\sec 77^\circ 23'}$,
given L $\cos 55^\circ 43' = 9{\cdot}7507$, L $\tan 62^\circ 48' = 10{\cdot}2891$,
L $\cos 77^\circ 23' = 9{\cdot}3393$ and $\log 239{\cdot}4 = 2{\cdot}3791$.

32. Find θ, given $\sin \theta = {\cdot}6$, $\log 6 = {\cdot}77814$,
L $\sin 36^\circ 52' = 9{\cdot}77812$ and diff. for $1' = 17$.

33. Solve $\tan x = {\cdot}3$, given $\log 3 = {\cdot}4771213$,
L $\tan 16^\circ 41' = 9{\cdot}4770875$ and diff. for $1' = 1352$.

Solution of Triangles (ত্রিভুজের সমাধান)

109. ত্রিভুজের তিনটি ভুজ (বাহু) ও তিনটি কোণ এই ছয়টি অংশ। ত্রিভুজের এই অংশগুলিকে সম্পূর্ণরূপে জানাকেই ত্রিভুজের সমাধান বলে। এই অংশ ছয়টি স্বাধীন নহে, উহাদের পরস্পরের মধ্যে সম্বন্ধ আছে।

আমরা জ্যামিতিতে দেখিয়াছি যে, সাধারণতঃ ত্রিভুজের যে কোন তিনটি অংশ দেওয়া থাকিলে উহার অপর অংশ তিনটি নির্ণয় করা অর্থাৎ ত্রিভুজটির সমাধান করা যায়। এই প্রদত্ত অংশ তিনটির মধ্যে অন্ততঃ একটি বাহু থাকা চাই। কারণ, যদি ত্রিভুজের কেবল তিনটি কোণ জানা থাকে, তবে ঐ কোণগুলির সমান কোণ বিশিষ্ট অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়, সুতরাং নির্দিষ্টরূপে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব হয় না।

আমরা এই অধ্যায়ে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে ত্রিভুজের জ্ঞাত অংশত্রয় হইতে ত্রিভুজের সমাধান প্রণালী নির্ণয় করিব। নিম্নলিখিত বিভিন্ন প্রকারে ত্রিভুজের অংশ তিনটি দেওয়া থাকিতে পারে :—

Case I. তিনটি ভুজ বা বাহু

Case II. তিনটি কোণ

Case III. যেকোন দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ

Case IV. দুইটি কোণ ও একটি বাহু

Case V. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

এইগুলি সম্বন্ধে একে একে আলোচনা করা হইতেছে। প্রদত্ত অংশগুলির মান অসঙ্গত হইলে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নহে। যথা, প্রদত্ত দুইটি বাহু একত্রে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা তাহার সমান হইতে পারে না, কিংবা প্রদত্ত দুইটি কোণই স্থূলকোণ হইতে পারে না।

110. Case I. Three sides given

[তিনটি ভুজ প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের a, b, c বাহু তিনটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে অর্থাৎ উহার কোণ তিনটি নির্ণয় করিতে হইবে।

সূত্র হইতে পাই $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ইহার a, b, ও c জ্ঞাত হওয়ায় cos A এর মান জানা হইল। এক্ষণে কোসাইন-তালিকা (cosine-table) হইতে ঐ মানটি যে কোণটির cosine তাহা নির্ণয় করিলেই Aএর মান জানা যাইবে। ত্রিভুজের কোণগুলি $0°$ ও πএর মধ্যবর্তী এবং এই সীমার মধ্যে কোণের cosine-এর মান একটি মাত্র হইবে, সুতরাং ঐ কোণটি নির্দিষ্টরূপে নির্ণীত হইবে।

অনুরূপে B ও C কোণও নির্ণয় করা যাইবে। দুইটি কোণ নির্ণয় করিলেই তৃতীয় কোণটি জানা যাইবে।

নিকটতম আসন্নমান। এইরূপে তালিকা হইতে কোণের কেবল আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়, কিন্তু সঠিক মান নির্ণয় করা যায় না। উচ্চতর গণিতে প্রমাণিত হইয়াছে যে, Logarithmic Tangent Table-এর সাহায্যে প্রকৃত মানের **নিকটতম আসন্নমান** পাওয়া যায়। অতএব, এরূপ ক্ষেত্রে $\tan\frac{A}{2}$ এর সূত্র প্রয়োগ করাই সমীচীন।

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \text{এখানে } s=\tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=10+\log\left\{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=10+\tfrac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}$$

এই প্রকারে অন্য কোণ দুইটিও নির্ণয় করা যাইবে।

[দ্রষ্টব্য ঃ সাইনের সূত্র হইতেও কোণ নির্ণয় করা যায়, কিন্তু অনেকক্ষেত্রে ইহাতে অসুবিধা হইয়া থাকে। মনে কর, পাওয়া গেল $\sin A=\frac{1}{2}$, সুতরাং Aএর মান $30°$ অথবা $150°$ দুইই হইতে পারে। এরূপস্থলে কোন্ মানটি গ্রহণ করিলে অন্য প্রদত্ত সর্তগুলি অসম্ভব হইবে না তাহা দেখিতে হইবে। কিন্তু কোসাইন সূত্র বা ট্যান্‌জেণ্ট সূত্র প্রয়োগ করিলে ঐরূপ অসুবিধা হইবে না।

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

এইগুলির মধ্যে যে কোণানুপাতটি ব্যবহার করা সুবিধাজনক তাহা বাছিয়া লইতে হইবে, কিন্তু ট্যান্‌জেণ্ট সূত্র সর্বাপেক্ষা উপযোগী তাহা বলা হইয়াছে।]

111 Case II. Three angles given

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে এরূপক্ষেত্রে সঠিকভাবে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নহে। কারণ, প্রদত্ত কোণত্রয়-বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে। সেই ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ হইবে। অতএব ত্রিভুজের কেবল তিনটি কোণ জানা থাকিলে উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায় না, কিন্তু নিম্নের সূত্র হইতে ঐ বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, অথবা $a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$.

[নিম্নের উদাহরণমালায় উদা. 5 ও উদা. 6 দেখ।]

উদাহরণমালা 14

উদা. 1. The sides of a triangle are 7, 8 and 9. Determine all the angles having given log 2 = ·3010300, L tan 24°5′40″ = 9·6505069, L tan 20°5′50″ = 9·6505634, L tan 29°12′20″ = 9·7474183 and L tan 29°12′30″ = 9·7474677.

[C. U. '38 ; B. H. U. '38]

এখানে $a=7, b=8, c=9$, সুতরাং $s=\frac{1}{2}(7+8+9)=12$.

$$\therefore\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{(12-7)(12-9)}{12(12-8)}}$$

$$=\sqrt{\frac{5\times3}{12\times4}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\sqrt{\frac{10}{32}}$$

$\therefore$ $L\tan\frac{B}{2}=10+\log\left(\frac{10}{32}\right)^{\frac{1}{2}}=10+\frac{1}{2}\log 10-\frac{1}{2}\log 32$

$=10+\frac{1}{2}\log 10-\frac{1}{2}\log 2^5=10+\frac{1}{2}\log 10-\frac{5}{2}\log 2$

$=10+\frac{1}{2}\times 1-\frac{5}{2}\times {\cdot}3010300=10+{\cdot}5-{\cdot}7525750$

$=9{\cdot}7474250.$

এক্ষণে, $L\tan 29°12'30''=9{\cdot}7474677$

$L\tan 29°12'20''=9{\cdot}7474183$

$\therefore$ diff for $10''={\cdot}0000494$

মনে কর, $\frac{B}{2}=29°12'20''+x''$

$\therefore$ diff. for $x''=9{\cdot}7474250-9{\cdot}7474183={\cdot}0000067$

$\therefore$ $\frac{x''}{10''}=\frac{{\cdot}0000067}{{\cdot}0000494}=\frac{67}{494}$, $\therefore$ $x=\frac{10\times 67}{494}=1{\cdot}35''$

$\therefore$ $\frac{B}{2}=29°12'20''+1{\cdot}35''=29°12'21{\cdot}35''$

$\therefore$ $B=58°24'42{\cdot}7''$ (প্রায়) ।

আবার, $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(12-8)(12-9)}{12(12-7)}}=\sqrt{\frac{4\times 3}{12\times 5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{2}{10}}$

$\therefore$ $L\tan\frac{A}{2}=10+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 10=10+{\cdot}1505150-{\cdot}5$

$=9{\cdot}6505150.$

এক্ষণে, diff. for $10''=9{\cdot}6505634-9{\cdot}6505069={\cdot}000565,$

এবং $9{\cdot}6505150-9{\cdot}6505069={\cdot}0000081.$

মনে কর, $\frac{A}{2}=24°5'40''+x''$

$\therefore$ $565 : 81 :: 10'' : x,$

$\therefore$ $x=\frac{81\times 10''}{565}=1{\cdot}43''$ (প্রায়)

$\therefore \frac{A}{2}=24°5'40''+1{\cdot}43''=24°5'41{\cdot}43''$ (প্রায়)

$\therefore A=48°11'22{\cdot}86''$ (প্রায়)।

অতএব, $C=180°-A-B=180°-106°36'5{\cdot}56''$

$=73°23'54{\cdot}44''$ (প্রায়)।

উদা. 2. The sides of a triangle are 32, 40, 66 ; find by the help of logarithmic tables the greatest angle.
[C. U. '45]

এখানে যে বাহুর দৈর্ঘ্য 66 তাহার বিপরীত কোণটি বৃহত্তম কোণ। মনে কর, ঐ কোণটি A.

$$\cos A=\frac{32^2+40^2-66^2}{2\times 32\times 40}=-\frac{1732}{2560}=-\frac{433}{640}=-{\cdot}67656\cdots$$

লগ তালিকা হইতে পাই $\cos 47°20'={\cdot}67773$

এবং $\cos 47°30'={\cdot}67559$

$\therefore$ 10′ এর জন্য অন্তর $={\cdot}00214$

${\cdot}67773-{\cdot}67656={\cdot}00117.$

এক্ষণে, 214 অন্তর হয় 10′ এর জন্য

$\therefore$ 117 ,, ,, $\frac{1170}{214}$ বা 5′28″ এর জন্য

$\therefore \cos 47°25'28''={\cdot}67656$

$\therefore \cos(180°-47°25'28'')=-\cos 47°25'28''=-{\cdot}67656$

$\therefore A=180°-47°25'28''=132°34'32''.$

উদা. 3. The sides of a triangle are proportional to 7,12, 11 ; find the least angle, having given L tan 17°33′ = 9·500042 and difference for 1′ = 439.

[এখানে L tan দেওয়া থাকায় tangent সূত্র হইতে সমাধান করিতে হইবে]

এখানে A : B : C = 7 : 12 : 11 এবং A কোণটি ক্ষুদ্রতম। মনে কর, $a=7K$, $b=12K$, $c=11K$. $\therefore s=\frac{1}{2}(7K+12K+11K)=15K.$

$\therefore \quad \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{3K \times 4K}{15K \times 8K}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \quad L\tan\frac{A}{2} = 10 + \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log 10 = 10 + 0 - \cdot 5 = 9\cdot 5.$

অতএব, এখানে অন্তর (difference) $= 9\cdot 500042 - 9\cdot 5 = \cdot 000042$ এবং $\frac{A}{2}$ কোণ হইতে $17°33'$ ক্ষুদ্রতর।

এক্ষণে $439 = 1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর

$\therefore \quad 42 = \frac{60'' \times 42}{439}$ বা $5\cdot 7''$ এর জন্য অন্তর

$\therefore \quad \frac{A}{2} = 17°33' - 5\cdot 7'' = 17°\ 32'\ 54\cdot 3''$ (প্রায়)

$\therefore \quad A = 35°\ 5'\ 49''$ (প্রায়)।

উদা. 4. Given $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{6}$, $c = 2$, solve the triangle.

এখানে $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{4 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 6}{2 \times 2(\sqrt{3} - 1)}$

$$= \frac{4 + 4 - 2\sqrt{3} - 6}{4(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{4(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2} = \cos 120°,$$

$\therefore \quad B = 120°.$

আবার, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 6 - 4}{2(\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{6}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°,$$

$\therefore \quad C = 45°. \quad \therefore \quad A = 180° - 120° - 45° = 15°.$

উদা. 5. If two angles of a triangle be 45° and 75°, find the ratio of its sides.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $A = 45°$ ও $B = 75°$,

সুতরাং $C = 180° - 75° - 45° = 60°.$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ এবং $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\quad a : b : c = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2 : (\sqrt{3}+1) : \sqrt{6}$ [$2\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]।

উদা. 6. The angles of a triangle are as 7 : 3 : 2, prove that the ratio of the least side to the greatest side is $\sqrt{2} : (\sqrt{3}+1)$.

এখানে কোণ তিনটির সমষ্টি 1_0° এবং উহাদের অনুপাত 7 : 3 : 2.

$7+3+2=12$.

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণটি $= \frac{2}{12} \times 180° = 30°$,

এবং বৃহত্তম কোণটি $= \frac{7}{12} \times 180° = 105°$.

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= \sin 30° : \sin 105°$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} : (\sqrt{3}+1).$$

উদা. 7. The ratio of the smallest angle to the greatest angle of a triangle are as 2 : 5 and the third angle is $1\frac{1}{2}$ times the smallest angle. Compare the lengths of the sides.

মনে কর, A : B = 2 : 5

$\because$ তৃতীয় কোণ C প্রদত্ত ক্ষুদ্রতম A কোণের $1\frac{1}{2}$ গুণ,

$\therefore$ A : C = 2 : 3

$\therefore$ কোণ তিনটির অনুপাত অর্থাৎ A : B : C = 2 : 5 : 3

$\therefore$ $A = \frac{2}{2+5+3} \times 180° = 36°$. অনুরূপে, B = 90°, C = 54°.

$\therefore$ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$= \sin 36° : \sin 90° : \sin 54°$

$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} : 1 : \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ [$\because \sin 54° = \cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$]

$= \sqrt{(10-2\sqrt{5})} : 4 : (\sqrt{5}+1)$.

Exercise 14

1. If in a triangle $a=283$, $b=317$, $c=428$, find all its angles by the help of the Tables.

2. In a plane triangle $a=18$, $b=20$, $c=22$; calculate the value of $L \tan\frac{A}{2}$. Given $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$. [C. U. '15]

3. If $a=17$, $b=20$, $c=27$, find all the angles by using the tables.

4. The sides of a triangle are 9, 10 and 11, find the angle opposite to the side 10. Given $\log 2 = \cdot 30103$, $L \tan 29°30' = 9\cdot 7526420$, $L \tan 29°29' = 9\cdot 7523472$. (C.U. '43)

5. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 5, 6, 7. Given $\log 6 = \cdot 7781513$, $L \cos 39°14' = 9\cdot 8890644$ and diff. for $1' = 1032$. [C. U. ; P. U.]

6. If $a=15$, $b=19$, $c=24$, find the greatest angle of the triangle; given $\log 5\cdot 7 = 0\cdot 75587$, $L \cos 88°59' = 8\cdot 24903$, and diff. for $1' = 718$. [C. U. '36]

7. The sides of a triangle are 7, 8 and 9. Determine all the angles, given $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \tan 24°5'40'' = 9\cdot 6505069$, $L \tan 24°5'50'' = 9\cdot 6505634$, $L \tan 29°12'20'' = 9\cdot 7474183$, $L \tan 29°12'30'' = 9\cdot 7474677$. [C. U. '38]

8. The sides of a triangle are 4, 5, 6; find B having given $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \cos 27°53' = 9\cdot 9464040$, diff. for $1' = \cdot 0000669$. [C. U. '41 ; P. U. '44]

9. The sides of a triangle are proportional to 2, 3, 4. Find the greatest angle, having given $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $L \tan 52°14' = 10\cdot 1108395$, $L \tan 52°15' = 10\cdot 1111004$.

10. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 12, 15, 16. (Use log tables). [C. U. '57]

11. If the sides of a triangle are as 68 : 75 : 77, find the least angle. Given $\log 2 = \cdot 3010300$, $L \cos 26°34' = 9\cdot 9515389$ and diff. for $1' = 632$.

12. If $a=\sqrt{6}$. $b=2$ and $c=\sqrt{3}+1$, solve the triangle.

13. Solve the triangle in which $a=5\sqrt{3}$ and $b=c=5$.

14. The sides of a triangle are a, b and $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ feet; find the greatest angle.

15. If the sides of a triangle are 4, 5, 6 feet, show that the least angle is half of the greatest angle.

16. If one angle of a triangle is 45° and the ratio of the other two is 2 : 7, find the angles and the ratio of the sides.

17. In $\triangle$ABC, A$=45°$ and B$=60°$, find the ratio of the least side to the greatest.

18. The angles of a triangle are as 1 : 2 : 3; compare the magnitudes of the sides.

19. If A$=45°$, B$=60°$, show that $a+b\sqrt{2}=2c$.

20. The base angles of a triangle are 22°30′ and 112°30′, prove that the base is twice the height.

21. If cos A$=\frac{5}{13}$ and cos B$=\frac{12}{13}$, find $a:b:c$.

22. The angles of a triangle are as 3 : 4 : 5; find the ratio of the least side to the greatest side.

23. The ratio of the smallest angle to the greatest angle of a triangle is 2 : 7 and the other angle is half as much again as the smallest angle. Compare the magnitudes of the sides.

24. The angles of a triangle are 40°, 60°, 80°, and the greatest side is 22 ft.; find the least side, given that L sin 40° = 9·8080675, L sin 80° = 9·9933515, log 22 = 1·3424227, log 14359 = 4·1571242, diff. for 1 = ·0000302. [B. U. 1899]

112. Case III. Two sides and the included angle given.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু b ও c এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ A দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে, অর্থাৎ B, C ও a নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে প্রদত্ত অংশগুলি লইয়া একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়, সুতরাং নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যাইবে

I. যদি b ও c সমান হয়, তবে $B=C$ হইবে,

সুতরাং $A+B+C=180^\circ$, বা, $A+2B=180^\circ$ এই সূত্র হইতে B-এর মান ও C-এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

তিনটি কোণ ও দুইটি বাহু জানা হইলে তৃতীয় বাহুটিও নির্ণয় করা যাইবে।

II. যদি b ও c অসমান হয়, তবে মনে কর $b>c$.

$$\text{এক্ষণে, } B+C=180^\circ-A, \ \therefore \ \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{আবার, } \because \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\therefore \ L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\left(\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right)$$

$$=\log(b-c)-\log(b+c)+\log\cot\frac{A}{2}+10$$

$$=\log(b-c)-\log(b+c)+L\cot\frac{A}{2} \cdots \quad (2)$$

(2)-এর b, c ও A জানা থাকায় ডান পক্ষের মান নির্ণয় করা যাইবে, সুতরাং $L\tan\frac{B-C}{2}$ এর মান জানা যাইবে। উহা হইতে $\frac{B-C}{2}$ এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

এক্ষণে (1) ও (2) হইতে $\frac{B+C}{2}$ ও $\frac{B-C}{2}$ এর মান জানিবার পর উহা হইতে B ও C-এর মান নির্ণীত হইবে।

আবার, ত্রিভুজের কোণ তিনটি জ্ঞাত হওয়ায়

$\sin A \quad \sin B$ অথবা $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, যে কোন সূত্র হইতে a বাহুর দৈর্ঘ্য জানা যাইবে।

[দ্রষ্টব্য : $\because \frac{a}{\sin B}=\frac{b}{\sin B}$, $\therefore \ a=b\frac{\sin A}{\sin B}$,

$$\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$$
$$=\log b+(10+\log\sin A)-(10+\log\sin B)$$
$$=\log b+L\sin A-L\sin B.$$]

[অন্য প্রণালী]

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ এই সূত্র হইতে a-র মান নির্ণয় করা যাইবে। কারণ, এখানে b, c ও A জ্ঞাত রাশি। a-র মান নির্ণয়ের পর $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$, অথবা $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ সূত্র হইতে B-র মান নির্ণয় করা যায়। A ও B জ্ঞাত রাশি হওয়ায় C-র মানও জানা যাইবে।

[দ্রষ্টব্য : লগারিদমের হিসাবে এই প্রণালীর প্রয়োগ সুবিধাজনক নহে। b ও c প্রভৃতির জ্ঞাতমান ক্ষুদ্রসংখ্যা হইলে ইহার প্রয়োগ করা যায়।]

109. Case IV. Two angles and a side given.

ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং যে-কোন একটি বাহু প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজের সমাধান করা অতিশয় সহজ। উহার দুইটি কোণ প্রদত্ত হওয়ায়

$A+B+C=180°$ হইতে তৃতীয় কোণটি সহজেই জানা যাইবে।

আবার, উহার যে-কোন একটি বাহু, মনে কর a, জানা আছে। এক্ষণে, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ এই সম্বন্ধ হইতে b ও c এর মান নির্ণয় করা যাইবে। $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$.

উদাহরণমালা 15

উদা. 1. If $a=1+\sqrt{3}$, $b=2$ $C=60°$, solve the triangle.

এখানে c, A, Bএর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

সূত্র হইতে $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$=(1+\sqrt{3})^2+(2)^2-2(1+\sqrt{3}).\ 2\cos 60°$$
$$=4+2\sqrt{3}+4-2(1+\sqrt{3}).\ 2.\ \tfrac{1}{2}$$
$$=8+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}=6.$$

$\therefore\ c=\sqrt{6}.$

আবার, $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{(1+\sqrt{3}) \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ, \quad \therefore \quad A = 75^\circ,$$

সুতরাং $B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$.

অতএব, $c = \sqrt{6}$, $A = 75^\circ$, $B = 45^\circ$.

উদা. 2. In a triangle ABC if $a = 21$, $b = 11$, $C = 34^\circ 42' 30''$; find A and B, given $\log 2 = \cdot 30103$ and $L \tan 72^\circ 38' 45'' = 10 \cdot 50515$. [B. H. U. '47]

এখানে $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}(34^\circ 42' 30'')$

$$= 90^\circ - 17^\circ 21' 15'' = 72^\circ 38' 45'' \cdots\cdots (1)$$

আবার, $\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} = \frac{21-11}{21+11} \cot \frac{C}{2}$

$$= \frac{10}{32} \tan \frac{A+B}{2} = \frac{10}{32} \tan 72^\circ 38' 45'' \quad [\because \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ]$$

$\therefore \quad L \tan \frac{A-B}{2} = 10 + \log 10 - 5 \log 2 + \log \tan 72^\circ 38' 45''$

$$= 1 - 5 \times \cdot 30103 + L \tan 72^\circ 38' 45''$$

$$[\because \quad 10 + \log \tan \theta = L \tan \theta]$$

$$= 1 - 1 \cdot 50515 + 10 \cdot 50515 = 10$$

$\therefore \quad 10 + \log \tan \frac{A-B}{2} = 10, \ \therefore \quad \log \tan \frac{A-B}{2} = 0 = \log 1$

$\therefore \quad \tan \frac{A-B}{2} = 1 = \tan 45^\circ, \ \therefore \quad \frac{A-B}{2} = 45^\circ, \ \cdots \ \cdots \ \cdots (2)$

এক্ষণে, (1) + (2) করিয়া পাই

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = 72^\circ 38' 45'' + 45^\circ = 117^\circ 38' 45'';$$

এবং (1) − (2) করিয়া $B = 72^\circ 38' 45'' - 45^\circ = 27^\circ 38' 45''$.

উদা. 8. The sides b and c of $\triangle$ABC are as 5 : 3 and A$=60°30'$. Find the other angles ; given log 2$=·30103$ L cot $31°15'=10·23420$, L tan $23°13'=9·63240$ and diff. for $1'=35$.

এখানে $\frac{A}{2}=31°15'$, $\therefore \frac{B+C}{2}=91°-\frac{A}{2}=59°45'$ $\cdots$ $\cdots$ (1)

সূত্র হইতে পাই $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{5-3}{5+3}\cot\frac{A}{2}$

$$=\frac{1}{4}\cot\frac{A}{2}$$

$\therefore \log\tan\frac{B-C}{2}=\log 1-2\log 2+\log\cot\frac{A}{2}$

$$=-2\times·30103+\log\cot\frac{A}{2},$$

$\therefore$ L $\tan\frac{B-C}{2}=-·60206+$L cot $31°15'$

[উভয়পক্ষে 10 যোগ করিয়া]

$$=-·60206+10·23420=9·63214.$$

এক্ষণে L tan $23°13'=9·63240$ (স্বীকার)

এবং L $\tan\frac{B-C}{2}=9·63214$

$\therefore$ অন্তর $=26$;

$\because$ 35 অন্তর হয় $1'$ বা $60''$ এর জন্য

$\therefore$ 26 „ „ $\frac{60''}{35}\times 26$ বা $44''·57$ এর জন্য

$\therefore \frac{B-C}{2}=23°13'-44·57''=23°12'15''$ (প্রায়) $\cdots\cdots$ (2)

এখন (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই B$=59°45'+23°12'15''$

$$=82°57'15''$$

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই C$=36°32'45''$.

উদা. 4. If $A = 60°15'$, $B = 54°30'$ and $c = 100$ ft., find b; given $\log 8{\cdot}9646162 = {\cdot}9525317$, $L \sin 54°30' = 9{\cdot}9106860$, $L \sin 65°15' = 9{\cdot}9581543$.

এখানে $C = 180° - (A + B) = 180° - 114°45' = 65°15'$

$\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{100 \sin B}{\sin C}$,

$\therefore \log b = \log 10^2 + \log \sin B - \log \sin C$

$= 2 + \log \sin 54°30' - \log \sin 65°15'$

$= 2 + L \sin 54°30' - 10 - (L \sin 65°15' - 10)$

$= 2 + L \sin 54°30' - L \sin 65°15'$

$= 2 + 9{\cdot}9106860 - 9{\cdot}9581543 = 1{\cdot}9525317.$

এক্ষণে, $\because$ $\log b$ এর অংশক প্রদত্ত $\log 8{\cdot}9646162$ এর অংশকের সমান এবং $\log b$ এর পূর্ণক 1, $\therefore$ $b = 89{\cdot}646162$ ft.

উদা. 5. If $A = 70°$, $B = 40°50'$ and $c = 4{\cdot}85$, solve the triangle.

$\because A + B = 110°50'$ $\therefore C = 180° - (A + B) = 69°10'$

তালিকা হইতে $L \sin 70° = 9{\cdot}97299$

$L \sin 40°50' = 9{\cdot}81549$

$L \sin 69°10' = 9{\cdot}97063$

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{4{\cdot}85 \times \sin 70°}{\sin 69°10'}$

$\therefore \log a = \log 4{\cdot}85 + L \sin 70° - L \sin 69°10'$

$= {\cdot}68574 + 9{\cdot}97299 - 9{\cdot}97063 = {\cdot}68810$

$= \log 4{\cdot}88$ (প্রায়)

$\therefore a = 4{\cdot}88.$

আবার, $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{4{\cdot}85 \times \sin 40°50'}{\sin 69°10'}$

$\therefore \quad \log b = \log 4{\cdot}85 + L\sin 40°50' - \log 69°10'$

$= {\cdot}68574 + 9{\cdot}81549 - 9{\cdot}97063$

$= {\cdot}53060 = \log 3{\cdot}39$ (প্রায়)

$\therefore \quad b = 3{\cdot}39.$

অতএব, $a = 4{\cdot}88$, $b = 3{\cdot}39$ এবং $C = 69°10'$.

উদা. 6. If $c = 123$, $A = 29°17'$, $B = 135°$, find the greatest side ; given $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 123 = 2{\cdot}0899051$, $\log 32110 = 4{\cdot}5066403$, diff. for $1 = 135$, $L \sin 15°42'40'' = 9{\cdot}4327596$ and diff. for $1' = 543$.

এখানে $A + B = 29°17' + 135° = 164°17'$

$\therefore \quad C = 180° - (A + B) = 180° - 164°17' = 15°43'$

অতএব, B কোণ বৃহত্তম বলিয়া b বৃহত্তম বাহু হইবে।

$\because \quad \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}, \quad \therefore \quad b = \dfrac{c \sin B}{\sin C},$

বা, $b = \dfrac{c \sin 135°}{\sin 15°43'} = \dfrac{c \sin 45°}{\sin 15°43'}$ $[\because \sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45°]$

$$= \frac{123 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 15°43'}$$

$\therefore \quad \log b = \log 123 + \log \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \log \sin 15°43' \quad \cdots \quad (1)$

আবার, $15°43' - 15°42'40'' = 20''$ (অন্তর)

$\because \quad 60''$ এর জন্য অন্তর হয় 543

$\therefore \quad 20''$ „ „ „ $\dfrac{543}{60} \times 20$ বা 181

$\therefore \quad L \sin 15°43' = 9{\cdot}4327596 + {\cdot}0000181 = 9{\cdot}4327777.$

$\therefore \quad \log \sin 15°43' = 9{\cdot}4327777 - 10 = \bar{1}{\cdot}4327777$

এক্ষণে (1) হইতে পাই

$$\log b=\log 123+\log 1-\tfrac{1}{2}\log 2-\log\sin 15°43'$$

$$[\because \quad \sqrt{2}=(2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$=2{\cdot}0899051-\tfrac{1}{2}\times{\cdot}3010300-\bar{1}{\cdot}4327777$$

$$=2{\cdot}0899051-{\cdot}1505150+1-{\cdot}4327777=2{\cdot}5066124$$

এখানে প্রাপ্ত লগের অংশক ·5066124 এবং প্রদত্ত লগ 32110 এর অংশক ·5066403,

উভয়ের অন্তর = ·5066403 − ·5066124 = 279 (সংক্ষেপে)

135 অন্তর হয় 1 এর জন্য

∴ 279 „ „ $\frac{279}{135}$ বা 2·066 এর জন্য

∴ ·5066124 হইল (32110 − 2·066) বা 32107·93 এর লগের অংশক

এক্ষণে, ∵ $\log b$ এর পূর্ণক 2,

$\therefore \log b=\log 321{\cdot}0793, \quad \therefore b=321{\cdot}0793.$

উদা. 7. The base of a triangle is 7 ft. and the base angles are 129°23′ and 38°36′ ; find the length of its shorter side.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ভূমি BC অর্থাৎ $a=7$,

B = 38°36′ ও C = 129°23′. অতএব, B কোণের বিপরীত বাহু b এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

অবশিষ্ট A কোণ = 180° − (38°36′ + 129°23′) = 12°1′.

$$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}, \quad \therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{7\times\sin 38°36'}{\sin 12°1'},$$

$$\therefore \log b=\log 7+\log\sin 38°36'-\log\sin 12°1'$$

$$=\log 7+L\sin 38°36'-L\sin 12°1'$$

$$={\cdot}84510+9{\cdot}79510-9{\cdot}31845 \text{ [তালিকা হইতে]}$$

$$=1{\cdot}32175.$$

এক্ষণে, তালিকা হইতে পাই 2097 এর অংশক ·32163,

·32175

·32163

∴ অন্তর = 12, কিন্তু তালিকা হইতে পাই 1 এর জন্য অন্তর 21, ∴ 12 অন্তর হইবে $\frac{12}{21}$ বা ·57 এর জন্য

∴ ·32175 হইল 2097·6 (প্রায়) এর লগের অংশক এবং উহার পূর্ণক 1 বলিয়া log b = log 20·976. অতএব, b = 20·976.

Exercise 15

1. If $b=\sqrt{3}$, $c=1$ and $A=30°$, solve the triangle.

2. If $b=\sqrt{6}$, $a=1+\sqrt{3}$ and $C=45°$, solve the triangle.

3. Two sides of a triangle have lengths 1 and 3 ft. and the included angle is 40°. Find the other angles in degrees and minutes.

4. In a plane triangle $b=540$, $c=420$ and $A=52°6'$; find B and C, having given L tan 26°3′ = 9·6891430, L tan 14°20′ = 9·4074189, L tan 14°21′ = 9·4079543. [C. U. '34]

5. Two sides of a triangle are 3 and 5 feet and the included angle is 120°. Find the other angles, having given log 4·8 = ·6812412, L tan 8°12′ = 9·1586706, diff. for 60″ = ·0008940. [C. U. '40, '49]

6. Two sides of a triangle are 18 ft. and 2 ft. and the included angle is 55°. Find the remaining angles; having given log 2 = ·3010300, L cot 27°30′ = 10·2835233, L tan 56°46′ = 10·1863769 and diff. for 1′ = ·0002763. [C. U. '42]

7. If the sides a and b are in the ratio 7 : 3 and the angle C is 60°, find A and B, given log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213, L tan 34°42′ = 9·8403776, diff. for 1′ = 2699. [B. H. U. '40]

8. Two sides of a triangle are 14 and 11 and the included angle is 60°. Find the remaining angles, having given L tan 11°44′ = 9·3174299, L tan 11°45′ = 9·3180640, log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213. [C U. '44]

9. In a triangle $b=2·25$, $c=1·75$, $A=54°$, find B and C, having given log 2 = ·301030, L tan 63° = 10·292834, L tan 13°47′ = 9·389724, L tan 13°48′ = 9·390270. [C. U. '31]

10. Given $a=70$, $b=35$, $C=36°52'12''$, log 3=0·4771213, L cot $18°26'6''$=10·4771213. Calculate the other two angles A and B. [C. U. '35, '37]

11. If $b=243$, $c=681$, $A=50°42'$, solve the triangle by the help of Mathematical tables.

12. In a triangle $b=80$, $c=100$ and $A=60°$, find the other angles, having given log 3=·47712, L tan $10°53'36''$ =9·28432. [C. U. '46]

13. If $a=204$, $b=91$ and $\tan\frac{A}{2}=\frac{17}{6}$, shew that $c=125$.

14. If $a=19$, $B=52°28'$ and $C=93'40''$, find b, having given log 27038=4·4319746, log 19=1·2787536, log 27037 =4·4319585, L sin $52°28'$=9·8992727, L sin $33°52'$=9·7460595. [P. U. '36]

15. Given $b=10$, $A=45°$, $B=66°42'20''$, ; find a, given that log 2=·3010300, log 7·698622=·8864131, L sin $66°42'$=9·9630538, diff. for 1'=544. [C. U. 1906]

16. If $A=C=75°$, $b=\sqrt{8}$, solve the triangle.

17. The angles of a triangle are as 2 : 2 : 1 and the least side is 2, solve the triangle.

18. If $a=39$, $A=81°35'$, $B=27°55'$; solve the triangle. [C. U. '33]

19. If $b=1000$, $A=45°$, $C=68°17'40''$, find the least side, having given log 2=·3010300, log 7·6986=·8864123 diff. for 1=57, L sin $66°42'$=9·9630538, diff. for 1'=544.

20. If $B=45°$, $C=10°$ and $a=200$ ft. ; find b, having given log 2=·30103, L sin $55°$=9·9133645, log 1726·4 =3·2371414, log 1726·5=3·2371666. [C. U. '47]

113. Case V. Two sides and an angle opposite to one of them given.

মনে কর, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং A কোণ (a বাহুর বিপরীত কোণ) দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে অর্থাৎ c বাহু এবং B ও C কোণ নির্ণয় করিতে হইবে।

সূত্র $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ হইতে পাই $\sin B=\frac{b \sin A}{a}$,

সুতরাং $L \sin B = \log b + L \sin A - \log a$,

অতএব উহা হইতে B পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে, ∵ $A + B + C = 180°$ এবং A ও B জানা হইয়াছে,

∴ C কোণও জানা যাইবে।

আবার, ∵ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \text{ অথবা } c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

সুতরাং $\log c = \log a + L \sin C - L \sin A$,

অথবা $\log c = \log b + L \sin C - L \sin B$, ইহাদের যে কোন একটি হইতে c নির্ণয় করা যাইবে।

অতএব, এইভাবে ত্রিভুজটির সমাধান হইবে। এরূপস্থলে কিন্তু কয়েক প্রকার বিভিন্ন অবস্থার উদ্ভব হইতে পারে। কারণ, প্রদত্ত অংশগুলি এরূপ হইতে পারে যে তাহাদের সাহায্যে হয়ত (I) কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না, সুতরাং ত্রিভুজের সমাধান হইবে না, (II) হয়ত একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে, অথবা (III) হয়ত দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে, সুতরাং দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে।

এই তিন প্রকার অবস্থার (cases) বিষয় নিম্নে আলোচনা করা হইতেছে।

(1) **Case I.** $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, এক্ষেত্রে যদি $b \sin A > a$ হয়, তবে $\frac{b \sin A}{a} > 1$ হইবে অর্থাৎ $\sin B > 1$ হইবে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ কোন কোণের সাইন 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না। অতএব, এক্ষেত্রে B-র মান নির্ণয় করা যায় না। অতএব , ত্রিভুজ অঙ্কনই সম্ভব হয় না, সুতরাং ত্রিভুজের সমাধান হইতে পারে না।

(2) **Case II.** যদি $b \sin A = a$ হয়, তবে $\frac{b \sin A}{a} = 1$ হইবে অর্থাৎ $\sin B = 1 = \sin 90°$ হইবে, সুতরাং $B = 90°$ হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে, এবং $b^2 = a^2 + c^2$, বা $b = \sqrt{a^2 + c^2}$ হইতে b-র মান পাওয়া যাইবে। এক্ষেত্রে দ্রষ্টব্য এই যে $a = b$, বা $a > b$ হইলে কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নহে।

(3) **Case III.** **যদি b sin A < a** হয়, তবে sin B < 1 হইবে এবং B নির্ণয় করা যাইবে। আমরা জানি দুইটি সম্পূরক (Supplementary) কোণের সাইন সমান হয়, সুতরাং এক্ষেত্রে B-র দুইটি মান পাওয়া যাইবে —একটি 0° হইতে 90° এর মধ্যবর্তী এবং অপরটি 90° হইতে 180°-র মধ্যবর্তী অর্থাৎ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং অন্যটি স্থূলকোণ। কিন্তু দুইটি মানই সর্বক্ষেত্রে গ্রহণযোগ্য (admissible) না হইতে পারে। এস্থলে তিন প্রকার অবস্থার উদ্ভব হইতে পারে। যথা—

(i) **যদি a > b হয়,** তবে A > B হইবে, সুতরাং B-র মান স্থূলকোণটি গ্রাহ্য হইতে পারে না। কারণ, তাহাতে ত্রিভুজের A ও B দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়া যায়। অতএব, এস্থলে B-র মান সূক্ষ্মকোণটিই গ্রহণ করিতে হইবে এবং ত্রিভুজের একটি মাত্র সমাধান পাওয়া যাইবে।

(ii) **যদি a = b** হয় তবে A = B হইবে এবং এক্ষেত্রেও B-র কেবল সূক্ষ্মকোণ মানটিই গ্রাহ্য হইবে এবং ত্রিভুজের একটিমাত্র সমাধান হইবে।

(iii) **যদি a < b হয়** তবে A < B হইবে, সুতরাং এক্ষেত্রে B সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হইতে পারে। অতএব, এস্থলে B-র সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ এই দুইটি মানই গ্রাহ্য হইবে এবং প্রদত্ত অংশগুলির সাহায্যে **দুইটি** ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে অর্থাৎ ত্রিভুজের দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে। ইহাকে **অনিশ্চয় অবস্থা** বা **দ্ব্যর্থক অবস্থা** (**ambiguous Case**) বলে। এস্থলে A সূক্ষ্মকোণ হইবে এবং B-র মান দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইবে।

উপরে লব্ধ **সিদ্ধান্তগুলি** একত্রে নিম্নে প্রদত্ত হইল—যদি a, b ও A প্রদত্ত থাকে, এবং

(1) যদি b sin A > a হয়, তবে কোন ত্রিভুজ হইবে না ;

(2) যদি $b \sin A = a$ হয়, তবে একটি সমকোণী-ত্রিভুজ সমাধান স্বরূপ পাওয়া যাইবে।

(3) যদি $a \geqslant b$ হয় (সুতরাং $a > b \sin A$) তবে একটিমাত্র সমাধান হইবে এবং C সূক্ষ্মকোণ হইবে।

[এক্ষেত্রে $a > b$ অথবা $a = b$ হইতে পারে, ইহাই $\geqslant$ চিহ্নের অর্থ]

(4) যদি $b \sin A < a$ এবং $a < b$ হয়, তবে দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে এবং ইহাকেই দ্ব্যর্থক অবস্থা বলা হয়।

114. দ্ব্যর্থক অবস্থার জ্যামিতিক আলোচনা

(Geometrical treatment of the Ambiguous Case)

মনে কর, ABC ত্রিভুজের a, b এবং A দেওয়া আছে।

যে কোন সরলরেখা AX লও এবং A বিন্দুতে A কোণের সমান $\angle YAX$ আঁক। AY হইতে $AC = b$ কাটিয়া লও এবং $CD \perp AX$ টান।

$\therefore \dfrac{CD}{AC} = \sin A,$

$\therefore CD = AC \sin A = b \sin A.$

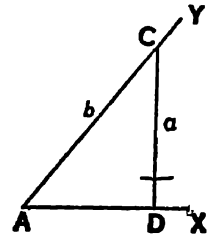
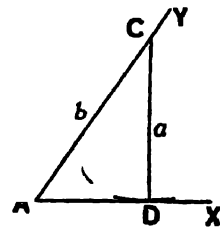
এক্ষণে C-কে কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর।

(চিত্র 13)

বৃত্তটি AX কে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে (ধর B বিন্দু) তাহার সহিত C বিন্দু যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট ABC ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

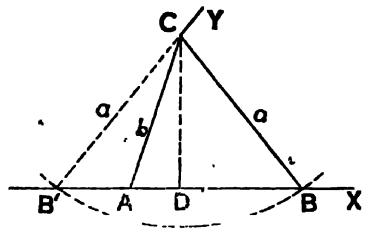
এক্ষণে, (1) যদি $a <$ CD (অর্থাৎ $a < b \sin A$) হয়, তবে বৃত্তটি AX-কে কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না ; সুতরাং কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।

(2) যদি $a =$ CD হয়, অর্থাৎ $a = b \sin A$ হয়, তবে বৃত্তটি AX-কে D বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং CAD সমকোণী ত্রিভুজটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

[এস্থলে $a = b$ হইতে পারিবে না]

(চিত্র 14)

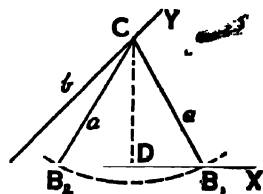
(3) যদি $a >$ CD (অর্থাৎ $a > b \sin A$) হয়, তবে দুইটি অবস্থা হইতে পারে। যথা, (i) $a > b$, অথবা (iii) $a = b$ হইতে পারে।

(i) $a > b$ হইলে বৃত্তটি AX-কে A বিন্দুর দুইটি বিপরীত পার্শ্বে B ও B′ বিন্দুতে ছেদ করিবে।

এখানে AB′C ত্রিভুজের AC $= b$, CB′ $= a$ বটে, কিন্তু $\angle$CAB′ প্রদত্ত A কোণের সমান না হইয়া A এর সম্পূরক কোণ হইয়াছে, সুতরাং এই ত্রিভুজ গ্রাহ্য হইবে না। অতএব, এক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজই একমাত্র সমাধান হইবে।

(চিত্র 15)

(ii) এস্থলে যদি $a = b$ হয়, তবে B′ বিন্দু A বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে, সুতরাং ABC ত্রিভুজই একমাত্র সমাধান হইবে এবং উহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

(4) যদি $a >$ CD (অর্থাৎ $a > b \sin A$) কিন্তু b (বা AC) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (অর্থাৎ $a < b$) হয়, তবে, বৃত্তটি AX কে A বিন্দুর একই পার্শ্বে B_1 ও B_2 বিন্দুতে ছেদ করিবে।

এক্ষেত্রে ACB_1 ও ACB_2 দুইটি ত্রিভুজেরই তিনটি অংশ প্রদত্ত অংশত্রয়ের সমান। কারণ, উহাদের $\angle$ A = প্রদত্ত কোণ A, CX $= b$ এবং $CB_1 = CB_2 = a$.

(চিত্র 16)

অতএব, এক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ অর্থাৎ দুইটি সমাধান পাওয়া গেল। ইহাই দ্ব্যর্থক অবস্থা (Ambiguous Case)।

[দ্রষ্টব্য : Ambiguous Case-এ দুইটি লব্ধ ত্রিভুজের মধ্যে একটি সূক্ষ্মকোণী এবং অপরটি স্থূলকোণী হইবে। ত্রিভুজদ্বয়ের $B_1 + B_2 = 180°$, সুতরাং উহারা পরস্পর সম্পূরক এবং $\sin B_1 = \sin B_2$.]

উদাহরণমালা 16

উদা. 1. $b=3$, $c=3\sqrt{3}$ and $B=30°$, find C and A.

এখানে $b<c$, সুতরাং $B<C$, অতএব, C সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হইতে পারে এবং C এর মান দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইবে।

এক্ষণে, $\because \dfrac{\sin C}{c}=\dfrac{\sin B}{b}$,

$$\therefore \sin C=\frac{c \sin B}{b}=\frac{c\times \sin 30°}{b}=\frac{3\sqrt{3}\times \frac{1}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=\sin 60°$ বা $\sin(180°-60°)$. $\therefore C=60°$ বা $120°$.

আবার; $A=180°-(B+C)=180°-(30°+60°)=90°$;

অথবা; $A=180°-(B+C)=180°-(30°+120°)=30°$,

অতএব, $C=60°$ বা $120°$ এবং $A=90°$ বা $30°$.

[দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে $C=60°$ হইলে $A=90°$ হইবে, সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে। আর, $C=120°$ হইলে $A=30°=B$ হইবে, সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।]

উদা. 2. If $a=6$, $c=2\sqrt{2}$ and $C=45°$, solve the triangle (if possible).

সূত্র হইতে পাই $\sin A=\dfrac{a \sin C}{c}$,

এক্ষেত্রে $a \sin C=6\times \sin 45°=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ এবং $c=2\sqrt{2}$

$\therefore a \sin C>c$, $\therefore$ ত্রিভুজ অসম্ভব হইবে, সুতরাং এখানে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নহে।

উদা. 3. If $b=100$, $a=b\sqrt{2}$ and $B=30°$, solve the triangle, giving two solutions in case of ambiguity.

এখানে $b<a$, সুতরাং $B<A$. $\therefore$ A এর দুইটি পরস্পর সম্পূরক মান হইবে। অতএব, ইহা দ্ব্যর্থক বলিয়া দুইটি সমাধান হইবে।

সূত্র হইতে পাই $\sin A=\frac{a \sin B}{b}=\frac{b\sqrt{2}\times\sin 30^\circ}{b}=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45^\circ \text{ বা } \sin(180^\circ-45^\circ)$$

$=\sin 45^\circ$ বা $\sin 135^\circ$, $\therefore\quad A=45^\circ$ বা 135°.

এক্ষণে, (i) যদি $A=45^\circ$ হয়, তবে $C=180^\circ-(A+B)$

$$=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ \text{ হইবে ;}$$

এবং $c=\frac{b \sin C}{\sin B}=\frac{100\times\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{100\times\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$

$$=\frac{100\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{200\times(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}=\frac{100(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{100\times\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})=193{\cdot}185.$$

(ii) যদি $A=135^\circ$ হয়, তবে $C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$ হইবে,

এবং তখন $c=\frac{b \sin C}{\sin B}=\frac{100\times\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{100\times\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$

$$=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})=51{\cdot}76.$$

অতএব, এক্ষেত্রে সমাধান দুইটি হইল :—

(i) $A=45^\circ$, $C=105^\circ$, $c=193{\cdot}185$; অথবা

(ii) $A=135^\circ$, $C=15^\circ$, $c=51{\cdot}76$.

উদা. 4. If $C=26^\circ 26'$, $b=127$ and $c=85$, find B; given $\log 1{\cdot}27={\cdot}1038037$, $\log 8{\cdot}5={\cdot}9294189$, $L \sin 26^\circ 26'=9{\cdot}6485124$ and $\sin 41^\circ 41' 28''=\bar{1}{\cdot}8228972$.

এখানে $b \sin C<c$ এবং $c<b$ সুতরাং B সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হইতে পারে।

$$\because \log 1{\cdot}27={\cdot}1038037,\quad \therefore \log 127=2{\cdot}1038037,$$

$$\because \log 8{\cdot}5={\cdot}9294189,\quad \therefore \log 85=1{\cdot}9294189$$

এবং ∵ $\log \sin 41°41'28'' = \bar{1}\cdot8228972$,

∴ $L \sin 41°41'28'' = 10 + \bar{1}\cdot8228972 = 9\cdot8228972$.

এক্ষণে, $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{127 \sin 26°26'}{85}$,

∴ $L \sin B = \log 127 + L \sin 26°26' - \log 85$

$= 2\cdot1038037 + 9\cdot6485124 - 1\cdot9294189$

$= 9\cdot8228972 = L \sin 41°41'28''$

∴ $B = 41°41'28''$, বা $(180° - 41°41'28'')$

$= 41°41'28''$, বা $138°18'32''$.

উদা. 5. If $a = 4\cdot5$, $c = 45$, find A so that C may be a right angle. Given that $L \sin 5°33' = 8\cdot98157$ and the diff. for $1' = 5260$.

এখানে $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{4\cdot5 \times \sin 90°}{45}$ [∵ $C = 90°$ (স্বীকার)]

$= \frac{4\cdot5 \times 1}{45} = \frac{1}{10}$

∴ $\log \sin A = \log 1 - \log 10 = -1$ [∴ $\log 1 = 0$]

∴ $L \sin A = -1 + 10 = 9$

এবং $L \sin 5°33' = 8\cdot98157$ (প্রদত্ত)

∴ diff. $= \cdot01843$

কিন্তু, 5260 অর্থাৎ ·05260 অন্তর হয় 60″র জন্য

∴ ·01843 „ „ $\frac{60 \times 1843}{5260}$ বা 21″র জন্য

∴ $L \sin A = L \sin 5°33'21''$, ∴ $A = 5°33'21''$.

উদা. 6. If a, b and A of △ABC be given, prove that in the ambiguous case the difference between the two values of c is $2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$. [U. P. B. '41]

সূত্র হইতে পাই $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

বা, $c^2-2b\cos A.c+b^2-a^2=0$, ইহা একটি c এর দ্বিঘাত সমীকরণ, সুতরাং ইহা সমাধান করিয়া পাই

$$c=\frac{2b\cos A\pm\sqrt{4b^2\cos^2 A-4(b^2-a^2)}}{2}$$

$$=\frac{2b\cos A\pm 2\sqrt{b^2\cos^2 A-b^2+a^2}}{2}$$

$$=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2(1-\cos^2 A)}$$
$$=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

অতএব, C এর দুইটি মান হইল $b\cos A+\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$

এবং $b\cos A-\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$.

$\therefore$ এই দুই মানের অন্তর $=2\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$.

উদা. 7. If $b=573$, $a=394$, $B=112°4'$, find A and C, given log 57·3 = 1·7581546, log 3·94 = ·5954962,

L sin 39°35′ = 9·8042757, diff. for 1′ = 1527 and

L cos 22°4′ = 9·9669614.

প্রদত্ত log 57·3 এবং log 3·94 হইতে পাই

log 573 = 2·7581546 এবং log 394 = 2·5954962.

আবার, $B=112°4'=90°+22°4'$,

$\therefore\ \sin B=\sin(90°+22°4')=\cos 22°4'$

সূত্র হইতে পাই $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{394\times\sin 112°4'}{573}$

$$=\frac{394\times\cos 22°4'}{573},$$

$$L\sin A=\log 394+L\cos 22°4'-\log 573$$
$$=2·5954962+9·9669614-2·7581546$$
$$=9·8043030.$$

এখন, $L \sin A = 9·8043030$
কিন্তু $L \sin 39°35' = 9·8042757$

$\therefore$ অন্তর = 273

$\because$ 1527 অন্তর হয় 60″ এর জন্য

$\therefore$ 273 „ „ $\frac{60''}{1527} \times 273$ বা 11″ (প্রায়) এর জন্য

$\therefore$ $L \sin A = L \sin 39°35'11''$

$\therefore$ $A = 39°35'11''$ এবং $C = 180° - (A + B) = 28°20'49''$.

Exercise 16

1. If $a = \sqrt{6}$, $c = 2$, $A = 60°$, find B and C.

2. If $B = 60°$, $c = 6$ and $b = 3\sqrt{3}$, shew that it may be a right-angled triangle.

Solve the following triangles ;—

3. $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ and $A = 45°$

4. $b = 34$, $c = 70$, $B = 30°$ 5. $b = 20$, $c = 20\sqrt{2}$ $B = 30°$

6. $C = 30°$, $b = 30$, $c = 10\sqrt{3}$ 7. $a = 5$, $c = 5\sqrt{3}$, $C = 60°$

8. If in $\triangle ABC$, $c = 36·5$ ft., $a = 45$ ft. and $A = 43°15'$, find AC using tables.

9. If $a = 5$, $b = 7$ and $A = 30°$ find B in degrees and minutes, having given $\sin 44° = ·6947$ and $\sin 45° = ·7071$. [C. U. '29]

10. If $b = 5$, $c = 4$ and $B = 45°$, find A and C ; given $\log 2 = ·30103$, $L \sin 34°26' = 9·752575$.

11. If $b = 112$, $c = 175$, $B = 36°20'$, find the other angles, having given $\log 2 = ·30103$, $L \sin 36°20' = 9·77268$ and $L \sin 67°47' = 9·96650$.

12. If $a = 63$, $c = 36$, $C = 29°23'15''$, find A ; given $\log 2 = ·3010300$, $\log 7 = ·8450980$, $L \sin 29°23' = 9·6907721$, diff. for $1' = 2243$, $L \sin 59°10' = 9·9338222$, diff. for $1' = 755$.

13. If in a triangle $a = 5$, $b = 4$ and $A = 45°$, find the remaining angles, having given $\log 2 = ·30103$, $L \sin 34°26' = 9·7523919$, $L \sin 34°27' = 9·7525761$. [B. H. U. '51]

14. If $a=5$ ft., $b=8$ ft., $A=35°$ find the smaller value of c, having given log 2 = ·30103, log 456706 = 5·659637, L sin $31°35'43''$ = 9·719261, L sin $35°$ = 9·758591, L sin $66°35'$ = 9·962672, L sin $66°36'$ = 9·962727. [A. U. '13]

15. If $a=35$ and $b=350$, find A so that B may be a right angle, having given

L sin $5°44'$ = 8·9995595, diff. for $1'$ = 12565.

16. If $2b=3a$ and $\tan^2 A=\frac{3}{5}$, prove that the third side has two values, one being double the other.

17. In an obtuse-angled triangle $b=1325$, $c=1665$ and $B=52°19'$, solve the triangle.

18. If in an ambiguous case the angles A and C have two values A_1, A_2, and C_1, C_2, respectively, show that

$$\frac{\sin A_1}{\sin C_1}+\frac{\sin A_2}{\sin C_2}=2 \cos B.$$

19. If a, b, A are given and if c_1, c_2 be the values of the third side in the ambiguous case, prove the following if $c_1>c_2$:

(i) $c_1-c_2=2a \cos B$ [B. H. U. I. '28]

(ii) $\cos \frac{C_1-C_2}{2}=\frac{b \sin A}{a}$ [A. I. '41]

(iii) $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2 \cos 2A=4a^2 \cos^2 A$.

20. In the case that admits of two solutions prove that the two values of C satisfy the equation

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C}+\frac{(b-a)^2}{1-\cos C}=\frac{2a^2}{\sin^2 A}.$$ [B. H. U. I. '42]

Heights and Distances

[উচ্চতা ও দূরত্ব]

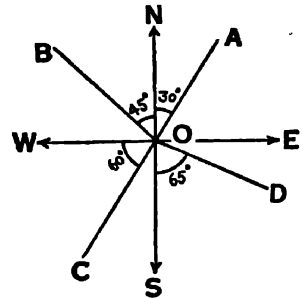
115. এই পুস্তকের প্রথম খণ্ডে নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশে 'উচ্চতা ও দূরত্ব' সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। এখানে ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলির সম্বন্ধ বিষয়ে জ্ঞান সাপেক্ষ জটিলতর প্রশ্নগুলির আলোচনা করা হইতেছে।

এখানে স্মরণ রাখিতে হইবে যে, সাধারণতঃ দর্শক যখন দূরবর্তী কোন বস্তুর উন্নতি কোণ বা অবনতি কোণ নিরীক্ষণ করেন তখন তাঁহার নিজের উচ্চতা ধরা হয় না, তাঁহার চক্ষু যেন অনুভূমিক তলের উপর একটি বিন্দু এইরূপ ধরা হয়। কোন প্রশ্নে দর্শকের উচ্চতা দেওয়া থাকিলে তখন তাহা অগ্রাহ্য করা যাইবে না।

116. Bearing of a Line (কোন সরলরেখার নতি)। কোন প্রদত্ত সরলরেখা একই অনুভূমিক তলের উপর উত্তর দক্ষিণ (North-South, সংক্ষেপে N.S.) সরলরেখার সহিত যে ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ঐ সরলরেখার নতি (bearing) বলা হয়। ইহা দ্বারা ঐ সরল রেখাটির উত্তর বা দক্ষিণ রেখা হইতে পার্থক্য (deviation) বুঝায় অর্থাৎ উহা উত্তর বা দক্ষিণ রেখা হইতে পূর্ব বা পশ্চিম অভিমুখে কতটা (কত ডিগ্রি) সরিয়া গিয়াছে তাহাই বুঝায়।

(চিত্র 17)

উত্তর রেখা বা দক্ষিণ রেখা কোন্‌টি হইতে এবং পূর্ব বা পশ্চিম কোন্ দিকে ঐ নতি ধরা হইতেছে তাহা সংক্ষেপে প্রকাশ করিবার জন্য প্রথমে N বা S (অর্থাৎ উত্তর বা দক্ষিণ) তৎপরে কোণটির পরিমাণ এবং তাহার পর E বা W (অর্থাৎ East বা West) লিখিতে হয়। যথা, N30°E, S45°W, ইত্যাদি।

পার্শ্বের চিত্রে NS রেখাই উত্তর দক্ষিণ রেখা এবং উহার সহিত সমকোণে অবস্থিত EW রেখাই পূর্ব-পশ্চিম রেখা। O উহাদের ছেদ বিন্দু। এখানে

OA, OB, OC ও OD রেখাগুলির bearing যথাক্রমে N30°E, N45°W, S30°W এবং S65°E.

কোন দুর্গম বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়

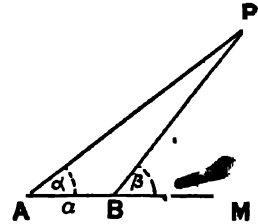
যে বস্তুর নিকট যাওয়া সম্ভব নহে, দূর হইতে তাহার উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় করা যাইতে পারে। ইহা দুইভাবে সম্ভব, তাহা নিম্নে দেখান হইতেছে।

117. অনুভূমিক তলের উপর অবস্থিত কোন দুরধিগম্য বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় করিবার প্রণালী।

মনে কর, বস্তুটি (পাহাড় বা অন্যকিছু) PM এবং উহার সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত A বিন্দু হইতে উহার শীর্ষ P বিন্দুর উন্নতি (বা উন্নতি কোণ) α. PM উচ্চতা এবং AM দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

Case I. By measurements in the same plane.

মনে কর, PM এর উচ্চতা h এবং AM দূরত্ব d দ্বারা সূচিত করা হইল।

যদি সম্ভব হয়, তবে A হইতে PM এর দিকে যে কোন AB দূরত্ব (ধর a) অগ্রসর হইয়া B বিন্দু হইতে P এর উন্নতি কোণ β লক্ষ্য করা হইল।

(চিত্র 18)

এক্ষণে, (চিত্র দেখ) $a = AB = AM - BM = h \cot\alpha - h \cot\beta$

$$= h\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) = h\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)$$

$$= \frac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\therefore \quad \mathbf{h} = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \mathbf{a \sin\alpha \sin\beta \operatorname{cosec}(\beta-\alpha)}.$$

আবার, $\mathbf{d} = AM = h\cot\alpha = \mathbf{a\cos\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)}$

[h এর মান বসাইয়া]

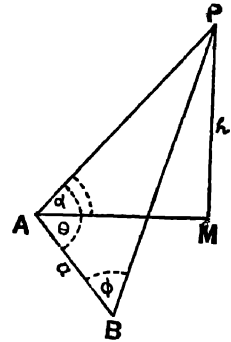
একক্ষণে, a, α ও β জানা থাকায় লগ তালিকার সাহায্যে h ও d এর মান পাওয়া যাইবে।

$$\log h = \log a + \log \sin \alpha + \log \sin \beta + \log \operatorname{cosec} (\beta - \alpha),$$

এবং $\log d = \log a + \log \cos \alpha + \log \sin \beta + \log \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$.

[দ্রষ্টব্য : (1) h ও d সম্বন্ধে যে সূত্র দুইটি পাওয়া গেল লগারিদ্‌মের সাহায্যে মান নির্ণয়ের জন্য উহারা সুবিধাজনক। (2) Case I এ বলা হইয়াছে যে, A বিন্দু হইতে PM এর দিকে AB দূরত্ব অগ্রসর হইয়া B বিন্দু হইতে P এর উন্নতি লক্ষ্য করা হইয়াছে। কিন্তু যদি দুর্গম পথ PM এর দিকে অগ্রসর হওয়া সম্ভব না হয়, তবে h ও d নির্ণয়ের অন্য প্রণালী অবলম্বন করিতে হইবে। Case II এ তাহা দেখান হইতেছে।]

Case II: (By measurements in more than one plane).

যদি ঠিক PM এর দিকে অগ্রসর হওয়া সম্ভব না হয়, তবে A বিন্দু হইতে যে কোন সুবিধাজনক দিকে AB $(=a)$ দূরত্ব গিয়া B বিন্দু হইতে $\angle$ABP লক্ষ্য করা হইল। মনে কর, উহা ϕ. আবার A বিন্দু হইতে $\angle$PAB লক্ষ্য করা হইল। মনে কর, উহা θ হইল। অতএব, $\angle APB = 180^\circ - (\theta + \phi)$ হইবে।

(চিত্র 19)।

একক্ষণে (চিত্র হইতে) $\triangle$ABP হইতে পাই

$$\frac{AP}{\sin \phi} = \frac{AB}{\sin APB} = \frac{a}{\sin \{180^\circ - (\theta + \phi)\}}$$

$$= \frac{a}{\sin (\theta + \phi)},$$

$$\therefore \quad AP = \frac{a \sin \phi}{\sin (\theta + \phi)} = a \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$$

$$\therefore \quad h = PM = AP \sin \alpha = a \sin \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$$

[APর মান বসাইয়া]

এবং $\therefore \quad d = AM = AP \cos \alpha = a \cos \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$.

[(a) এক্ষেত্রেও লগ তালিকা হইতে মান নির্ণয় সুবিধাজনক।

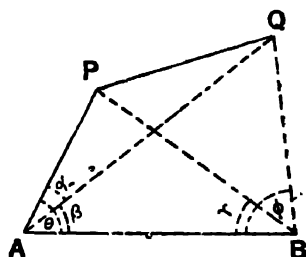
(b) AM এর সহিত লম্বভাবেও AB দূরত্ব লওয়া যায়।]

118. দুইটি দৃশ্য কিন্তু দুর্গম বস্তুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়।

[To find the distance between two visible but inaccessible objects.]

মনে কর, P ও Q দুইটি দুর্গম বস্তু এবং ইহাদের দূরত্ব PQ নির্ণয় করিতে হইবে। পর্যবেক্ষণের জন্য অনুভূমিক তলে সুবিধামত যে কোন দুইটি বিন্দু A ও B লও এবং মনে কর, দূরত্ব AB $= a$.

(চিত্র 20)

A বিন্দুতে $\angle PAQ$, $\angle QAB$ ও $\angle PAB$ লক্ষ্য করা হইল। মনে কর, উহাদের মান যথাক্রমে α, β ও θ হইল।*

আবার, B বিন্দুতে $\angle PBA$ ও $\angle QBA$ লক্ষ্য করা হইল। মনে কর, উহারা যথাক্রমে γ ও ϕ হইল।

অতএব, $\angle APB = 180° - (\theta + \gamma)$ এবং $\angle AQB = 180° - (\phi + \beta)$ হইল।

এক্ষণে, $\triangle PAB$ হইতে পাই $\dfrac{AP}{\sin\gamma} = \dfrac{AB}{\sin APB}$,

$$\text{বা, } \frac{AP}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\{180° - (\theta+\gamma)\}} = \frac{a}{\sin(\theta+\gamma)} = a \operatorname{cosec}(\theta+\gamma)$$

$$\therefore \quad AP = a \sin\gamma \operatorname{cosec}(\theta+\gamma).$$

অনুরূপে $\triangle ABQ$ হইতে পাই $\dfrac{AQ}{\sin\phi} = \dfrac{AB}{\sin AQB} = \dfrac{a}{\sin\{180° - (\phi+\beta)\}}$

$$= \frac{a}{\sin(\phi+\beta)} = a \operatorname{cosec}(\phi+\beta)$$

$$\therefore \quad AQ = a \sin\phi \operatorname{cosec}(\phi+\beta).$$

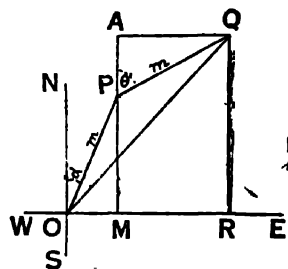
অতএব, $\triangle PAQ$ হইতে পাই $PQ^2 = AQ^2 + AP^2 - 2AP.AQ \cos\alpha$.

অতএব, PQ এর মান নির্ণীত হইবে।

দ্রষ্টব্য।* যদি A, B, P, Q বিন্দু চারিটি একই তলে অবস্থিত হয়, তবে PAB কোণের মান লইবার প্রয়োজন হয় না। কারণ, তখন $\angle PAB = \angle PAQ + \angle QAB = \alpha + \beta$ হইবে।

উদাহরণমালা 17

উদা. 1. A ship sails m miles along a line having a bearing NαE and then another m miles in a direction NθE. Find the final distance of the ship from the starting point and the final bearing.

মনে কর, জাহাজখানি O বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া ON (উত্তর) রেখার সহিত α কোণ করিয়া E অর্থাৎ পূর্ব দিকে OP $(=m)$ মাইল গেল। তৎপরে উহা উত্তর রেখার সহিত θ কোণে পূর্বদিকে PQ $(=m)$ মাইল গেল। এক্ষণে OQ দূরত্ব এবং $\angle$NOQ নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র 21)

P বিন্দুর মধ্য দিয়া উল্লম্ব রেখা AM টানা হইল এবং মনে কর QA$\perp$AM, সুতরাং $\angle OPM = \angle NOP = \alpha$.

আবার, $\angle OPQ = \angle OPM + \angle MPQ = \alpha + 180° - \theta$

$\therefore \cos \angle OPQ = -\cos(\theta - \alpha)$.

OP = PQ = m মাইল। অতএব, $\angle POQ = \angle OQP$

$= \frac{1}{2}(180° - \angle OPQ) = \frac{1}{2}(180° - \alpha - 180° + \theta) = \frac{1}{2}(\theta - \alpha)$

$\therefore$ শেষ নতি (bearing) $= \angle NOQ = \angle NOP + \angle POQ$

$= \alpha + \frac{1}{2}(\theta - \alpha) = \frac{1}{2}(\theta + \alpha)$.

এক্ষণে, $OQ^2 = OP^2 + PQ^2 - 2PO.PQ \cos \angle OPQ$

$= m^2 + m^2 - 2m^2 \times -\cos(\theta - \alpha)$

$= 2m^2 + 2m^2 (\cos(\theta - \alpha) = 2m^2\{1 + \cos(\theta - \alpha)\}$

$= 2m^2 . 2\cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \alpha) = 4m^2 . \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \alpha)$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= OQ = 2m \cos \frac{\theta - \alpha}{2}$.

উদা. 2. A man observes the elevation of a hill top to be 15° but after walking a mile directly towards it on level

ground finds the elevation to be 75°. Find the height of the hill.

মনে কর, PM পাহাড়টি AM ভূমির উপর অবস্থিত এবং AM এর উপর A ও B বিন্দুতে উহার শীর্ষের (P বিন্দুর) উন্নতি যথাক্রমে 15° ও 75°. অতএব, $\angle A = 15°$ এবং $\angle PBM = 75°$,

সুতরাং $\angle APB = 75° - 15° = 60°$.

(চিত্র 22)

মনে কর, PM এর উচ্চতা h এবং এখানে AB = 1 মাইল।

এক্ষণে, $PM = PB \sin 75°$, অর্থাৎ $h = PB \sin 75°$.

আবার, $\triangle APB$ হইতে $\dfrac{PB}{\sin 15°} = \dfrac{AB}{\sin 60°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ মা. $= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ মা.

$$\therefore \quad PB = \frac{2 \sin 15°}{\sqrt{3}} \text{ মা.} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ মা.} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \text{ মা.}$$

$$\therefore \quad h = PB \sin 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ মাইল} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ মা.}$$

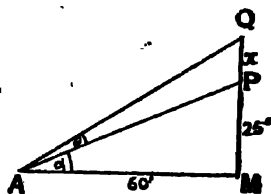
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 1760 \text{ গজ} = \frac{880}{\sqrt{3}} \text{ গজ} = 880\sqrt{3} \text{ ফুট।}$$

উদা. 3. A flagstaff standing on the top of a pillar 25 ft. high subtends an angle whose tangent is ·125 at a point 60 ft. from the foot of the pillar. Find the height of the flagstaff.

মনে কর, PM স্তম্ভের উপর PQ পতাকা অবস্থিত এবং উহা যেন M হইতে 60 ফুট দূরে A বিন্দুতে θ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

দেওয়া আছে যে, $\tan \theta = ·125 = \frac{1}{8}$, $PM = 25$ ফুট ও $AM = 60$ ফুট।

মনে কর, $PQ = x$ ফুট এবং $\angle PAM = \alpha$.

(চিত্র 23)

একণে, $\tan\alpha = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$ এবং

$AP^2 = (60)^2 + (25)^2$, $\therefore AP = \sqrt{3600+625} = \sqrt{4225} = 65$ ফু.।

অতএব, $QM = AM \tan(\theta+\alpha) = 60 \tan(\theta+\alpha)$

$$= 60 \times \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha} = \frac{60(\frac{1}{8}+\frac{5}{12})}{1-\frac{1}{8}\times\frac{5}{12}} = 34\tfrac{2}{7} \text{ ফুট।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $PQ = QM - PM = (34\frac{2}{7} - 25)$ ফু. $= 9\frac{2}{7}$ ফুট।

উদা. 4. From a point on the horizontal plane, the elevation of the top of a hill is 45°. After walking 300 yards towards its summit up a slope inclined at an angle of 15° to the horizon the elevation is 75°. Find the height of the hill.

মনে কর, PM পাহাড়ের উচ্চতা h, A বিন্দুতে P এর উন্নতি 45°. ভূমি AM এর সহিত 15° কোণে নত চড়াইপথ AB ধরিয়া A হইতে 300 গজ দূরে B বিন্দুতে P এর উন্নতি কোণ হইয়াছে 75°. h নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, $BN \perp PM$, সুতরাং $BN \parallel RM$.

অতএব, $\angle PBN = \angle PRM = 75°$, এবং

$\angle PAB = 45° - 15° = 30°$,

$\angle APB = 75° - 45° = 30°$,

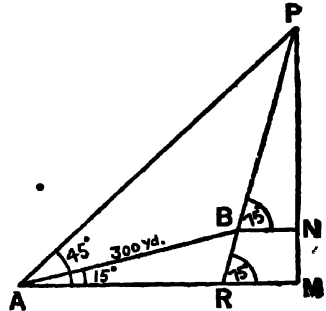
$\therefore \angle ABP = 180° - (30° + 30°) = 120°$,

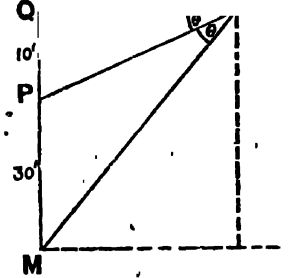
(চিত্র 24)

একণে, $h = PM = PA \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} PA$.

আবার, $\triangle PAB$ হইতে $\frac{PA}{\sin 120°} = \frac{AB}{\sin 30°}$,

$$\therefore PA = \frac{AB \sin 120°}{\sin 30°} = \frac{300 \text{ গ.} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 300\sqrt{3} \text{ গজ}$$

$$\therefore h = \frac{1}{\sqrt{2}} PA = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 300\sqrt{3} \text{ গ.} = 150\sqrt{6} \text{ গজ।}$$

উদা. 5. A statue 10 ft. high stands on a pillar 30 ft. high. To an observer on a level with the top of the statue, the pillar and the statue subtend equal angles. Find the distance of the observer from the top of the statue.

মনে কর, 30 ফুট উচ্চ PM স্তম্ভের উপর PQ প্রতিমূর্তির উচ্চতা 10 ফুট। ভূমিতল হইতে Q ও A বিন্দুর উচ্চতা সমান এবং দর্শকটি A বিন্দুতে আছে। যদি $\angle PAQ = \angle PAM$ হয়, তবে AQ দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, $AQ = d$ এবং $\angle PAQ = \theta$.

এখন, $\because$ $\angle QAM$ এর সমদ্বিখণ্ডক AP,

$$\therefore \frac{AM}{AQ} = \frac{PM}{PQ} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1},$$

$$\therefore AM = 3AQ = 3d.$$

(চিত্র 25)

আবার, $\because$ $\angle Q$ এক সমকোণ, $\therefore$ $AM^2 = QM^2 + AQ^2$,

বা, $(3d)^2 = 40^2 + d^2$, বা, $8d^2 = 1600$,

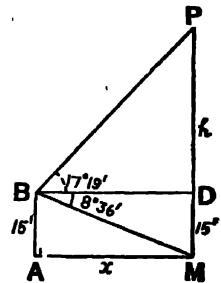
বা, $d^2 = 200$, $\therefore$ $d = 10\sqrt{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 10\sqrt{2}$ ফুট।

উদা. 6. A person whose eye is 15 ft. above the ground finds that the angle of elevation of the top of a post is 17°19′ and the angle of depression of the foot of the post is 8°36′. Find the height of the post and its distance from the person.

মনে কর, PM খুঁটির উচ্চতা h ফুট, দর্শকের চক্ষু ভূমি হইতে 15 ফুট উচ্চে B বিন্দুতে অবস্থিত এবং B বিন্দু হইতে P এর উন্নতি কোণ 17°19′ ও M এর অবনতি কোণ 8°36′. উচ্চতা h এবং দূরত্ব AM ($= x$) নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র 26)

মনে কর, $BD \perp PM$, সুতরাং $BD = x$, $DM = AB = 15'$ এবং $\angle PBD = 17°19'$, ও $\angle MBD = 8°36'$.

এখানে $\tan 17^\circ 19' = \frac{PD}{BD} = \frac{h-15}{x}$, $\therefore\ x = \frac{h-15}{\tan 17^\circ 19'}$.

আবার, $\tan 8^\circ 36' = \frac{DM}{BD} = \frac{15}{x}$, $\therefore\ x = \frac{15}{\tan 8^\circ 36'}$,

$$\therefore\ \frac{h-15}{\tan 17^\circ 19'} = \frac{15}{\tan 8^\circ 36'},\ \text{বা},\ h-15 = 15 \times \frac{\tan 17^\circ 19'}{\tan 8^\circ 36'}$$

বা, $h - 15 = \frac{15 \times \cdot 31179}{\cdot 15123}$ [লগ তালিকা হইতে] $= 30\cdot 9$,

$\therefore\ h = 30\cdot 9 + 15 = 45\cdot 9$, সুতরাং নির্ণেয় উচ্চতা $= 45\cdot 9$ ফুট।

আবার, নির্ণেয় দূরত্ব $= x = \frac{15}{\tan 8^\circ 36'} = \frac{15}{\cdot 15123}$ ফু. $= 99\cdot 2$ ফুট।

উদা. 7. The shadow of a pillar 106 ft. high is 53 ft. on the horizontal plane on which it stands. Find the sun's altitude, having given L tan $63^\circ 26' = 10\cdot 3009994$, diff. for $1' = 3159$ and log $2 = \cdot 3010300$.

মনে কর, PM স্তম্ভের ছায়া AM এবং A বিন্দুতে সূর্য্যের উন্নতি কোণ θ. θ-র মান নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে, $\tan \theta = \frac{106}{53} = 2$,

$\therefore$ L $\tan \theta = \log 2 + 10 = 10\cdot 3010300$,

কিন্তু L $\tan 63^\circ 26' = 10\cdot 3009994$

$\therefore$ অন্তর $= 306$

আবার, 3159 অন্তর হয় $1'$ বা $60''$ এর জন্য

$\therefore$ 306 „ „ $\frac{60''}{3159} \times 306$ বা $5\cdot 8''$ এর জন্য

$\therefore$ L $\tan \theta = $ L $\tan 63^\circ 26' 5\cdot 8''$, $\therefore\ \theta = 63^\circ 26' 5\cdot 8''$.

উদা. 8. The angle of elevation of an aeroplane from a point 200 ft. above a lake is 45° and the angle of depression of its reflection is 75°. Find the height of the aeroplane above the surface of the lake. Assume that the image is

vertically below the aeroplane at a depth below the lake-surface equal to the height above the surface.

[B. H. U. '43]

মনে কর, P একটি উড়োজাহাজ এবং হ্রদের জলে উহার প্রতিবিম্ব P', জলের তল BC. এখানে PCP' উল্লম্ব রেখা এবং PC = CP'. A বিন্দু জলতল হইতে 200 ফুট উচ্চে অবস্থিত অর্থাৎ AB = 200 ফুট। A বিন্দুতে P এর উন্নতি-কোণ = 45° এবং P' এর অবনতি-কোণ 75°. CP নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, $AM \perp PP'$, সুতরাং $\angle PAM = 45°$ এবং $\angle MAP' = 75°$. আর, MC = AB = 200 ফুট।

এক্ষণে, $MP = AM \tan 45°$ এবং

$MP' = AM \tan 75°$.

(চিত্র 27)

$$\therefore \quad \frac{MP'}{PM} = \frac{AM \tan 75°}{AM \tan 45°} = \frac{\tan 75°}{\tan 45°}$$

$$\therefore \quad \frac{MP' + PM}{MP' - PM} = \frac{\tan 75° + \tan 45°}{\tan 75° - \tan 45°} = \frac{\sin (75° + 45°)}{\sin (75° - 45°)}$$

$$= \frac{\sin 120°}{\sin 30°} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

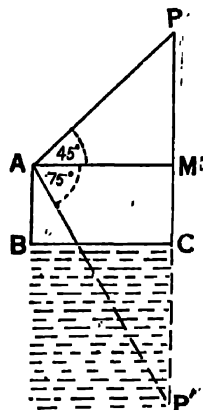
আবার, $MP' + PM = PP' = 2CP$,

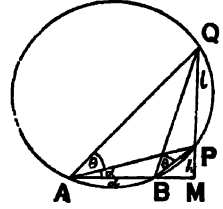
এবং $MP' - PM = MC + CP' - PM$

$= MC + (MC + PM) - PM = 2MC$.

অতএব, $\frac{2CP}{2CM} = \sqrt{3}$, বা $\frac{CP}{CM} = \sqrt{3}$, বা $\frac{CP}{200} = \sqrt{3}$,

$\therefore \quad CP = 200\sqrt{3}. \quad \therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= 200\sqrt{3}$ ফুট।

উদা. 9. A flagstaff is fixed on the top of a tower standing on a horizontal plane. An observer walking directly towards the foot observes the angle subtended by the flagstaff from two positions on his path to be the same

namely θ. The distance between the two positions is d, and the angle subtended by the tower at his first position is α. Find the height of the tower and the length of the flagstaff.

মনে কর, PM একটি tower, উহার উপর PQ একটি পতাকাদণ্ড, এবং A ও B পর্য্যবেক্ষণ স্থানে PQ এর সম্মুখ কোণ θ অর্থাৎ $\angle PAQ = \angle PBQ = \theta$. A বিন্দুতে PM এর সম্মুখকোণ α এবং $AB = d$ হইলে PM ও PQ নির্ণয় করিতে হইবে।

(চিত্র 28)

মনে কর, $PM = h$ এবং $PQ = l$.

$\because$ PQ এর একই পার্শ্বে A ও B বিন্দুতে সম্মুখকোণ দুইটি সমান (প্রত্যেকটি $= \theta$ বলিয়া),

$\therefore$ A, B, P ও Q একই বৃত্তস্থ।

অতএব, ABPQ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃস্থ $\angle PBM = \angle AQP$ $= 90^\circ - \angle QAM = 90^\circ = (\theta + \alpha)$.

এক্ষণে, $d = AB = AM - BM = PM \cot PAM - PM \cot PBM$

$$= h \cot \alpha - h \cot \{90^\circ - (\theta + \alpha)\}$$

$$= h\{\cot \alpha - \tan(\theta + \alpha)\}$$

$$= h \left\{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin (\theta + \alpha)}{\cos (\theta + \alpha)}\right\}$$

$$= h \left\{\frac{\cos \alpha \cos (\theta + \alpha) - \sin \alpha \sin (\theta + \alpha)}{\sin \alpha \cos (\theta + \alpha)}\right\}$$

$$= h \frac{\cos (\theta + 2\alpha)}{\sin \alpha \cos (\theta + \alpha)},$$

$\therefore$ নির্ণেয় $h = d \sin \alpha \cos (\theta + \alpha) \sec (\theta + 2\alpha)$.

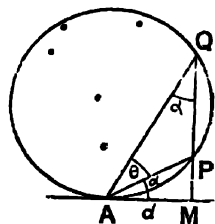
আবার, $\triangle APQ$ হইতে পাই $\dfrac{l}{\sin \theta} = \dfrac{AP}{\sin AQP} = \dfrac{h \operatorname{cosec} \alpha}{\sin \{90^\circ - (\theta + \alpha)\}}$

$$= \frac{h}{\sin \alpha \cos (\theta + \alpha)}$$

$$\therefore \quad l = \frac{h \sin \theta}{\sin \alpha \cos (\theta + \alpha)} = d \sin \theta \sec (\theta + 2\alpha)$$

[h এর মান বসাইয়া].

উদা. 10. A man, walking towards a building on which a flagstaff is fixed, observes the angle subtended by the flagstaff to be the greatest when he is at a distance of d from the building. If θ be the observed greatest angle, find the length of the flagstaff and the height of the building. [P. U. '41]

মনে কর, PM একটি অট্টালিকা এবং উহার উপর অবস্থিত PQ একটি পতাকাদণ্ড। PM হইতে A বিন্দুর দূরত্ব যেন d, সুতরাং সর্ত অনুসারে A বিন্দুতে PQএর সম্মুখকোণ বৃহত্তম (অর্থাৎ AMএর উপর যে কোন বিন্দুতে PQএর সম্মুখ কোণ θ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর)। PQ ও PM নির্ণয় করিতে হইবে। জ্যামিতির সাহায্যে জানা যায় যে, P, Q ও A বিন্দুত্রয় দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি যদি AMকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবেই AM এর উপর A বিন্দুতে PQএর সম্মুখ কোণটি বৃহত্তম হইবে।

(চিত্র 29)

মনে কর, $\angle PAM = \alpha$, সুতরাং $\angle AQP = \angle PAM = \alpha$.

$\because \angle QAM + \angle AQM = 90^\circ$, $\therefore \theta + 2\alpha = 90^\circ$.

এক্ষণে, $PQ = MQ - PM = AM \tan QAM - AM \tan PAM$

$$= d \tan(\theta+\alpha) - d \tan \alpha = d\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right\}$$

$$= d\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha}\right\}$$

$$= d\frac{\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha} = d\frac{2\sin\theta}{2\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha}$$

$$= \frac{2d\sin\theta}{\cos(\theta+2\alpha)+\cos\theta} = \frac{2d\sin\theta}{\cos 90^\circ + \cos\theta}$$

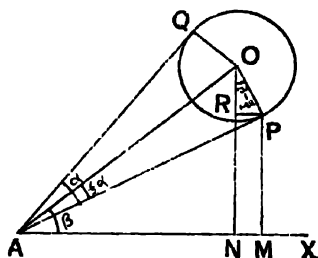
[$\because \theta + 2\alpha = 90^\circ$]

$$= \frac{2d\sin\theta}{\cos\theta} \; [\because \cos 90^\circ = 0] = 2d\tan\theta.$$

আবার, $\because \quad \theta+2\alpha=90^\circ$, $\quad \therefore 45^\circ-\frac{1}{2}\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$.

$$PM=d\tan\alpha=d\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

উদা. 11. A spherical balloon whose radius is r feet subtends at an observer's eye an angle α, when the angular elevation of its centre is β. Determine the height of the centre of the balloon. [C. U. '53]

মনে কর, A দর্শকের চক্ষু এবং A বিন্দু দিয়া অনুভূমিক সরলরেখা AX. মনে কর, গোলকটির কেন্দ্র O, সুতরাং $\angle OAX=\beta$. যদি A বিন্দু হইতে গোলকটির (বৃত্তটির) AP ও AQ দুইটি স্পর্শক হয়, তবে PAQ কোণটি A বিন্দুতে গোলকের সম্মুখ কোণ হইবে।

(চিত্র 30)

অতএব, $\angle PAQ=\alpha$,

$\therefore \quad \angle PAO=\frac{1}{2}\angle PAQ=\frac{1}{2}\alpha$.

$PM\perp AX$, $ON\perp AX$ এবং $PR\perp ON$ টান।

এক্ষণে, গোলকের কেন্দ্রের উচ্চতা $=ON=OR+RN=OR+PM$

$=OP\cos POR+AP\sin PAM$

$=r\cos(\beta-\frac{1}{2}\alpha)+OP\cot OAP\sin PAM$

$[\because \quad \angle OPA=90^\circ]$

$=r\cos(\beta-\frac{1}{2}\alpha)+r\cot\frac{1}{2}\alpha\sin(\beta-\frac{1}{2}\alpha)$

$=\dfrac{r}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos(\beta-\frac{1}{2}\alpha)+\cos\frac{1}{2}\alpha\sin(\beta-\frac{1}{2}\alpha)\}$

$=\dfrac{r\sin\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

Exercise 17

1. A man walks one mile bearing an angle ϕ_1 with a fixed direction, and then another mile bearing ϕ_2 with the same direction. Find (*a*) his final distance from the starting point and (*b*) the final bearing. [C. U. '50]

2. PQ is a line 1000 yds. long; Q is due north of P and

from P a distant point R bears 70° east of north ; at P it bears 41°22′ east of north. Find the distance from P to R.

3. The elevation of a tower due north of a point A is θ and at a point B due west of A is ϕ, Show that its altitude is $\dfrac{AB \sin\theta \sin\phi}{\sqrt{(\sin^2\theta - \sin^2\phi)}}$. [P.U. '38 Sup.]

4. A person walking along a straight road observes that at two consecutive milestones the angles of elevation of a hill in front of him are 30° and 75° ; find the height of the hill.

5. The upper two-thirds of a ship's mast subtends at a point on the deck an angle whose tangent is ·5. Find the tangent of the angle subtended by the other part of the mast at the point.

6. A post standing on a wall subtends an angle whose tangent is $\frac{3}{5}$ at a pt. on the ground and the ratio of their heights is 3 : 1. Find the tangent of the angle of elevation of the top of the post at the point.

7. From an aeroplane vertically over a straight horizontal road, the angles of depression of two consecutive milestones on the opposite sides of the aeroplane are observed to be α and β. Show that the height in miles of the aeroplane above the road is given by $\dfrac{\tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$.

8. The altitude of a hill is observed to be 43° and after walking 500 ft. towards it up a slope inclined at 28° to the horizon the altitude is 73°. Find the vertical height of the hill above the first point of observation, given sin 43° = ·682.

9. The upper half of a pole, seen from a point on a level with the foot of the pole, subtends an angle whose tangent is $\frac{1}{3}$. Find the tangent of the angle subtended at the same point by the whole post. [B. H. U. '42]

10. A statue 6 ft. high stands on a column 10 ft. high. To an observer on a level with the top of the statue, the column and statue subtend equal angles. Find the distance of the observer from the top of the statue.

11. A light post on a pillar 20 ft. high subtends an angle of $\frac{\pi}{4}$ at a point on the ground and it also subtends the same angle at a point which is 20 feet nearer to the pillar. Find the height of the lightpost.

12. Determine the height of a mountain if the elevation of its top at an unknown distance from the base is 28° and at a distance 3 miles 77 yards further off from the mountain along the same line the elevation is 16°; given log 1·6071 = ·2060, L sin 12° = 9·3179, L sin 16° = 9·4403 and L sin 28° = 9·6716.

13. A post is fixed on the top of a wall standing on a horizontal plane. A person finds that the angles subtended at a point on the plane by the wall and the post are 15° and 30°. He then walks 200 feet directly towards the wall and finds that the post again subtends an angle 30°. Find the heights of the wall and the post.

14. A tower subtends an angle α at a point P on the same level as the foot of the tower, and at a second point Q, which is h feet vertically above P, the depression of the foot of the tower is β. Find the height of the tower.

[C. U. '50]

15. The elevation of a hill at a place A due East of it is 45°, at a place B due South of A the elevation is 30°. If the distance AB is 500 yards, find the height of the hill.

16. An object is observed from 3 points A, B, C lying in a horizontal straight line which passes directly underneath the object. The angular elevation at B is twice that at A

and at C three times that at A ; if AB $=a$, BC $=b$, show that the height of the object is $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$.

17. A temple 50 yds, high stands on a hill 80 ft. high. At what point on the plane passing through the foot of the hill should an observer stand so that the temple and the hill may subtend equal angles, the height of his eye being 5 feet ?

18. The angular altitude of a lighthouse from a point on the shore is 12°32′, and from a point 500 feet nearer the altitude is 26°34′. Find its height above the sea-level.

19. The angles of elevation of an aeroplane from two stations a mile apart and from a point half-way between the two are 60°, 30° and 45° respectively. Find the height of the aeroplane.

20. Two towers stand on a horizontal plane and their distance apart is 120 ft. A person standing successively at the bases observes that the angular elevation of one is double that of the other, but when halfway between them, their elevations appear to be complementary. Show that the heights are 90 ft. and 40 ft. respectively. [P.U. '39 Sup.]

21. A tower stood at the foot of a plane inclined to the horizon at 12°. At a point 1000 ft. straight up the incline from the foot of the tower, the tower subtended an angle of 57°. Find the height of the tower having given log 2 = ·30103, log 11·857 = 1·074105 and L sin 57° = 9.92359.

22. The angles of depression of two objects 360 ft. apart from the top of a hill are 27°12′ and 18°24′ respectively. Find the height of the hill, assuming the objects and the top of the hill are in the same vertical plane.

[Given, log 360 = 2·5563, log 339·4 = 2·5308,
log sin 27°12′ = $\bar{1}$·6600, log sin 18°24′ = $\bar{1}$·4992,
log sin 8°48′ = $\bar{1}$·1847] [C. U. '58].

• 23. The angle of elevation of the top of a tower AB from a station P due south of it (and on the same level with the base A of the tower) is θ ; from another station Q due west of the former, the elevation is ϕ. If a is the distance between the stations, show that $h^2 = \dfrac{a^2}{\cot^2 \phi - \cot^2 \theta}$.

24. The angle of elevation of a balloon from a point h feet above a lake is ϕ and the angle of depression of its reflection in the lake is θ. Prove that the height of the balloon above the lake is $h \dfrac{\sin (\theta + \phi)}{\sin (\theta - \phi)}$ assuming that the image is vertically as much below the surface as the balloon is above it. [U. P. B.]

25. At each end of a horizontal base of length $2a$ it is found that the angular height of a certain peak is θ and that at the middle point it is Φ. Prove that the vertical height of the peak is $\sqrt{\dfrac{a \sin \theta \sin \phi}{\sin (\phi + \theta) \sin (\phi - \theta)}}$. [U. P. B. '55 ; P. U. 40]

26. The angles of elevation of a bird flying in a horizontal straight line from a fixed point at four successive observations are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. The observations being taken at equal intervals of time. Assuming the speed of the bird to be uniform, show that $\cot^2 \alpha - \cot^2 \delta = 3 (\cot^2 \beta - \cot^2 \gamma)$. [P. U. '41]

27. The elevation of a steeple at a place due south of it is 45°, and at another place due west of the former place the elevation is 30°. If the distance between the two places be a, find the height of the steeple.

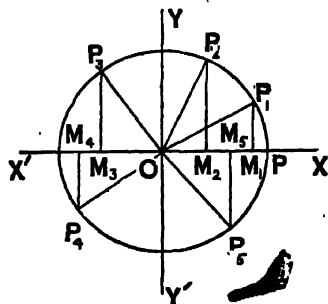
28. A person walking along a straight road observes that the greatest angle which two objects subtend is α. From the spot he walks a distance c and the objects now appear as one, their direction making an angle β with the road. Shew that the distance between the objects is $\dfrac{2c \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$.

29. On the bank of a river is a column 200 ft. high supporting a statue 30 ft. high. To an observer on the opposite bank with his eye on the level of the ground the statue subtends an angle equal to that subtended by a man 6 ft. high standing at the base of the column ; determine the breadth of the river.

Changes in the Trigonometrical Ratios

119. কোন অংশের মান $0°$ হইতে ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে তাহার কোণানুপাতগুলির কিরূপ পরিবর্তন হয় তাহা আলোচনা করা হইতেছে।

(চিত্র 31)

মনে কর, XOX′ ও YOY′ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং O-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ (OP) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইয়াছে। এখানে OP ব্যাসার্ধটি কোণ-উৎপাদকরেখা, কারণ উহাই ক্রমশঃ OX হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে ঘুরিয়া বিভিন্ন কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। OP যখন প্রথমে OX এর সহিত সমাপতিত ছিল, তখন XOP কোণের পরিমাণ ছিল $0°$. ক্রমশঃ উহা বিভিন্ন স্থানে আসিয়া POP_1, POP_2 প্রভৃতি ধনাত্মক কোণগুলি উৎপন্ন করিতে থাকিল। অতএব $OP = OP_1 = OP_2 = \cdots =$ ব্যাসার্ধ এবং OP, OP_1 প্রভৃতি সতত ধনাত্মক। P_1M_1, $P_2M_2 \cdots$ প্রভৃতি XOX′ এর উপর লম্বপাত করা হইল। প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে উহারা ধনাত্মক এবং অপর দুই পাদে ঋণাত্মক। OM_1, OM_2, OM_5 ধনাত্মক এবং OM_3, OM_4 ঋণাত্মক। এ সম্বন্ধে পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে।

120. কোণের সাইনের পরিবর্তন (Changes in Sine).

সাইন $= \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, যখন $\angle XOP = 0^\circ$, তখন P হইতে OX এর উপর লম্বটি (PM) শূন্য এবং অতিভুজ OP, সুতরাং তখন $\sin XOP = 0$. এক্ষণে কোণটি যখন ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকিবে তখন লম্ব P_1M_1 ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু অতিভুজটি সতত OP-র সমান হইবে এবং উভয়ই ধনাত্মক হইবে। অতএব, কোণটির সাইন ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইবে। $\angle XOP$ কোণটি যখন 90° হইবে, তখন উহার অতিভুজ (OP) ও লম্ব (PM) OY এর সহিত সমাপতিত হইবে এবং তখন লম্ব ও অতিভুজ সমান হওয়ায় কোণটির সাইন 1 হইবে। ইহাই $\sin \angle XOP$ এর বৃহত্তম মান।

আবার, যদি কোণটি 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকে, তবে, অতিভুজ (OP) একই থাকিবে, কিন্তু লম্বটি (PM) ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে, কিন্তু ধনাত্মক থাকিবে। অতএব, কোণটির সাইন ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। এইভাবে, যখন $\angle XOP = 180^\circ$ হইবে, তখন OP রেখা OX′ এর সহিত মিলিত হইবে. কিন্তু লম্বটি (PM) শূন্য হইবে। তখন কোণটির সাইনের মান [illegible]হইবে। অতএব, কোণটি 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকিলে উহার সাইন 1 হইতে ক্রমশঃ হ্রাস পাইয়া শূন্য হইবে।

এখন যদি কোণটি ক্রমশঃ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকে তবে লম্বটি (PM) ক্রমশঃ শূন্য হইতে বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু ঋণাত্মক হইবে। অতএব, কোণটির সাইনের সাংখ্যমান ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু উহা ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং প্রকৃতপক্ষে উহার মান ক্রমশঃ 0 হইতে কমিতে থাকিবে। অতিভুজ OP যখন OY′ এর সহিত মিলিবে অর্থাৎ কোণটি $= 270^\circ$ হইবে তখন লম্বটিও (PM) OY′ এর সহিত মিলিত হইয়া OP-র সমান হইবে। তখন কোণটির (270°) সাইন -1 হইবে। অতএব, কোণটি ক্রমশঃ 180° হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 270° হইলে, উহার সাইনের মান ক্রমশঃ 0 হইতে -1 পর্য্যন্ত কমিবে।

চতুর্থ পাদে কোণটি যখন 270° হইতে ক্রমশঃ বাড়িয়া 360° হইবে, তখন লম্বটি ঋণাত্মক থাকিয়া ক্রমশঃ কমিয়া (OP হইতে) 0 হইবে, সুতরাং কোণটির সাইনের সাংখ্যমান ক্রমশঃ কমিয়া 1 হইতে 0 হইবে অর্থাৎ প্রকৃতপক্ষে উহা বৃদ্ধি পাইয়া -1 হইতে 0 (শূন্য) হইবে।

এস্থলে কোন কোণের (মনে কর θ) সাইনের পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করিয়া যাহা জানা গেল তাহার সংক্ষিপ্তসার নিম্নে দেওয়া হইল :

θ কোণটি 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\sin\theta$ ক্রমশঃ
0 হইতে 1 পর্য্যন্ত বাড়িবে।

θ ক্রমশঃ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\sin\theta$ ক্রমশঃ
1 হইতে 0 পর্য্যন্ত কমিবে।

θ, 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\sin\theta$ ক্রমশঃ
0 হইতে কমিয়া -1 হইবে।

এবং θ, 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\sin\theta$ ক্রমশঃ
-1 হইতে বাড়িয়া 0 হইবে।

121. কোণের কোসাইনের পরিবর্তন (Changes in Cosine).

কোসাইন $=\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$. 119 অনুচ্ছেদে দেখা যায় যে, প্রথম পাদে কোণ $\angle XOP$ ক্রমশঃ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত যত বাড়িবে, উহার ভূমি (OM) ক্রমশঃ তত কমিবে (চিত্রে OM_1, OM_2, প্রভৃতি দেখ) কিন্তু উহার অতিভুজ (OP) একই থাকিবে এবং দুইটিই ধনাত্মক হইবে। অতএব কোণটির কোসাইন ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। যখন $\angle XOP=0^\circ$, তখন ভূমি (OM) ও অতিভুজ (OP) সমান, সুতরাং তখন কোণটির কোসাইন 1 এবং যখন $\angle XOP=90^\circ$, তখন OP ও OY সমাপতিত বলিয়া ভূমির (OM) মান তখন 0, সুতরাং কোণটির কোসাইন তখন 0. অতএব, কোণটি ক্রমশঃ 0° হইতে 90° হইলে, উহার কোসাইন ক্রমশঃ কমিয়া 1 হইতে 0 হইবে।

দ্বিতীয় পাদে কোণটি 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত যত বাড়িবে, ভূমি (OM) তত বাড়িবে, সুতরাং উহার কোসাইনের সাংখ্যমান বাড়িবে কিন্তু ঋণাত্মক হইবে এবং উহা 180° হইলে ভূমি ও অতিভূজ সমান হইবে। অতএব, কোণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, উহার কোসাইন ক্রমশঃ 0 হইতে কমিয়া −1 হইবে।

তৃতীয় পাদে, কোণটি বাড়িলে ভূমি ঋণাত্মক থাকিবে, কিন্তু ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে এবং কোণটি 270° হইলে ভূমির মান 0 হইবে। অতএব, কোণটি 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত যত বাড়িবে, উহার কোসাইন ক্রমশঃ তত বাড়িয়া −1 হইতে 0 হইবে। (এখানে কোসাইনের সাংখ্যমান কমিতেছে, কিন্তু মানটি ঋণাত্মক বলিয়া উহার প্রকৃত মান বাড়িতেছে)।

আবার, চতুর্থপাদে ভূমি (OM) ধনাত্মক হইবে এবং ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে, কোণটি যখন 360° তখন ভূমি OM = অতিভূজ PO, সুতরাং কোণটির কোসাইন 1. অতএব, কোণটি 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত যত বাড়িবে, উহার কোসাইন 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত তত বাড়িবে।

সংক্ষিপ্তসার :—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ 1 হইতে 0 পর্য্যন্ত কমিবে ;

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে −1 পর্য্যন্ত কমিবে ;

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ −1 হইতে 0 পর্য্যন্ত বাড়িবে ;

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত বাড়িবে।

122. কোণের ট্যান্জেণ্টের পরিবর্তন (Changes in the tangent) :

ট্যান্জেণ্ট $= \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$. প্রথম পাদে কোণ যত বাড়িবে, লম্ব (PM) তত বাড়িবে, ভূমি (OM) তত কমিবে এবং উভয়ই ধনাত্মক হইবে। অতএব কোণটির tangent ক্রমশঃ বাড়িবে।

কোণ 0° হইলে OP ও OX সমাপতিত বলিয়া তখন লম্ব $=0$ এবং ভূমি $=$ OP,

সুতরাং কোণটির tangent $= \frac{0}{OP} = 0$.

আবার কোণটি 90° হইলে OP ও OY সমাপতিত বলিয়া লম্বটি $=$ OP এবং ভূমি $=0$, সুতরাং $\tan 90^\circ = \frac{OP}{0} = \infty$. অতএব, প্রথম পাদে কোণের tangent ক্রমশঃ 0 হইতে ∞ পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকে।

দ্বিতীয়পাদে লম্বটি (PM) ক্রমশঃ কমিবে এবং ভূমি ক্রমশঃ বাড়িবে, কিন্তু ভূমি ঋণাত্মক হইবে। এখানে দেখা যাইতেছে যে, কোণোৎপাদক রেখা OP যেইমাত্র OY কে অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয়পাদে প্রবেশ করে, তখনই উহার মান একেবারে ∞ হইতে $-\infty$ হইয়া যায়। এখানে tangent এর মানের ক্রমের হঠাৎ ছেদ হয় অর্থাৎ হঠাৎ উহা ধনাত্মক অসীম হইতে ঋণাত্মক অসীম হইয়া যায়। কোণটি 180° হইলে OP ও OX′ মিলিত হওয়ায় লম্বটি তখন শূন্য এবং ভূমি $=$ OP, সুতরাং উহার tangent $=0$. অতএব, দ্বিতীয়পাদে কোণের tangent এর সাংখ্যমান ক্রমশঃ ∞ হইতে 0 পর্য্যন্ত কমে অর্থাৎ প্রকৃতপক্ষে উহা ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত বাড়ে।

তৃতীয়পাদে লম্বটি ক্রমশঃ বাড়ে, ভূমিটি ক্রমশঃ কমে এবং উভয়ই ঋণাত্মক হওয়ায় tangentটি ধনাত্মক হয়। কোণটি যখন 270° হয়, তখন OP ও OY′ মিলিত হওয়ায় ভূমি $=0$ এবং লম্ব $=$ OP, সুতরাং tangent $270^\circ = \frac{OP}{0} = \infty$. অতএব, তৃতীয়পাদে কোণের tangent 0 হইতে ∞ বাড়িতে থাকে।

চতুর্থপাদে ভূমিটি ধনাত্মক কিন্তু লম্বটি ঋণাত্মক, সুতরাং tangent ঋণাত্মক হয়। আবার, এই পাদে লম্বটি ক্রমশঃ ছোট হয় এবং ভূমিটি ক্রমশঃ বড় হয়, সুতরাং tangent এর সাংখ্যমান কমিতে থাকে। এখানে দেখ কোণোৎপাদক রেখা OP যেইমাত্র OY′ রেখা অতিক্রম করিল অর্থাৎ কোণটি যেই মাত্র 270° অতিক্রম করিল, তখনই উহার মান ∞ হইতে $-\infty$ হইল। অতএব, এস্থলেও কোণের tangent মানের হঠাৎ ছেদ

হইতেছে। কোনটি যখন 360° হয়, তখন OP ও OX মিলিত হয় এবং লম্ব (PM) তখন শূন্য হয়, আর ভূমি হইয়া যায় OP-র সমান। সুতরাং $\tan 360° = \frac{0}{OP} = 0$. অতএব, চতুর্থপাদে কোণের tangent ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

সংক্ষিপ্তসার ঃ—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে ∞ পর্য্যন্ত বাড়ে, এবং তারপরই $\tan\theta$র মান $-\infty$ হয়।

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত বাড়ে ;

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে ∞ পর্য্যন্ত বাড়ে, এবং তার পরই $\tan\theta$র মান হঠাৎ $-\infty$ হয় ;

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\tan\theta$ ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত বাড়ে।

123. Cotangent এর পরিবর্তন।

cot θর মান $\tan\theta$র মানের অন্যোন্যক, অর্থাৎ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, সুতরাং $\tan\theta$র পরিবর্তন হইতে $\cot\theta$র পরিবর্তন জানা যায়। অতএব সংক্ষেপে বলা যায় :—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িলে $\cot\theta$ ক্রমশঃ ∞ হইতে 0 পর্য্যন্ত কমে ;

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\cot\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত কমে এবং তারপরই $\cot\theta$ হঠাৎ $+\infty$ হয় ;

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িলে, $\cot\theta$ ক্রমশঃ ∞ হইতে 0 পর্য্যন্ত কমে ;

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িলে $\cot\theta$ ক্রমশঃ 0 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত কমে, এবং তারপরই $\cot\theta$ হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া থাকে।

124. Secant এর পরিবর্তন।

cos θর অন্যোন্যক sec θ, সুতরাং cos θ-র পরিবর্তন হইতে sec θ-র পরিবর্তন নির্ণয় করা যায়।

সংক্ষেপে ঃ—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িলে, sec θ ক্রমশঃ 1 হইতে ∞ পর্য্যন্ত বাড়ে এবং তারপরই উহা হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ হইয়া থাকে ;

θ কোণ 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, sec θ ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে -1 পর্য্যন্ত বাড়ে ;

θ কোণ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িলে, sec θ ক্রমশঃ -1 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত কমে এবং তারপরই উহা হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া থাকে ;

এবং θ কোণ 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িলে, sec θ ক্রমশঃ ∞ হইতে কমিয়া 1 হয়।

125. Cosecant এর পরিবর্তন।

sin θ-র অন্যোন্যক cosec θ, সুতরাং sin θ এর পরিবর্তন হইতে cosec θ-র পরিবর্তন পাওয়া যায়। সংক্ষেপে ঃ—

θ কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশঃ ∞ হইতে 1 পর্য্যন্ত কমে ;

কোণটি 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশঃ 1 হইতে ∞ পর্য্যন্ত বাড়ে এবং তারপরই হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$ হইয়া থাকে ;

কোণটি 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে -1 পর্য্যন্ত বাড়ে ;

এবং কোণটি 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িলে, cosec θ ক্রমশঃ -1 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত কমে এবং তারপরই উহা হঠাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ হইয়া থাকে।

126. কোণোৎপাদকরেখা OP যদি 360° কোণ উৎপাদন করার পর আরও আবর্তিত হয় অর্থাৎ θ কোণটি যদি আরও বাড়িতে থাকে, তবে, তাহার কোণানুপাতগুলির একইভাবে পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে। কারণ, কোন কোণের মান 360°-র কোন গুণিতক বৃদ্ধি পাইলে তাহার কোণানুপাতগুলি একই থাকে। সেইজন্য এইগুলিকে পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic Functions) বলা হয়।

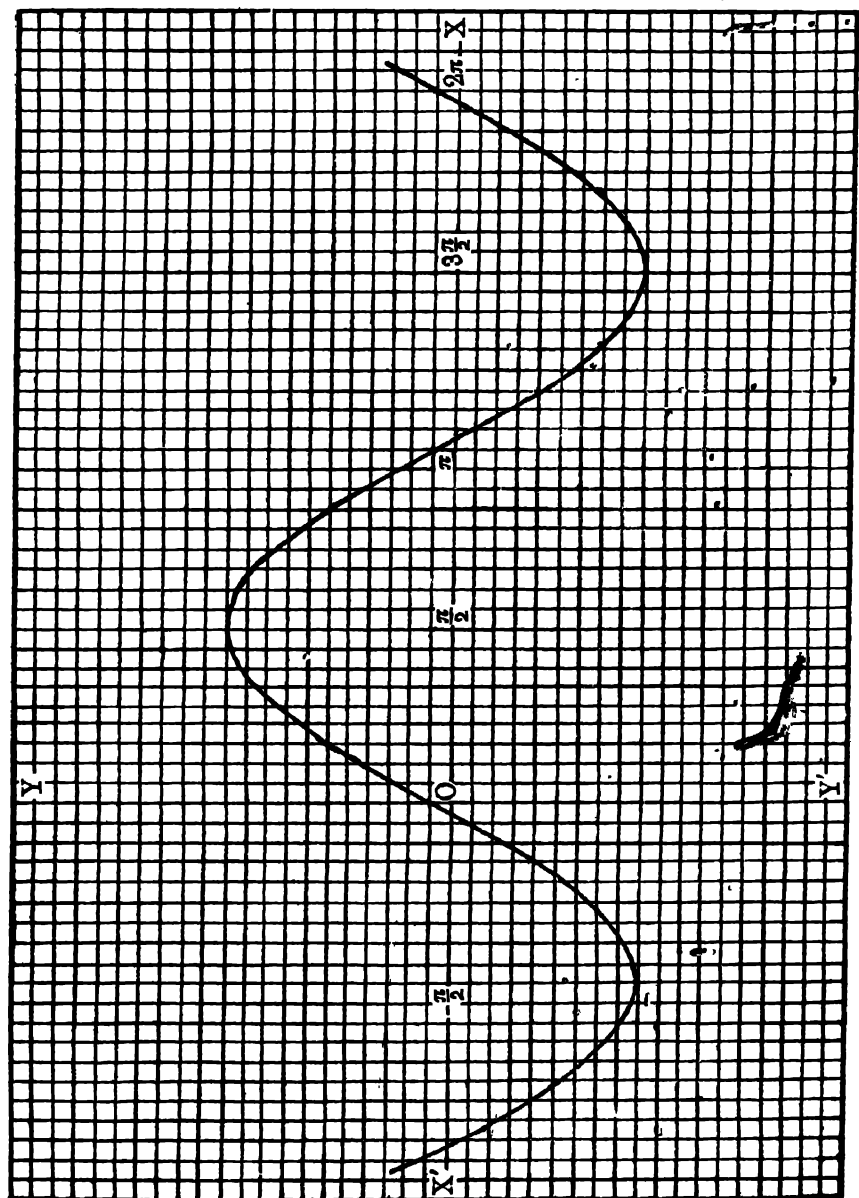
Graphs of Trigonometrical Functions
(ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন)

127. বীজগণিতীয় লেখ অঙ্কনের প্রণালীতে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক গুলির ($\sin x$, $\cos\theta$ প্রভৃতির) লেখ অঙ্কন করা যায়। এক্ষেত্রেও XOX′, YOY′ দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে অক্ষ ও উহাদের ছেদ-বিন্দু O কে মূলবিন্দু ধরা হয় এবং এক্ষেত্রেও অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিক বীজগণিতের ন্যায়ই হইয়া থাকে।

এস্থলে x-অক্ষ বরাবর কোণটির মানগুলি এবং y-অক্ষ বরাবর উহার কোণানুপাতের মানগুলি বসাইয়া বিন্দুগুলি স্থাপন (plot) করিতে হয়। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখাদ্বারা যোগ করিলে অপেক্ষকের লেখটি অঙ্কিত হইবে। বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার সময় x-অক্ষ বরাবর এবং y-অক্ষ বরাবর সুবিধামত একক নির্বাচন করিয়া লইতে হয়।

128. সাইন লেখ অর্থাৎ sin x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=\sin x$. এক্ষণে x-এর প্রত্যেক মানের জন্য :লগতালিকা (table of natural sines) হইতে $\sin x$ অর্থাৎ y এর মান পাওয়া যাইবে। এখানে x এর মানের $10°$ ব্যবধানে $\sin x$ এর অনুরূপ মানগুলি দুই দশমিক অঙ্ক পর্য্যন্ত নিম্নে তালিকাবদ্ধ করা হইল।

x	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$-60°$	$-50°$	$-40°$	$-30°$	$-20°$
y বা $\sin x$	-1	$-·98$	$-·94$	$-·87$	$-·77$	$-·64$	$-·50$	$-·34$
x	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$
y বা $\sin x$	$-·17$	0	$·17$	$·34$	$·50$	$·64$	$·77$	$·87$
x	$70°$	$80°$	$90°$	$100°$	$110°$	$120°$	...	...
y বা $\sin x$	$·94$	$·98$	1	$·98$	$·94$	$·87$	...	...

লেখ 1 [সাইন লেখ ($-\pi$ to 2π)]

এক্ষণে x অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা 10° কোণ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর 10 গুণ দৈর্ঘ্য দ্বারা 1 একক সূচিত করিয়া (−90°, −1), (−80°, −·98), প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্ততরেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। লেখ চিত্র 1 দেখ।

[দ্রষ্টব্য :—(1) Natural sine এর লগতালিকায় 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত কোণগুলির সাইন দেওয়া আছে। 0° হইতে ক্ষুদ্রতর এবং 90° হইতে বৃহত্তর কোণের সাইন পাইবার জন্য $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$ সূত্রগুলির সাহায্য লইতে হইবে। (2) কোণগুলির মান 10° ব্যবধানে, 5° ব্যবধানে 15° ব্যবধানে বা যে কোন সুবিধামত ব্যবধানে লওয়া যায়। (3) y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর 10 গুণ, বা 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে একক লওয়াই সুবিধাজনক। (4) পরে অন্য অপেক্ষকগুলির লেখ অঙ্কনেও এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।]

Sinegraph এর কতিপয় বিশেষ প্রকৃতি :

লেখটি হইতে দেখা যায় যে, (i) উহা সমঞ্জস তরঙ্গাকারে উভয়দিকে বরাবর বিস্তৃত অর্থাৎ ছেদহীন (continuous) ; (ii) লেখটির কোটি কখনও +1 এর বেশী ও −1 এর কম দেখা যায় না, সুতরাং $\sin x$ এর বৃহত্তম মান 1 এবং ক্ষুদ্রতম মান −1 হইবে এবং x এর মান 90°-র বিজোড়গুণিতক হইলেই এই মানগুলি দেখা যায়। (iii) মূল বিন্দুতে এবং যে স্থলে x এর মান 90°-র জোড় গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে $\sin x$ এর মান 0, কারণ লেখটি ঐ সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে। (iv) $\because$ $\text{Sin}(2n\pi + x) = \sin x$, $\therefore$ 0° হইতে 2π পর্য্যন্ত লেখাংশ টুকুর উভয়দিকে পুনরাবৃত্তি হইতে থাকে।

129. কোসাইন লেখ অর্থাৎ cos x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=\cos x$. এখানে x এর মানের 15° ব্যবধানে $\cos x$ এর অনুরূপ মানগুলি (দুই দশমিক অঙ্ক পর্য্যন্ত) natural cosine table হইতে তালিকাভুক্ত করা হইল :—

x	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°
y বা $\cos x$	0	·26	·5	·71	·87	·97	1	·97
x	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°
y বা $\cos x$	·87	·71	·5	·26	0	$-$·26	$-$·5	$-$·71
x	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	…
y বা $\cos x$	$-$·87	$-$·97	-1	$-$·97	$-$·87	$-$·71	$-$·5	…

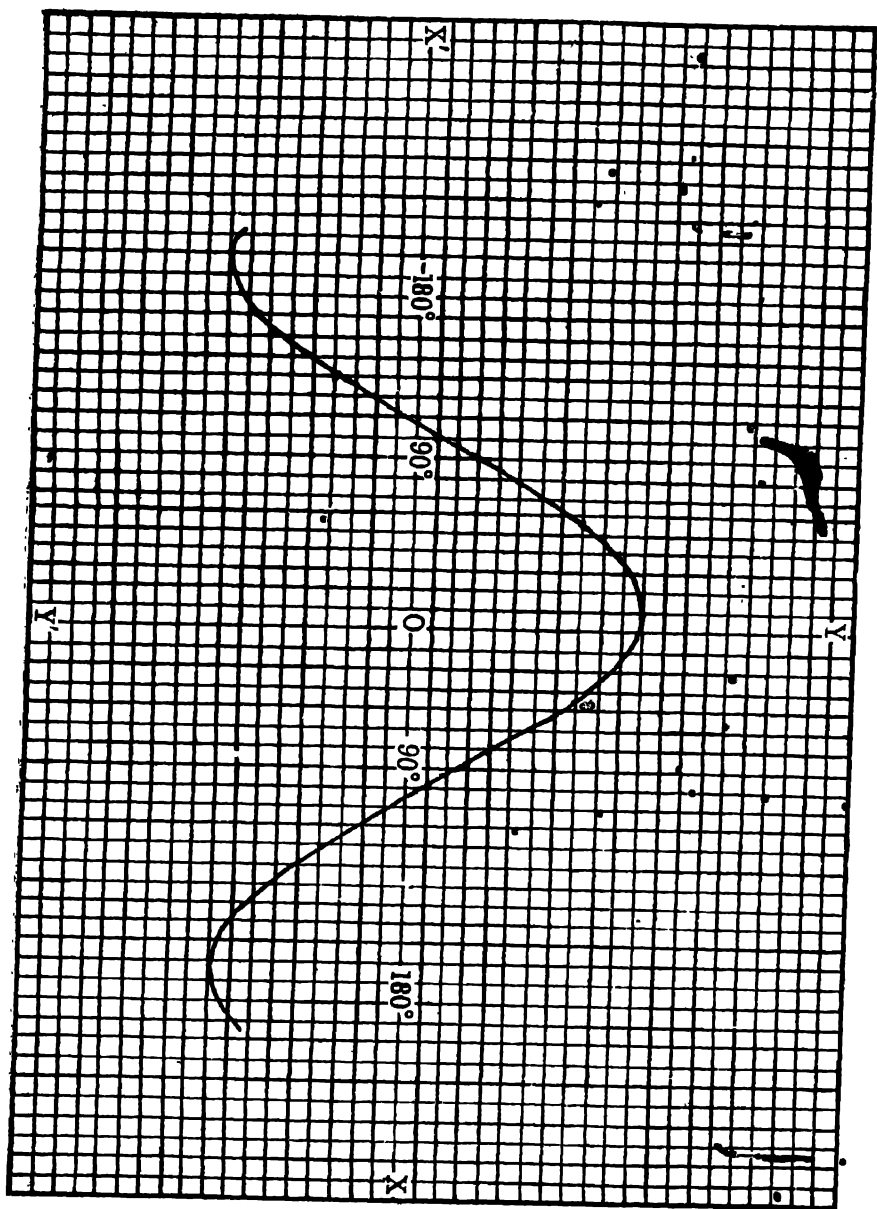
এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $=10^\circ$ এবং বরাবর ঐরূপ 10টি বাহুর সমষ্টি $=1$ ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি লেখ কাগজে স্থাপন করা হইল এবং লব্ধ বিন্দুগুলি পরস্পর হস্তাঙ্কিত সন্ততরেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। লেখ চিত্র 2 দেখ।

Cosine graph এর কতিপয় বিশেষত্ব :—

লেখটি হইতে দেখা যায় যে, (i) -90° হইতে 90° পর্য্যন্ত লেখাংশ y-অক্ষের উভয় পার্শ্বে সমঞ্জস (symmetrical), $\cos(-x)=\cos x$ হয় বলিয়া লেখটি এইরূপ হইয়াছে।

(ii) $\cos(2n\pi+x)=\cos x$, সুতরাং প্রত্যেক 360° ব্যবধানে লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

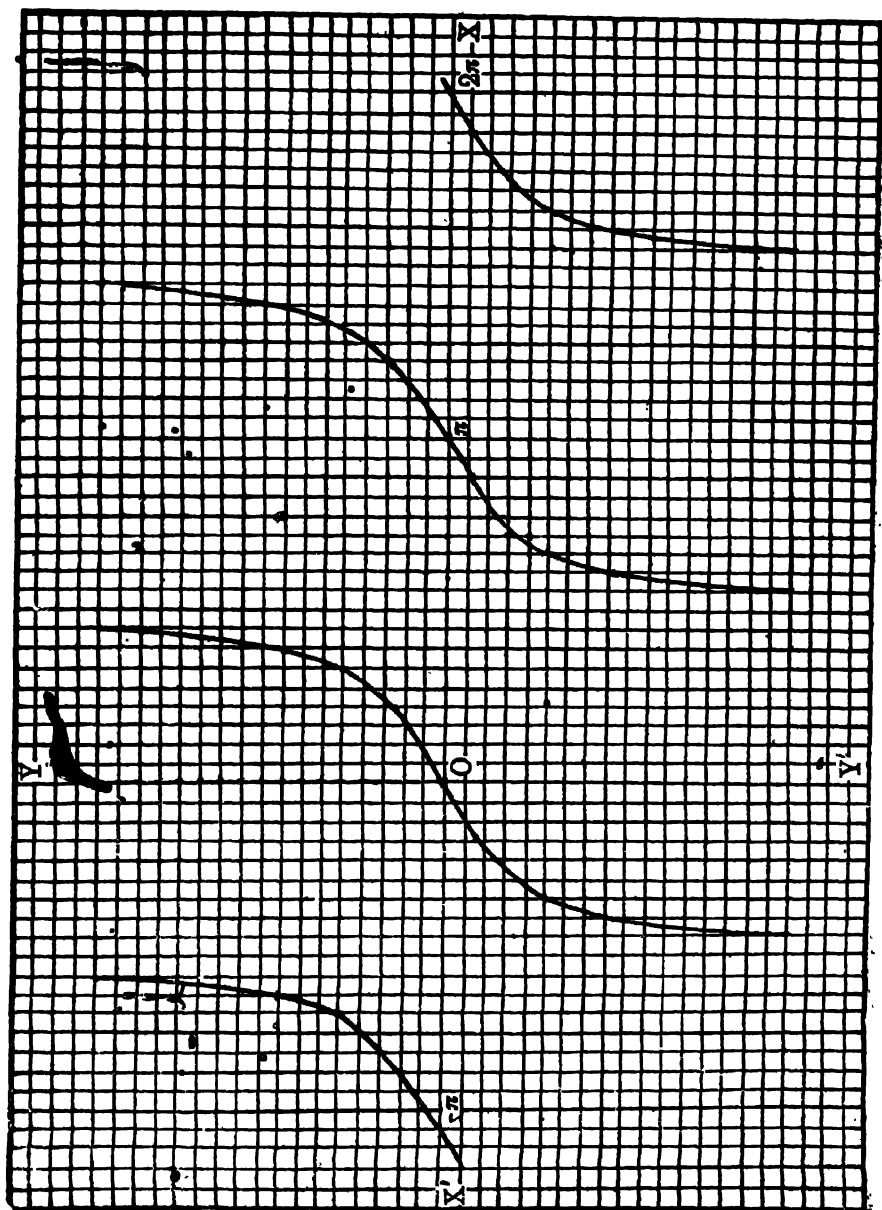
(iii) কোসাইন লেখ ঠিক সাইন লেখটির অনুরূপ। সাইন লেখটি যদি বামদিকে 90° পরিমাণ সরাইয়া দেওয়া যায় অর্থাৎ যদি মূলবিন্দু O কে

লেখ 2 [কোসাইন লেখ (−180° to 180°)]

(লেখ চিত্র 1) বামদিকে 90° (অর্থাৎ 9টি ক্ষুদ্রতম বাহু) সরাইয়া দিয়া সেই নূতন বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়, তবে sine লেখ এবং cosine লেখ সম্পূর্ণ এক হইয়া যায়। কারণ, $\cos x = \sin (90° + x)$].

130. ট্যান্‌জেণ্ট লেখ অর্থাৎ tan x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y = \tan x$. এখানে x এর মানের 10° ব্যবধানে $\tan x$ এর অনুরূপ মানগুলি nautral tangent table হইতে (দুই দশমিক বিন্দু পর্য্যন্ত লইয়া) নিম্নে তালিকাভুক্ত করা হইল :—

x	−120°	−110°	−100°	−90°	−80°	−70°	−60°
y বা $\tan x$	1·73	2·75	5·76	∞, −∞	−5·67	−2·75	−1·73
x	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°	10°
y বা $\tan x$	−1·19	−·84	−·58	−·36	−·18	0	·18
x	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
y বা $\tan x$	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67
x	90°	100°	110°	120°	...	...	...
y বা $\tan x$	∞, −∞	−5·67	−2·75	−1·73	...	...	...

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = 10° এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 3টি বাহুর সমষ্টিকে একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত স্থানাঙ্কবিশিষ্ট ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $\tan x$ এর লেখ পাওয়া গেল [লেখ চিত্র 3 দেখ]।

লেখ 3 [ট্যান্‌জেন্ট লেখ ($-\pi$ to 2π)]

Tangent graph এর কতিপয় বিশেষত্ব :

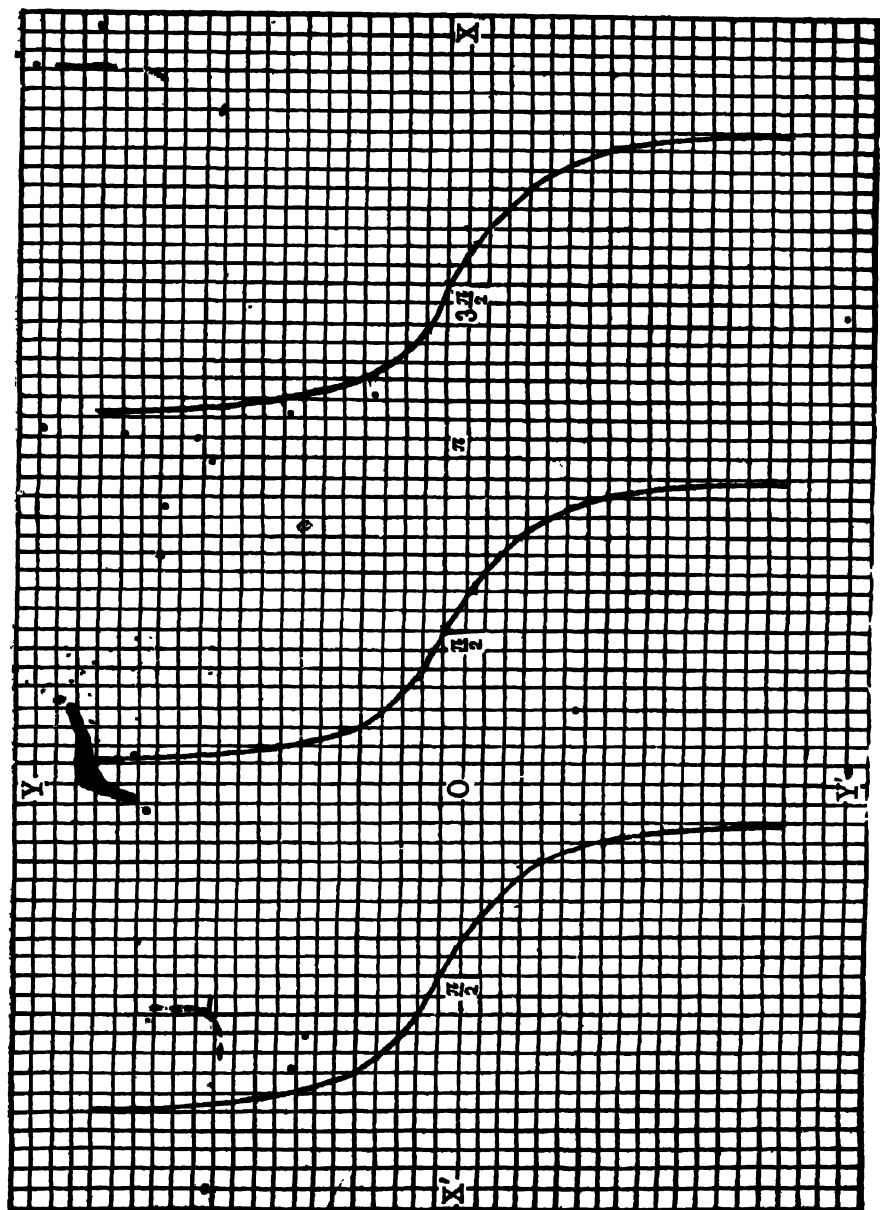
লেখ চিত্র হইতে দেখা যায় যে, (i) ঐ লেখ অবিচ্ছিন্ন (continuous) নহে, উহার কতিপয় বিভিন্ন শাখা আছে। যে সকল বিন্দুতে x এর মান 90°র বিজোড় গুণিতক, সেই সকল বিন্দুতে লেখটি ছিন্ন হইয়াছে। এই বিন্দুগুলি হইতে x যখন বামদিক হইতে ডান দিকে সরে, tan x এর মান হঠাৎ ∞ হইতে $-\infty$তে পরিবর্তিত হয়।

(ii) যে সকল বিন্দুতে x এর মান 90°-র বিজোড় গুণিতক সেই সকল বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলির দিকে x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে লেখটি অগ্রসর হইতে থাকে, কিন্তু তাহাদিকে স্পর্শ করিতে পারে না। ঐ রেখাগুলিকে ঐ লেখটির বক্ররেখার **asymptotes** (অসীমপথ) বলে।

(iii) $\because$ tan $(n.180°+x)=$tan x (এখানে n যে কোন অখণ্ডসংখ্যা), $\therefore$ প্রত্যেক 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে। লেখটির যে শাখাগুলি $-90°$ হইতে 90° (সুতরাং অন্তর 180°) পর্যন্ত আছে, ডান ও বাম পার্শ্বে সেইগুলির পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে।

131. কোট্যান্‌জেণ্ট লেখ অর্থাৎ cot x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=$cot x. এখানে x এর মানের 10° ব্যবধানে y অর্থাৎ cot x এর অনুরূপ মানগুলি natural cotangent table হইতে লইয়া নিম্নে তালিকাভুক্ত করা হইল :—

x	$-120°$	$-110°$	$-100°$	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$-60°$
y বা cot x	·58	·36	·18	0	$-$·18	$-$·36	$-$·58
x	$-50°$	$-40°$	$-30°$	$-20°$	$-10°$	0°	10°
y বা cot x	$-$·84	-1·19	-1·73	-2·75	-5·67	$-\infty$, ∞	5·67
x	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
y বা cot x	2·75	1·73	1·19	·84	·58	·36	·18
x	90°	100°	110°	120°	...	...	...
y বা cot x	0	$-$·18	$-$·36	$-$·58	...	...	...

লেখ 4 [কোট্যান্জেন্ট লেখ ($-\pi$ to 2π)]

এক্ষণে x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $=10^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=1$ একক ধরিয়া তালিকার স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 4]

Cotangent graph এর বিশেষত্ব :

(i) ইহাও একটি বিচ্ছিন্ন লেখ (discontinuous graph). 0° এবং 180°-র যে কোন গুণিতক কোণে লেখটি বিচ্ছিন্ন হইবে।

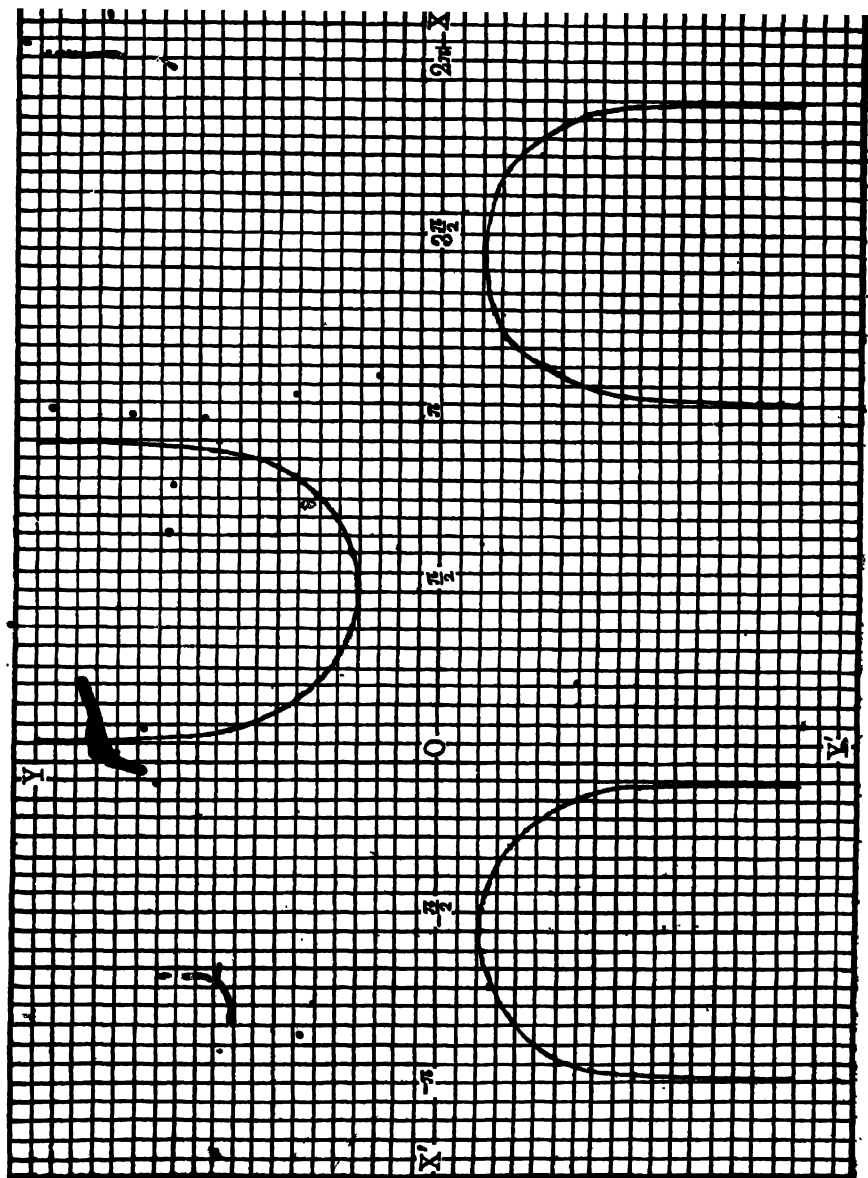
(ii) এই লেখটি ট্যান্‌জেণ্ট graph এর অনুরূপ। Tangent লেখটিকে বাম দিকে বা ডানদিকে 90° সরাইয়া দিলে উহাই cotangent graph হইয়া যায়।

(iii) $\because$ $\cot(n.180^\circ+x)=\cot x$, $\therefore$ প্রত্যেক 180° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইয়া থাকে।

(iv) 0° ও 180° এর যে কোন গুণিতক কোণে লেখটি x-অক্ষের উপর ও নীচের দিকে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকে, কিন্তু স্পর্শ করিতে পারে না। ঐ সমান্তরাল রেখাগুলিকে asymptotes বলে।

132 কোসেকাণ্ট লেখ অর্থাৎ cosec x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=\operatorname{cosec} x$. এখানে x-এর মানের 15° ব্যবধানে y অর্থাৎ $\operatorname{cosec} x$ এর অনুরূপ মানগুলি natural cosecant table হইতে (অথবা এই table না পাইলে sine table হইতে $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ সূত্র সাহায্যে) নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত কর।

x	-105°	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°
y বা cosec x	$-1{\cdot}04$	-1	$-1{\cdot}04$	$-1{\cdot}15$	$-1{\cdot}41$	-2	$-3{\cdot}86$
x	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
y বা cosec x	$3{\cdot}86$	2	$1{\cdot}41$	$1{\cdot}15$	$1{\cdot}04$	1	$1{\cdot}04$
x	120°	135°	150°	165°	195°	210°	225°
y বা cosec x	$1{\cdot}15$	$1{\cdot}41$	2	$3{\cdot}86$	$-3{\cdot}86$	-2	$-1{\cdot}41$

লেখ 5 [কোসেকাণ্ট লেখ ($-\pi$ to 2π)]

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = 10° এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 3টি বাহু = 1 একক ধরিয়া উপরের স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্র রেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 5]

Cosecant graph-এর বিশেষত্ব :—

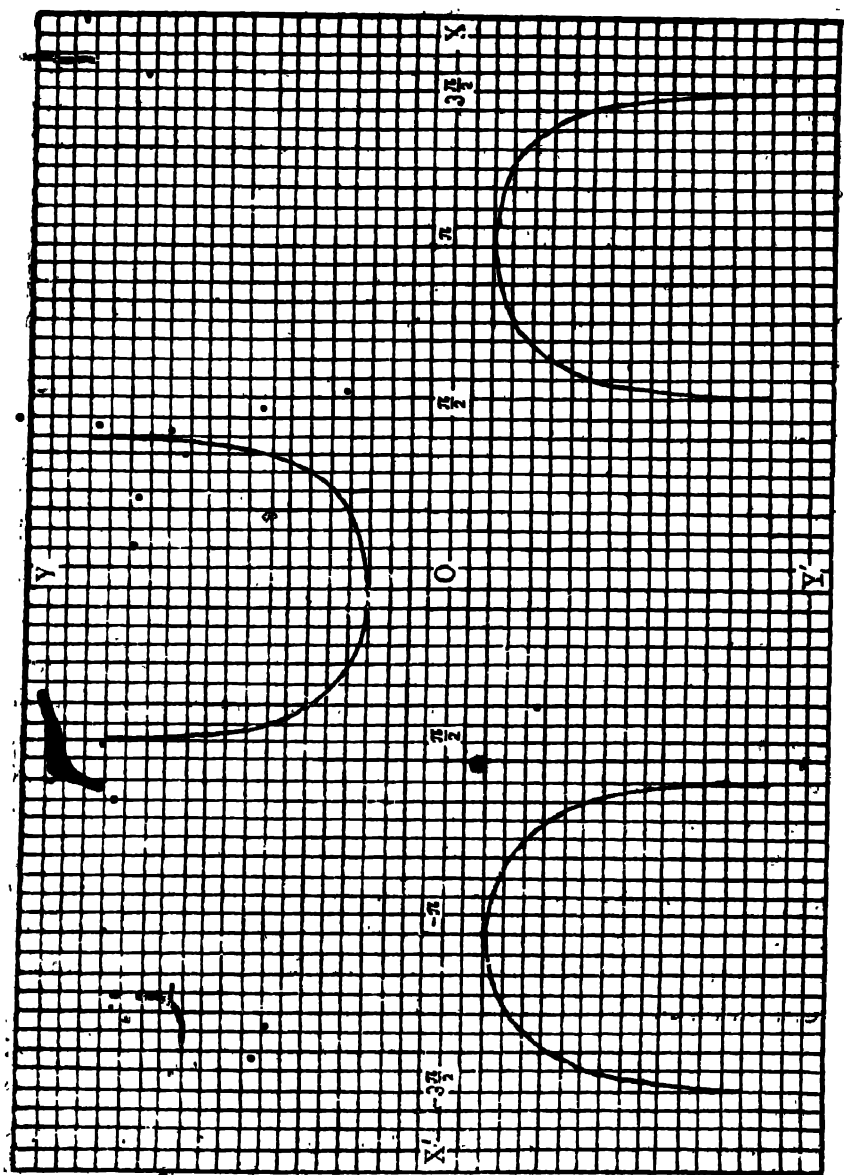
(i) এই লেখটিও অবিচ্ছিন্ন নহে, ইহার বিভিন্ন শাখা বিচ্ছিন্ন লেখ। 0°-তে এবং 180°-র প্রত্যেক গুণিতক কোণে লেখটি বিচ্ছিন্ন হয়। এই বিন্দুগুলিতে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলি asymptotes হইবে।

(ii) লেখটির কোন অংশ $y=1$ ও $y=-1$ এর মধ্যে থাকিবে না। কারণ, এখানে y-এর মান সতত 1 অপেক্ষা বড় ও -1 অপেক্ষা ছোট। অতএব, লেখটি 0° হইতে 180° পর্য্যন্ত সীমার মধ্যে x-অক্ষের উপরে এবং 180° হইতে 360° পর্যন্ত সীমার মধ্যে x-অক্ষের নীচে থাকিবে।

(iii) $\because$ cosec $(n.360°+x)=$ cosec x, $\therefore$ প্রত্যেক 360° অন্তর লেখটির সমুদয় অংশের বামদিকে ও ডানদিকে পুনরাবৃত্তি হইবে।

33. সেকাণ্ট লেখ অর্থাৎ Sec x এর লেখ অঙ্কন।

মনে কর, $y=\sec x$. এখানে x এর মানের 15° ব্যবধানে y অর্থাৎ sec x এর অনুরূপ মানগুলি natural secant table হইতে লইয়া নিম্নে স্থানাঙ্করূপে তালিকাভুক্ত করিতে হইবে। কিন্তু natural secant table পাওয়া না যাইতে পারে। সেস্থলে natural cosine table হইতে মান লইয়া secant এর মান $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ সূত্র হইতে নির্ণয় করিয়া লইতে হইবে।

x	−105°	...	−75°	−60°	−45°	−30°	−15°	0°
y বা sec x	−3·86	...	3·86	2	1·41	1·15	1·04	1
x	15°	30°	45°	60°	75°	105°	120°	135°
y বা sec x	1·04	1·15	1·41	2	3·86	−3·86	−2	−1·41
x	150°	165°	180°	195°	210°	225°	...	...
y বা sec x	−1·15	−1·04	−1	−1·04	−1·15	−1·14	...	...

লেখ 6 [সেকাণ্ট-লেখ ($-\frac{3\pi}{2}$ to $\frac{3\pi}{2}$)]

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $=10^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ তিনটি বাহুর সমষ্টি $=1$ একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। এই বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি অঙ্কিত হইল। [লেখ 6 দেখ।]

Secant graph-এর বিশেষত্ব :—

(i) সেকাণ্ট লেখটিও অবিচ্ছিন্ন লেখ নহে। 90°-র প্রত্যেক বিজোড় গুণিতকে লেখটি বিচ্ছিন্ন হয় এবং ঐ সকল বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলি asymptotes হইবে।

(ii) $\because$ $\sec(n.360^\circ+x)=\sec x$, $\therefore$ প্রত্যেক 360° অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

(iii) লেখটি cosecant graph এর অনুরূপ। cosecant লেখকে বামদিকে 90° পরিমাণ সরাইয়া দিলে তাহাই secant graph হইবে। কারণ, $\text{cosec}\,(90^\circ+x)=\sec x$.

134. এ পর্য্যন্ত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির লেখ অঙ্কন প্রণালী আলোচনা করা হইয়াছে। ঐগুলি সংক্রান্ত অপেক্ষকের অর্থাৎ $\sin 2x$, $2\cos 3x$, প্রভৃতির লেখাঙ্কন করিতে হইলে, তালিকা প্রস্তুত করিবার সময় প্রথম সারিতে x-র বিভিন্ন মান, দ্বিতীয় সারিতে $2x$ বা $3x$ এর বিভিন্ন মান এবং তৃতীয় সারিতে সম্পূর্ণ অপেক্ষকটির ($\sin 2x$ প্রভৃতির) মানগুলি লিখিতে হয়। তৎপরে নিজের নির্ধারিত scale অনুসারে বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া লেখটি অঙ্কন করিতে হয়।

আবার, $\tan x+\cot x$ প্রভৃতি ত্রিকোণমিতিক expression-এর লেখও অনুরূপ প্রণালীতে অঙ্কন করা যায়। তালিকার প্রথম সারিতে x এর মানগুলি, দ্বিতীয় সারিতে $\tan x$ এর মানগুলি, তৃতীয় সারিতে $\cot x$ এর মানগুলি এবং চতুর্থ সারিতে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারির যোগফল-গুলি লিখিয়া লেখ অঙ্কন করিতে হয়।

135. Graphical Solution of Equations (সমীকরণের লৈখিক সমাধান)।

বীজগণিতের সমীকরণের ন্যায় ত্রিকোণমিতিক সমীকরণেরও লেখ অঙ্কন করিয়া সমাধান করা যায়। প্রদত্ত সমীকরণ দেখিয়া সুবিধামত প্রণালী অবলম্বন করিতে হয়। (i) সমীকরণের দুই পক্ষের দুইটি লেখ অঙ্কন করিয়া তাহাদের পরস্পর ছেদবিন্দুগুলির ভুজগুলির মানই সমীকরণের

নির্ণেয় সমাধান হইবে। অথবা, (ii) প্রথমে সমীকরণের পদগুলিকে এক দিকে (সাধারণতঃ বামদিকে) পক্ষান্তর করিয়া লইতে হয়, ইহাতে অন্যপক্ষ 0 (শূন্য) হইবে। তৎপরে বামপক্ষের লেখ অঙ্কন করিলে বক্রলেখটি x-অক্ষকে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের ভুজগুলির মানই সমীকরণের সমাধান হইবে।

উদাহরণমালা 18

উদা. 1. Draw the graph of $y=\sin x+\cos x$ between the range $x=0$ to $x=2\pi$, and find from the graph the values of x for which (i) $y=0$, (ii) y is maximum, (iii) y is minimum.
[C. U. '34]

এখানে x-এর বিভিন্ন মান 15° বা $\frac{\pi}{12}$ ব্যবধানে লইয়া Table হইতে $\sin x$ ও $\cos x$ এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করিয়া তাহাদের সমষ্টিগুলি তালিকাভুক্ত করা হইতেছে।

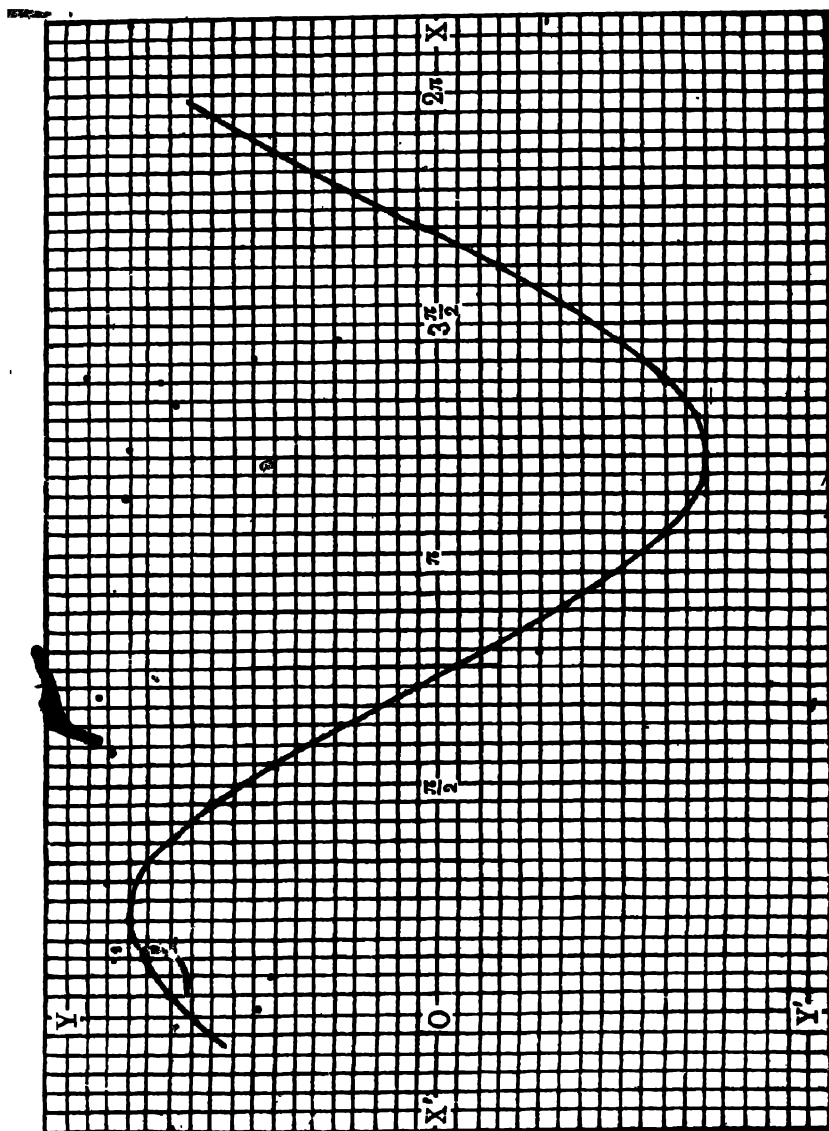
x	0°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	·26	·5	·7	·87	·97	1
$\cos x$	1	·97	·87	·7	·5	·26	0
y বা $\sin x + \cos x$	1	1·23	1·37	1·4	1·37	1·23	1
x :	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$
$\sin x$	·97	·87	·7	·5	·26	0	−·26
$\cos x$	−·26	−·5	−·7	−·87	−·97	−1	−·97
y বা $\sin x + \cos x$	·71	·37	0	−·37	−·71	−1	−1·23

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin x$	−·5	−·7	−·87	−·97	−1	−·97	−·87
$\cos x$	−·87	−·7	−·5	−·26	0	·26	·5
y বা $\sin x + \cos x$	−1·37	−1·4	−1·37	−1·23	−1	−·71	−·37
x	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π	...	...	...
$\sin x$	−·7	−·5	−·26	0	...	...	...
$\cos x$	·7	·87	·97	1	...	...	...
y বা $\sin x + \cos x$	0	·37	·71	1	...	...	...

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুইটি বাহুর সমষ্টি দ্বারা 15° এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 10টি বাহুর সমষ্টি দ্বারা 1 একক সূচিত করিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 7 দেখ।]

(i) লেখটি যে সকল বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিবে সেই বিন্দুগুলিতে $y=0$ হইবে। এখানে লেখটি x-অক্ষকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, সেখানে $x=\frac{3\pi}{4}$ এবং $x=\frac{7\pi}{4}$. অতএব, যখন $x=\frac{3\pi}{4}$ ও $x=\frac{7\pi}{4}$, তখন $y=0$.

(ii) লেখ হইতে দেখা যায় যে, লেখটির ঊর্ধ্বতম বিন্দুর ভুজ $\frac{\pi}{4}$, সুতরাং $x=\frac{\pi}{4}$ হইলে y এর মান বৃহত্তম হইবে।

(iii) আবার, লেখটির নিম্নতম বিন্দুর ভুজ $=\frac{5\pi}{4}$, সুতরাং যখন $x=\frac{5\pi}{4}$ বা 225° তখন y এর মান ক্ষুদ্রতম।

লেখ 7 [$y = \sin x + \cos x$ এর লেখ]

[দ্রষ্টব্য : এখানে সমীকরণটিকে $y=\sin x+\cos x$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x.\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}(\sin x.\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos x)$$
$$=\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)$$ লেখা যায়।

অতএব, Table হইতে x এর বিভিন্ন মানে $\sin(45^\circ+x)$ এর মানগুলিকে $\sqrt{2}$ বা 1·414 দ্বারা গুণ করিয়া y এর বিভিন্ন অনুরূপ মানগুলি পাওয়া যাইতে পারে।]

উদা. 2. Solve graphically the equation $\cot\theta-\tan\theta=2$ between $\theta=0$ and $\theta=\pi$. [C. U. '49]

এখানে $\cot\theta-\tan\theta=2$,

বা, $\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta=2$, বা, $1-\tan^2\theta=2\tan\theta$,

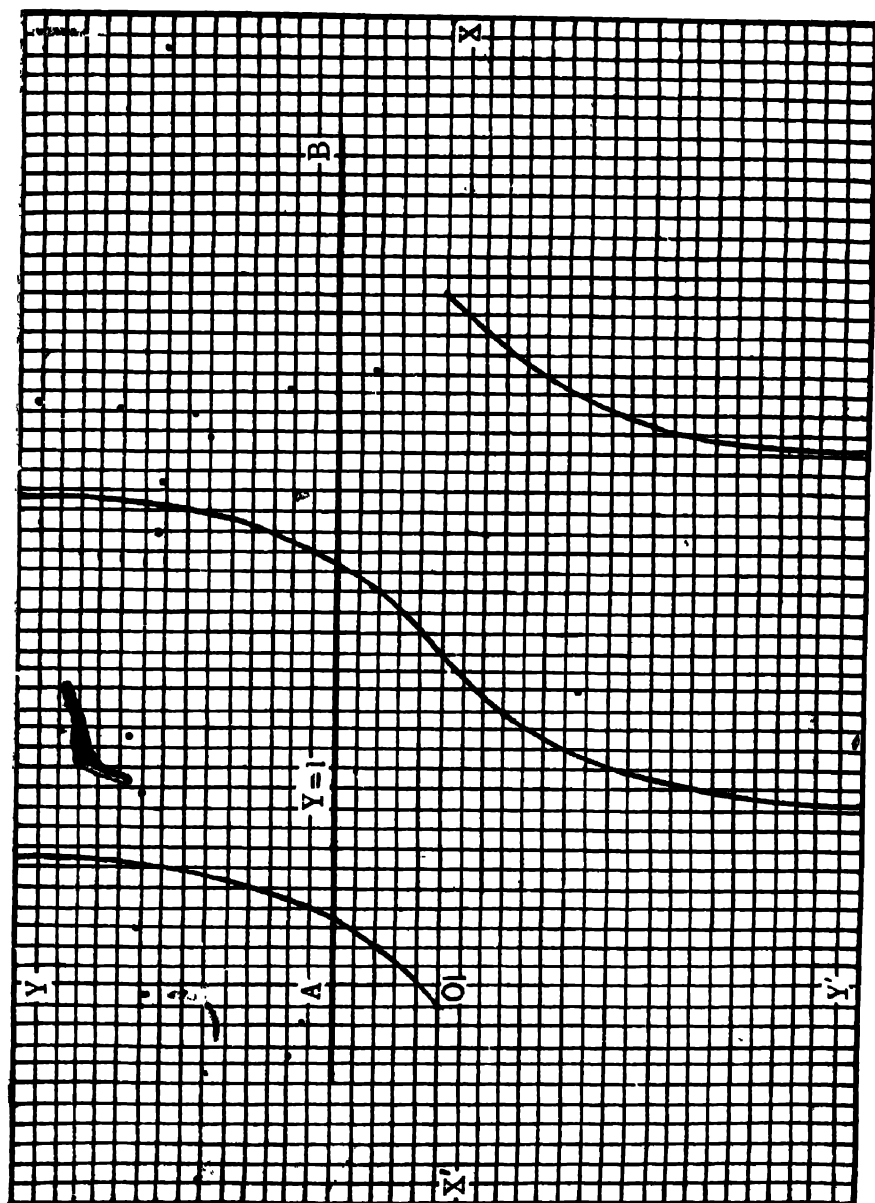
বা, $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1$, বা $\tan 2\theta=1$.

এখন $y=\tan 2\theta$, এবং $y=1$ এই সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কন করিয়া তাহাদের ছেদবিন্দুগুলির ভুজগুলি হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে

(i) $y=\tan 2\theta$.

θ	0°	15°	22·5°	30°	37·5°	52·5°	60°	75°
2θ	0°	30°	45°	60°	75°	105°	120°	150°
$\tan\theta$ বা y	0	·58	1	1·73	3·73	−3·73	−1·73	−·58
θ	90°	105°	120°	127·5°	142·5°	150°	180°	...
2θ	180°	210°	240°	255°	285°	300°	360°	...
$\tan\theta$ বা y	0	·58	1·73	3·73	−3·73	−1·73	0	...

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহু $=5^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 5টি বাহু $=1$ একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=\tan 2\theta$ সমীকরণের লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 8]

লেখ ৪

(ii) আবার, x-অক্ষ হইতে উপর দিকে 1 একক দূরে এবং x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইল। উহাই $y=1$ সমীকরণের লেখ হইল।

ঐ সরলরেখাটি প্রথম সমীকরণের লেখকে দুইটি বিন্দুতে (প্রদত্ত সীমার মধ্যে) ছেদ করিয়াছে এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের ভুজ $=22{\cdot}5°$ ও $112{\cdot}5°$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $\theta=22{\cdot}5°$ ও $112{\cdot}5°$.

উদা. 3. Solve graphically the equation
$\operatorname{cosec} x=\cot x+\sqrt{3}$ between $x=0$ and $x=\pi$. [C. U. '42]

এখানে $\operatorname{cosec} x=\cot x+\sqrt{3}$, বা, $\frac{1}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\sqrt{3}$,

বা, $1=\cos x+\sqrt{3}\sin x$, বা, $\frac{1}{2}=\cos x.\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$,

বা, $\frac{1}{2}=\cos x\cos 60°+\sin x\sin 60°$, বা, $\frac{1}{2}=\cos(x-60°)$.

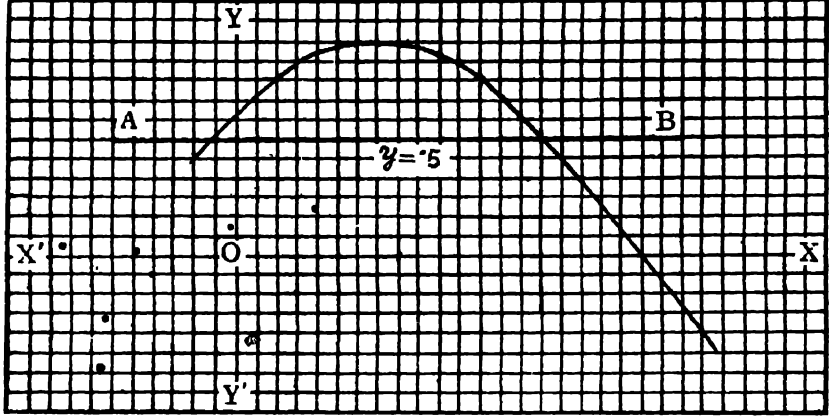
অতএব, $y=\frac{1}{2}={\cdot}5$ এবং $y=\cos(x-60°)$ সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটির ছেদবিন্দু হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে।

(i) $y={\cdot}5$ এর লেখ হইল x-অক্ষের উপরদিকে ঐ অক্ষ হইতে ·5 একক দূরে x-অক্ষের সমান্তরাল AB সরলরেখা। [লেখ 9 দেখ।]

(ii) $y=\cos(x-60°)$

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$x-60°$	−60°	−45°	−30°	−15°	0°	15°	30°
y বা $\cos(x-60°)$	·5	·71	·87	·97	1	·97	·87
x	105°	120°	135°	150°	165°	180°	...
$x-60°$	45°	60°	75°	90°	105°	120°	...
y বা $\cos(x-60°)$	·71	·5	·26	0	−·26	−·5	...

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহু 7·5° এবং y-অক্ষ বরাবর ঐরূপ 1টি বাহু ·1 এককের সমান ধরিয়া উপরের (0°, ·5), (15°, ·71) প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত

বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া $y=\cos(x-60°)$ সমীকরণের লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 9 দেখ।]

লেখ 9

এখানে প্রদত্ত সীমার মধ্যে লেখদ্বয় যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের ভুজ 0° ও 120° সূচিত করে।

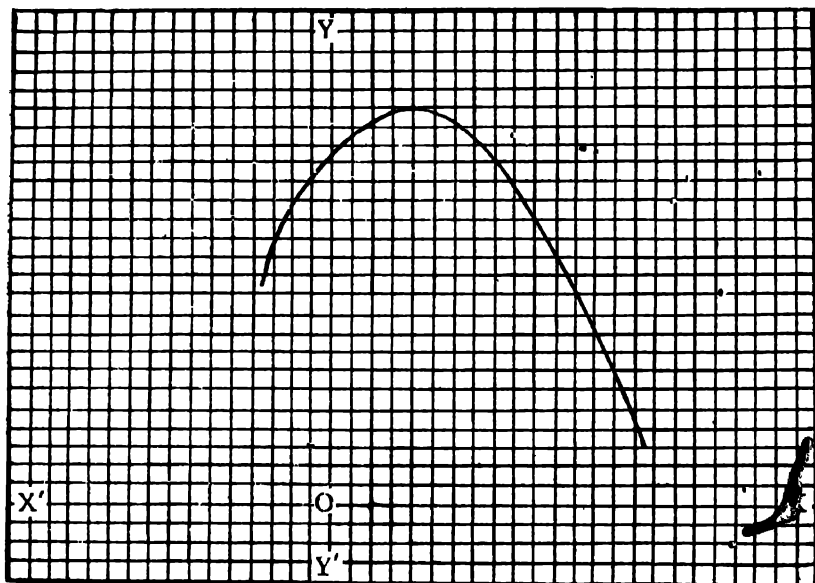
অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $x=0°$ ও 120°.

উদা. 4. Draw the graph of $3\sin x+4\cos x$. What is its maximum value? [C. U. '50]

মনে কর, $y=3\sin x+4\cos x$.

প্রথমে x-এর মানের 15° ব্যবধানে অনুরূপ $\sin x$ ও $\cos x$ এর মানগুলি table হইতে নির্ণয় করিয়া নিম্নে x ও y-এর মানগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	−15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
$3\sin x$	−·78	0	·78	1·5	2·12	2·61	2·91	3	2·91	2·61
$4\cos x$	3·86	4	3·86	3·46	2·83	2·00	1·03	0	−1·04	−2·00
y	3·08	4	4·64	4·96	4·95	4·61	3·94	3	1·87	·61

এক্ষণে x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমষ্টি $=15^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 4 বাহুর সমষ্টি $=1$ ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল। [লেখ 10]

লেখ 10

লেখ হইতে দেখা যায় যে, y এর বৃহত্তম মান 5. অতএব নির্ণেয় বৃহত্তম মান $=5$.

উদা. 5. Solve graphically the equation $2 \sin^2 x = \cos 2x$, giving only those solutions of x which lie between $-\frac{\pi}{2}$ and $\frac{3\pi}{2}$. [C. U. '46, '48

এখানে, $2 \sin^2 x = \cos 2x$, বা, $2 \sin^2 x - \cos 2x = 0$,

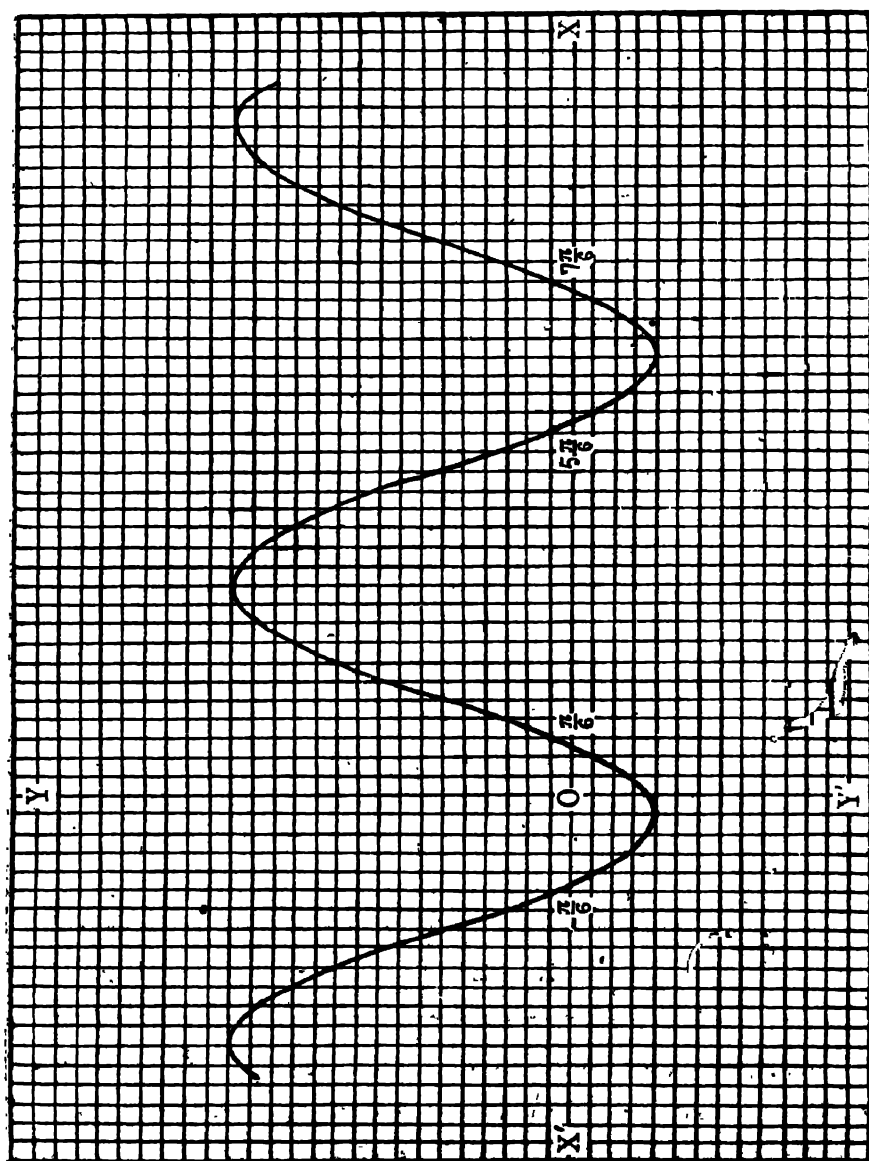
বা, $1 - \cos 2x - \cos 2x = 0$, বা, $1 - 2 \cos 2x = 0$.

মনে কর, $y = 1 - 2 \cos 2x$, সুতরাং $y = 0$. এই দুই সমীকরণের লেখদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগুলি হইতে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে।

$y=0$ সমীকরণের লেখ হইল x-অক্ষ। এখন $y=1-2\cos 2x$ এর লেখ অঙ্কনের জন্য x-এর 15° ব্যবধানে মানগুলি ধরিয়া table হইতে y-এর অনুরূপ মানগুলি নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°
$\cos 2x$	-1	$-\cdot87$	$-\cdot5$	0	$\cdot5$	$\cdot87$	1
$1-2\cos 2x$ বা y	3	2·74	2	1	0	$-\cdot74$	-1
x	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\cos 2x$	$\cdot87$	$\cdot5$	0	$-\cdot5$	$-\cdot87$	-1	$-\cdot87$
$1-2\cos 2x$ বা y	$-\cdot74$	0	1	2	2·74	3	2·74
x	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°
$\cos 2x$	$-\cdot5$	0	$\cdot5$	$\cdot87$	1	$\cdot87$	$\cdot5$
$1-2\cos 2x$ বা y	2	1	0	$-\cdot74$	-1	$-\cdot74$	0
x	225°	240°	255°	270°	...	...	...
$\cos 2x$	0	$-\cdot5$	$-\cdot87$	-1	...	...	...
$1-2\cos 2x$ বা y	1	2	2·74	3	...	...	...

এক্ষণে, x-অক্ষ বরাবর লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুইটি বাহুর সমষ্টি $=15^\circ$ এবং y-অক্ষ বরাবর 5টি অনুরূপ বাহুর সমষ্টি $=1$ ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া লেখ পাওয়া গেল। [লেখ 11 দেখ।]

লেখ 11

এই লেখটি x-অক্ষকে (অর্থাৎ $y=0$ সমীকরণের লেখকে) চারিটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ বিন্দুগুলিতে ভুজ অর্থাৎ x এর মান $= -30°$, $30°$, $150°$, $210°$, এবং কোটি $=0$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান হইল $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

Exercise 18

Draw the graphs of :—

1. Sin 2θ and cos 2θ between $\theta=0°$ and $\theta=210°$.

2. $\frac{1}{\cos 2x}$ and $\frac{1}{\cot 2x}$ between $x=-\frac{\pi}{2}$ and $x=\pi$.

3. Sin $x+\cos x$ and cos $2x$ between $x=0°$ and $x=\pi$.

4. Tan $3x$ between $x=0°$ and $x=\frac{\pi}{2}$.

5. Sec $\frac{x}{2}$ between $x=-\frac{\pi}{2}$ and $x=\frac{\pi}{2}$.

6. Trace the graph of $y=\sec x$ from $x=0°$ to $x=90°$, tabulating at intervals of 10°.

7. Draw the graphs of $y=\sin x$ and $y=\cos x$ between $x=0$ and $x=\pi$. Find the points where the graphs intersect. [C. U. '36]

8. Obtain graphically the general solution of the equation tan $x=1$. [C. U. '37]

9. Draw the graphs of $y=\sin x$ and $y=\cos x$ between $x=0$ and $x=\pi$. Find the values of x between these limits which satisfy the equation $\sin x=\cos x$.

10. Solve graphically the equation $\tan x=\cos x$, between $x=0$ and $x=\frac{1}{2}\pi$. [C. U. '56]

11. Solve graphically the equation $\tan x=2x$ between the value $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$. [C. U. '39]

12. Solve graphically $\sin 2x = \sin x$, giving only those values of x which lie between $x=0$ and $x=2\pi$. [C. U. '40]

13. Solve graphically the equation $x - \tan x = 0$ between $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$. [C. U. '45]

14. Solve graphically the equation $5 \sin \theta + 2 \cos \theta = 5$ between $\theta = 0°$ to $\theta = 270°$. [C, U. '47]

15. Sketch a period of the tangent graph $y = \tan x$, including $x = \frac{1}{2}\pi$ and discuss the behaviour of the graph near $x = \frac{\pi}{2}$. [C. U. '51]

16. Sketch the graphs of $y = x$, $y = \sin x$ and $y = \tan x$ in the range $-\frac{\pi}{2}$ and $+\frac{\pi}{2}$ with reference to the same axes of x and y. From the nature of the graph near the origin, can you suggest any relation among them at the origin ? [C. U, '52]

তৃতীয় অধ্যায়

স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি

(CO-ORDINATE GEOMETRY)

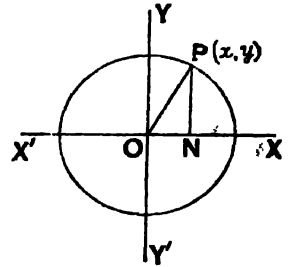
বৃত্ত (Circle)

136. সংজ্ঞা—যদি কোন গতিশীল বিন্দু, অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকে, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে বৃত্ত কহে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের কেন্দ্র এবং ঐ নির্দিষ্ট দূরত্বকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে।

137. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (মূল বিন্দুকে কেন্দ্র ধরিয়া)

[To find the equation of a circle whose centre is the origin.]

মনে কর, XOX', YOY' দুইটি অক্ষ। মূলবিন্দু O বৃত্তের কেন্দ্র এবং a ইহার ব্যাসার্ধ। P বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু, ইহার ভুজ ও কোটি অর্থাৎ স্থানাঙ্ক (x, y)। OP যুক্ত করা হইল এবং PN, OX এর উপর লম্ব টানা হইল। $\therefore$ ON $=x$ এবং PN $=y$. এখন, OPN সমকোণী ত্রিভুজের $ON^2+PN^2=OP^2$,

$\therefore$ $x^2+y^2=a^2$; ইহাই বৃত্তের সমীকরণ।

চিত্র 1

[দ্রষ্টব্য : এখানে x^2 ও y^2 এর সহগ সমান এবং x, y বা xy যুক্ত কোন পদ নাই।]

138. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় [কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) হইলে]

[To find the equation of a circle, the co-ordinates of its centre being (α, β)].

মনে কর, C বৃত্তের কেন্দ্র এবং a ইহার ব্যাসার্ধ এবং P (x, y) বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু। CM ও PN, OX এর উপর লম্ব এবং CR, PN

এর উপর লম্ব। তাহা হইলে, $OM=\alpha$, $CM=\beta$, $ON=x$, $PN=y$, এবং $CR=MN$, $PR=PN-RN=PN-CM$.

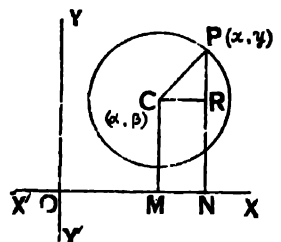
চিত্র 2

এখন CPR এই সমকোণী ত্রিভুজের

$$CP^2=CR^2+PR^2$$
$$=(ON-OM)^2+(PN-CM)^2,$$

$\therefore\ a^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2.$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হইল

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2.$$

অনুসিদ্ধান্ত : বৃত্তের কেন্দ্র $(-\alpha, \beta)$ $(\alpha, -\beta)$, বা $(-\alpha, -\beta)$ হইলে বৃত্তের সমীকরণ যথাক্রমে $(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$,

$(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=a^2$ এবং $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=a^2$ হইবে।

বিপরীতক্রমে : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে (α, β).

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের অনুচ্ছেদে যদি (i) মূল বিন্দু O বৃত্তের পরিধিস্থ হয় তবে $OM^2+MC^2=a^2$ অর্থাৎ $\alpha^2+\beta^2=a^2$ হইবে; সুতরাং তখন বৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$.

(ii) বৃত্তের কেন্দ্র যদি মূলবিন্দু হয়, তবে $\alpha=0$ এবং $\beta=0$ হইবে; সুতরাং তখন সমীকরণটি হইবে $x^2+y^2=a^2$.

(iii) যদি মূলবিন্দু বৃত্তস্থ না হয় এবং কেন্দ্রটি যদি x-অক্ষের উপর থাকে, তবে $\beta=0$ হইবে; সুতরাং তখন সমীকরণটি হইবে $(x-\alpha)^2+y^2=a^2$.

(iv) যদি মূলবিন্দুটি পরিধিস্থ হয় এবং বৃত্তের ব্যাস x-অক্ষে সমাপতিত হয়, তবে $\beta=0$ এবং $a=\alpha$ হইবে; সুতরাং তখন সমীকরণটি হইবে $x^2+y^2-2\alpha x=0$.]

139. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সর্বদাই কোন বৃত্তের সমীকরণ হইবে।

[To shew that the equation $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ always represents a circle].

c কে. পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয় দিকে g^2 এবং f^2 যোগ করিয়া পাই
$(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

অতএব, ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ, যাহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

[দ্রষ্টব্য : যদি $g^2+f^2>c$, তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বাস্তব হইবে অর্থাৎ বৃত্তটি প্রকৃত বা বাস্তব (real) হইবে ;
যদি $g^2+f^2<c$, তবে ব্যাসার্ধ সুতরাং বৃত্তটি কাল্পনিক হইবে ;
যদি $g^2+f^2=c$, তবে ব্যাসার্ধ শূন্য হইবে অর্থাৎ বৃত্তটি একটি বিন্দু হইবে।]

140. সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হওয়ার সর্ত।

[To find the condition that the general equation of the second degree $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ may represent a circle.]

সমীকরণ $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ লইলাম।

উহাকে a দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x^2+y^2+2.\frac{g}{a}x+2.\frac{f}{a}y+\frac{c}{a}=0$,

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ, যাহার কেন্দ্র $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ

$\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}$.

অতএব, দেখা যাইতেছে যে, যদি $a=b$ এবং $h=0$ হয়, তবে
$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হইবে।

অতএব, **নির্ণেয় সর্তটি হইল x^2 ও y^2 এর সহগ সমান এবং xy এর সহগ শূন্য।**

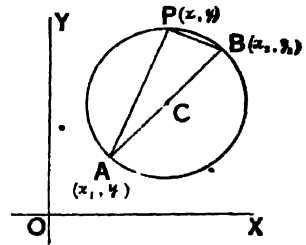
141. ***(x_1, y_1), (x_2, y_2)* এই বিন্দু দুইটির সংযোজক সরল রেখা যে বৃত্তের ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of a circle whose diameter is the line joining the two given points (x_1, y_1) and (x_2, y_2)].

মনে কর, বিন্দু A (x_1, y_1) এবং বিন্দু B (x_2, y_2) প্রদত্ত এবং P (x, y) ঐ বৃত্তের পরিধিস্থ একটি বিন্দু।

AB, AP, এবং BP যুক্ত করা হইল।

চিত্র 3

এখন AP এর gradient $\frac{y-y_1}{x-x_1}$

এবং BP এর gradient $\frac{y-y_2}{x-x_2}$, কিন্তু যেহেতু AB ব্যাস,

$\therefore$ $\angle$ APB = 1 সমকোণ অর্থাৎ AP এবং BP পরস্পর লম্ব।

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1,$$

বা, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$,

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

উদাহরণমালা 19

উদা. 1. Find the equation of a circle whose centre is the origin and radius is 4.

এখানে $x^2+y^2=a^2$ সূত্র হইতে পাই $x^2+y^2=4^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2=16$.

উদা. 2. Find the equation of a circle passing through the point (2, 3) and having the centre at the origin.

মনে কর, সমীকরণটি $x^2+y^2=a^2$.

যেহেতু বৃত্তটি (2, 3) বিন্দু দিয়া যায়,

$\because \; 2^2+3^2=a^2, \quad \therefore \; a^2=13.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2=13.$

উদা. 3. Find the equation of a circle whose centre is at the point (3, 4) and radius is 6.

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-3)^2+(y-4)^2=6^2,$

বা, $x^2-6x+9+y^2-8y+16=36,$

বা, $x^2+y^2-6x-8y-11=0.$

উদা. 4. Find the equation of a circle passing through the point (–1, 2) and having the centre at the point (2, –3)

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $(x-2)^2+(y+3)^2=a^2.$

যেহেতু বৃত্তটি (–1, 2) বিন্দু দিয়া যায়

$\therefore \; (-1-2)^2+(2+3)^2=a^2, \; \therefore \; a^2=9+25=34.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-2)^2+(y+3)^2=34,$

বা, $x^2-4x+4+y^2+6y+9=34,$

বা, $x^2+y^2-4x+6y-21=0.$

উদা. 5. Find the co-ordinates of the centre and the radius of the circle $x^2+y^2-4x+6y-12=0.$

$\because \; x^2+y^2-4x+6y-12=0.$

$\therefore$ -12কে পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয় দিকে $4+9$ অর্থাৎ 13 যোগ করিয়া পাই $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=25,$

বা, $(x-2)^2+(y+3)^2=25=(5)^2.$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2, –3) এবং ব্যাসার্ধ 5.

উদা. 6. Find the co-ordinates of the centre and the radius of the circle $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0.$

এখানে $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0,$

বা, $x^2+y^2-\frac{5}{3}x-2y+\frac{4}{3}=0$ (3 দিয়া ভাগ করিয়া),

বা, $(x^2-2.\frac{5}{6}x+\frac{25}{36})+(y^2-2y+1)=1+\frac{25}{36}-\frac{4}{3}$

বা, $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+(y-1)^2=\frac{13}{36}=\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2.$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\frac{\sqrt{13}}{6}$.

উদা. 7. Find the equation to the circle passing through the points (0, 1), (1, 0), (2, 1).

মনে কর, সমীকরণটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

যেহেতু বৃত্তটি (0, 1), (1, 0), (2, 1) বিন্দুগামী,

$\therefore$ ইহাদের স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে

$\therefore\ 1+2f+c=0\cdots\cdots(1),\quad 1+2g+c=0\cdots\cdots(2)$

এবং $5+4g+2f+c=0$ (3).

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $2f-2g=0$, $\therefore\ f=g$.

(1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $-4-4g=0$

$\therefore\ g=-1,\ \therefore\ f=-1$

$\therefore$ (1) হইতে $1-2+c=0$, $\therefore\ c=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

উদা. 8. Find the equation of the circle passing through the vertices of the triangle formed by joining the points (0, 0), $(a, 0)$, $(0, b)$.

মনে কর, সমীকরণটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

যেহেতু বৃত্তটি (0, 0), $(a, 0)$, $(0, b)$ বিন্দুগামী, $\therefore$ ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

অতএব,
$$\left.\begin{aligned} c&=0\cdots(1)\\ a^2+2ag+c&=0\cdots(2)\\ b^2+2bf+c&=0\cdots(3)\end{aligned}\right\}\quad \text{বা,}\quad \left.\begin{aligned} a^2+2ag&=0\cdots\cdots(4)\\ b^2+2bf&=0\cdots\cdots(5)\end{aligned}\right\}$$

একণে, (4) হইতে পাই $2ag=-a^2$, $\therefore\ g=-\frac{a}{2}$.

এবং (5) হইতে পাই $f=-\frac{b}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2-ax-by=0$.

উদা. 9. Find the equation of the circle passing through the points (1, 2), (3, −4) and (5, −6).

মনে কর, সমীকরণটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

যেহেতু বৃত্তটি প্রদত্ত বিন্দুত্রয়গামী, $\therefore\ 5+2g+4f+c=0\cdots\cdots$(i)

$25+6g-8f+c=0\cdots\cdots$(ii)

$61+10g-12f+c=0\cdots\cdots$(iii)

এই তিনটি সমীকরণ সমাধান করিলে পাই $g=-11$, $f=-2$, $c=25$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2-22x-4y+25=0$.

উদা. 10. Show that the four points (0, 0), (1, 1), (5, −5) and (6, −4) are concyclic and find the equation of the circle.

মনে কর, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটি (0, 0), (1, 1) এবং (5, −5) বিন্দুত্রয়গামী।

অতএব, $c=0\cdots$(i)
$2+2g+2f=0\cdots$(ii)
এবং $50+10g-10f=0\cdots$(iii)

বা, $c=0\cdots$(iv)
$1+g+f=0\cdots$(v)
$5+g-f=0\cdots$(vi)

একণে সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া পাই $g=-3$, $f=2$, $c=0$.

$\therefore$ বৃত্ত $x^2+y^2-6x+4y=0$ উপরোক্ত বিন্দুত্রয়গামী।

এখন দেখা যায় যে, $x^2+y^2-6x+4y=0$ সমীকরণটি (6, −4) দ্বারা সিদ্ধ হয়, $\therefore$ (6, −4) বিন্দুটিও ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-6x+4y=0.$$

উদা. 11. Find the equation of a circle passing through the points $(1, -2)$ and $(4, -3)$ and having its centre on the straight line $3x+4y=7$.

মনে কর, বৃত্তটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, সুতরাং ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$.

$\because$ বৃত্তটি $(1, -2)$ এবং $(4, -3)$ বিন্দু দিয়া যায়,

$\therefore$ $5+2g-4f+c=0 \cdots\cdots$(i) এবং $25+8g-6f+c=0 \cdots\cdots$(ii).

আবার, $\because$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, সরলরেখা $3x+4y=7$ এর উপর অবস্থিত, $\therefore$ $-3g-4f=7 \ldots\ldots$(iii).

উপরের (i), (ii), (iii) সমীকরণ তিনটি সমাধান করিলে পাওয়া যায়

$g=-\frac{47}{15}$, $f=\frac{3}{5}$ এবং $c=\frac{11}{3}$.

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণটি হইল $x^2+y^2-\frac{94}{15}x+\frac{6}{5}y+\frac{11}{3}=0$,

অর্থাৎ $15x^2+15y^2-94x+18y+55=0$.

উদা. 12. Find the equation of a circle which passes through the origin and cuts off intercepts 3 and 4 from the axes.

মনে কর, মূলবিন্দুগামী বৃত্তটির কেন্দ্র C এবং উহা x-অক্ষকে A বিন্দুতে ও y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

CM ⊥ OA ও CN ⊥ OB টান। এক্ষণে, OA = 3, OB = 4.

চিত্র 4

$\because$ $OM=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2}$, এবং $ON=\frac{1}{2}OB=2$,

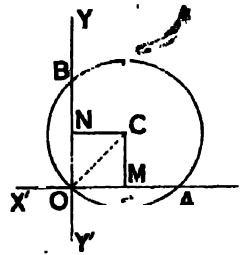
$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{2}, 2)$.

আবার, $OC^2=OM^2+CM^2=(\frac{3}{2})^2+(2)^2=\frac{9}{4}+4=\frac{9+16}{4}=\frac{25}{4}$,

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=OC=\frac{5}{2}$.

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণটি হইল $(x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$,

বা, $x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2-4y+4=\frac{25}{4}$,

বা, $x^2+y^2-3x-4y+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}$, বা, $x^2+y^2-3x-4y=0$.

উদা. 13. Show that the centres of the three circles $x^2+y^2-10x+9=0$, $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ and $x^2+y^2-18x-4y+21=0$ lie on a straight line and also find the equation of the straight line.

বৃত্ত তিনটির সমীকরণগুলি যথাক্রমে $(x-5)^2+y^2=16$,

$$(x-3)^2+(y+1)^2=9 \text{ এবং } (x-9)^2+(y-2)^2=64.$$

অতএব, কেন্দ্রত্রয় হইল $(5, 0)$, $(3, -1)$ এবং $(9, 2)$.

এখন $(5, 0)$ এবং $(3, -1)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y-0=\frac{0-(-1)}{5-3}(x-5)$$

বা, $y=\frac{1}{2}(x-5)$, বা $2y=x-5$. বা $x-2y=5$.

এখন দেখা যাইতেছে যে, তৃতীয় বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(9, 2)$ দ্বারা $x-2y=5$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত কেন্দ্রত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত এবং ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ $x-2y=5$.

উদা. 14. Find the equation of the circle concentric with the circle $x^2+y^2+3x-4y+5=0$ and passing through the point $(-1, 2)$.

$x^2+y^2+3x-4y+5=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2+y^2+3x-4y+c=0$.

যেহেতু এই বৃত্ত $(-1, 2)$ বিন্দুগামী,

অতএব $1+4-3-8+c=0$ ($x=-1$, $y=2$ ধরিয়া), $\therefore$ $c=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2+y^2+3x-4y+6=0$.

উদা. 15. Find the radius of the circle whose centre is at the point $(1, -2)$ and which passes through the point of intersection of the straight lines $3x+y+14$ and $2x+5y=18$.

[C. U. '45]

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=4$, $y=2$.

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইল (4, 2).

অতএব, প্রদত্ত বিন্দু (1, −2) এবং (4, 2) বিন্দুর দূরত্বই নির্ণেয় ব্যাসার্ধ হইবে। $\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2}=5$.

Exercise 19

1. Find the equation of the circle

(i) whose centre is (0,0) and radius is 3 ;

(ii) whose centre is (0, −3) and radius is 5 ;

(iii) whose centre is (2, 3) and radius is 4 ;

(iv) whose centre is (−3, 4) and radius is 3 ;

(v) whose centre is (−3, 2) and radius is $\sqrt{6}$;

(vi) whose centre is (−1, −2) and which passes through (1, −3) ;

(vii) whose centre is (2, 3) and which passes through the point (5, 7) ; [C. U. '57]

2. Find the *centre* and *radius* of the following circles :

(i) $x^2+y^2=4$; (ii) $x^2+y^2=5$;

(ii) $x^2+y^2+2x-4y+3=0$;

(iv) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$;

(v) $2x^2+2y^2+3x-5y-2=0$;

(vi) $x^2+y^2-6x+14y+33=0$. [C. U. '51]

3. Find the area of the triangle formed by joining the centres of the three circles

$$x^2+y^2-10x-6y+30=0,\ x^2+y^2+4x-2y=0 \text{ and}$$
$$x^2+y^2-6x+6y+9=0.$$

4. Find the area of the triangle formed by joining the centres of the circles $x^2+y^2-2x-8y+12=0$,

$x^2+y^2+2x+4y-4=0$, $x^2+y^2-4x-14y+17=0$;

what is your conclusion from the result you find ?

5. Show that the centres of the circles

$x^2+y^2-18x-6y+26=0$, $x^2+y^2+10x+8y+25=0$ and $x^2+y^2-6x+5=0$ are collinear.

6. Prove that the centres of the three circles $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=1$, $x^2+y^2-12x+4y=1$ lie on one straight line, and find the equation of the straight line.

[C. U. (B. Sc) '20]

7. Show that the centres of the circles $x^2+y^2-6x+3=0$, $x^2+y^2+14x-8y+55=0$ and $x^2+y^2-16x+4y+19=0$ lie on a straight line and find the equation of that straight line.

8. Find the equation of the circle which passes through the points :

(i) (0, 0) (4, 0), (0 5) (ii) (1, 2). (3, −4), (5, −6)

(ii) (1, 1), (2, −1), (3, 2) (iv) (2, −1), (2, 3), (4, −1)

[C. U. '12]

(v) (0, 0), (0, 5), (−2, −1). [Mysore '46]

9. Show that the four points (2, 0), (5, −3), (2, −6) and (−1, −3) lie on a circle and find the equation of that circle.

10. Find the equation of the circle passing through the points $(-3, 7)$, $(2, 2)$ and having the centre on the straight line $2x-3y=13$.

11. Find the equation of the circle passing through the origin and making intercepts 6 and 8 on the axes.

12. Find the equation of the circle passing through the point $(0, 0)$ and the points at which the straight line $3x+4y=12$ meets the axes

13. Find the equation of the circle concentric with the circle $x^2+y^2-3x+4y+6=0$ and passing through the point $(3, 2)$.

14. Find the equation of the circle concentric with the circle $2x^2+2y^2+5x-6y+2=0$ and having radius equal to $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

15. Find the equation to the circle whose centre is at the origin and which meets the straight line $\frac{x}{8}-\frac{y}{6}=1$ on the axis of y. [C. U. '40]

16. Obtain the equation of the circle which passes through the two points on the axis of x which are at a distance 2 from the origin and whose radius is 5. [C. U. 1952]

17. ABCD is a square whose side is a; taking AB and AD as axes prove that the equation to the circle circumscribing the sqaure is $x^2+y^2=a(x+y)$. [C. U. 1951]

18. Find the area of the equilateral triangle inscribed in the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

[Hints : যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজ হয় এবং O বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে $\triangle ABC = 3\triangle OBC = \frac{3}{2}$ OB.OC. sin BOC]

19. Find the equation of the circle which passes through the points (4, 3) and (−2, 5) and has its centre on the line $2x-3y=4$. [C. U. '50]

20. Obtain the equation of the circle whose centre is the point (2, 3) and which passes through the intersection of the lines $3x-2y-1=0$ and $4x+y-27=0$. [C. U. '47]

21. A triangle has its vertices at the points (0, 1), (−2, 0) and (1, 0). Find the equation of the straight lines forming the sides. Find also the equation of the circle which has as a diameter that side of the triangle which lies in the first quadrant. [C. U. '50 (Sup.)]

22. Determine the centres and radii of the circles $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ and $x^2+y^2-8x-4y-5=0$, and verify that the centres lie on a straight line, whose equation you are required to obtain. [C. U. '50]

23. Obtain the equation of the circle which passes through the two points on the axis of x which are at a distance 4 from the origin and whose radius is 5. [C. U. '52]

24. Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the lines $x+y=6$, $2x+y=4$ and $x+2y=5$. [Agra '45]

[Hints : দুই-দুইটি সমীকরণ সমাধান করিয়া দুই-দুইটি রেখার ছেদ-বিন্দু নির্ণয় কর। মনে কর নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$; ইহা ছেদবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ। এক্ষণে ইহা হইতে g, f ও c এর মান নির্ণয় কর।...]

25. Prove that the radii of the circles $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y=6$, $x^2+y^2-4x-12y=9$ are in A. P. [C. U. '17]

142. বৃত্তের সহিত কোন সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়।

(a) To find the points of intersection of a straight line with a circle.

মনে কর, বৃত্তটি $x^2+y^2=a^2$ এবং সরলরেখাটি $y=mx+c$.

দ্বিতীয় সমীকরণের y এর মান $mx+c$ প্রথম সমীকরণে বসাইয়া পাই $x^2+(mx+c)^2-a^2=0$, বা, $(m^2+1)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$,

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহা হইতে x এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। এখন এই মান দুইটি $y=mx+c$ তে বসাইলে y এরও দুইটি মান পাওয়া যাইবে। এইরূপে দুইটি বিন্দুর ভুজ-কোটি পাওয়া যাইবে।

অতএব, একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

যদি $4m^2c^2-4(m^2+1)(c^2-a^2)>0$,

তবে বিন্দু দুইটি পৃথক এবং বাস্তব হইবে।

যদি $4m^2c^2-4(m^2+1)(c^2-a^2)=0$,

তবে বিন্দু দুইটি একই বিন্দুতে মিলিবে।

যদি $4m^2c^2-4(m^2+1)(c^2-a^2)<0$, তবে বিন্দু দুইটি কাল্পনিক হইবে, অর্থাৎ সরলরেখাটি বৃত্তটিকে কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে না।

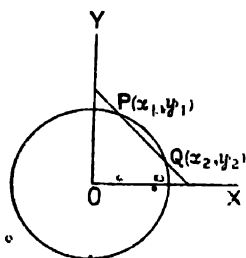
142. (b) To find the length of the chord intercepted on a given str. line by a given circle.

চিত্র 4 (a)

মনে কর বৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2=a^2$ ···(1) এবং

সরল রেখার সমীকরণ $y=mx+c$···(2)

আরও মনে কর সরলরেখা (2), (1) বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)।

এখন, সমীকরণ (2) হইতে yএর মান $mx+c$ সমীকরণ(1) এ বসাইয়া পাই,

$x^2+(mx+c)^2=a^2$, বা, $(m^2+1)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$...(3),

ইহা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহার বীজদ্বয় দ্বারাই P ও Q এর ভুজদ্বয় সূচিত হইবে। সুতরাং সমীকরণ (3) এর বীজদ্বয় হইবে x_1 ও x_2।

$$x_1+x_2=-\frac{2mc}{1+m^2} \text{ এবং } x_1x_2=\frac{c^2-a^2}{1+m^2}.$$

অতএব, $x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{4m^2c^2}{(1+m^2)^2}-\frac{4(c^2-a^2)}{1+m^2}}$

$$=\frac{2}{1+m^2}\sqrt{m^2c^2-(1+m^2)(c^2-a^2)}$$

$$=\frac{2}{1+m^2}\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2} \text{ ......(4)}$$

আবার, P ও Q বিন্দুদ্বয় সরলরেখা (2) এর উপর আছে বলিয়া P ও Q এর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণ (2) সিদ্ধ হইবে। $\therefore$ $y_1=mx_1+c$ এবং $y_2=mx_2+c$. অতএব, $y_2-y_1=m(x_2-x_1)$.

$\therefore$ জ্যা PQ এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+m^2(x_2-x_1)^2}=(x_2-x_1)\sqrt{1+m^2}$$

$=\frac{2}{1+m^2}\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}\sqrt{(1+m^2)}$ [সমীকরণ (4) হইতে x_2-x_1 এর মান বসাইয়া]

$=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}.\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}$ ...(5) ইহাই জ্যা-এর নির্ণেয় দৈর্ঘ্য।

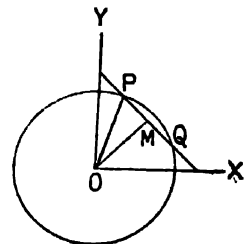
বিকল্প পদ্ধতি : মনে কর, সরলরেখা $y=mx+c$, বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PQ জ্যার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে।

কেন্দ্র O হইতে জ্যা PQ এর উপর OM লম্ব টানা হইল।

$$\therefore OM=\frac{m.0-0+c}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$$

এবং $OP=a$ [বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

আমরা জানি, কেন্দ্র হইতে জ্যা-এর উপর লম্ব টানিলে জ্যাটি লম্ব দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়,

$\therefore$ PQ = 2PM.

চিত্র 4 (b)

যেহেতু $PM^2 = OP^2 - OM^2$, $\therefore \; PM = \sqrt{OP^2 - OM^2}$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}$$

অতএব, PQ জ্যার নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= 2PM = \dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}} \sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}$.

দ্রষ্টব্য: জ্যা-এর ছেদবিন্দুদ্বয় ক্রমশ: নিকটবর্তী হইতে থাকিলে জ্যা PQ এর দৈর্ঘ্যও কমিতে থাকিবে। ক্রমশ: নিকটবর্তী হইতে হইতে যখন P ও Q বিন্দুদ্বয় একই বিন্দুতে সমাপতিত হইবে তখন জ্যাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং এই অবস্থানে জ্যা PQ এর দৈর্ঘ্য $= 0$ হইবে।

সুতরাং সরলরেখা (2), বৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইবার সর্ত $PQ = 0$

অর্থাৎ $\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}} \sqrt{a^2(1+m^2) - c^2} = 0$, বা $c^2 = a^2(1+m^2)$.

$\therefore \; c = \pm a\sqrt{1+m^2}$.

143. স্পর্শক (Tangent).

একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে। যদি ছেদবিন্দু দুইটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়, তখন সরলরেখাটিকে বৃত্তের স্পর্শক (tangent) বলে। যে বিন্দুতে ছেদবিন্দু দুইটি মিলিত হয় তাহাকে স্পর্শবিন্দু (points of contact) বলে।

144. $y = mx + c$ সরলরেখার $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত।

[To find the condition that the straight line $y = mx + c$ may touch a circle $x^2 + y^2 = a^2$.]

$\because \; y = mx + c$; $\therefore \; x^2 + y^2 = a^2$ সমীকরণে y এর ঐ মান বসাইয়া পাই $x^2 + (mx+c)^2 = a^2$,

$$\text{বা, } (m^2+1)x^2 + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0;$$

প্রদত্ত সরলরেখাটি স্পর্শক হইবে যদি এই সমীকরণটির বীজ দুইটি সমান হয় এবং তাহা হইবার সর্ত হইল $4m^2c^2 - 4(m^2+1)(c^2 - a^2) = 0$,

বা, $m^2c^2-(m^2c^2-m^2a^2+c^2-a^2)=0$, বা, $m^2a^2-c^2+a^2=0$,

বা, $c^2=a^2(m^2+1)$ বা, $c=\pm a\sqrt{m^2+1}$.

$\therefore$ $y=mx+c$ সরলরেখার $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার সর্ত হইল $c=\pm a\sqrt{m^2+1}$.

[দ্রষ্টব্য : অতএব, $y=mx\pm a\sqrt{m^2+1}$ সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটি সতত $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।]

145. (a) **$x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ at the point (x_1, y_1)].

মনে কর, (x_2, y_2) ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত আর একটি বিন্দু।

এখন (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\left(x-x_1\right);$$

কিন্তু যেহেতু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বৃত্তের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু,

$$\left.\begin{array}{l}\text{অতএব, } x_1^2+y_1^2=a^2\\ \text{এবং } x_2^2+y_2^2=a^2\end{array}\right\}\quad \text{বা } (x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)=0,$$

বা, $(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$,

$$\therefore\quad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2},$$

$\therefore$ ঐ বিন্দুদ্বয়গামী জ্যা-এর সমীকরণ হইল,

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\left(x-x_1\right),$$

এই সরলরেখাটি স্পর্শক হইবে যদি $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ হয়।

$$\therefore\quad \text{স্পর্শকের সমীকরণ } y-y_1=-\frac{2x_1}{2y_1}\left(x-x_1\right)=-\frac{x_1}{y_1}\left(x-x_1\right),$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$,

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$. এক্ষণে যেহেতু $x_1^2 + y_1^2 = a^2$,

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\boldsymbol{xx_1 + yy_1 = a^2}$.

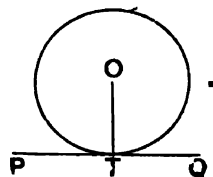
বিকল্প পদ্ধতি :—

আমরা জানি স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ OT স্পর্শক PTQ এর উপর লম্ব।

T এর ভুজ-কোটি (x_1, y_1) এবং O এর (0,0)

∴ OT রেখার সমীকরণ $y = \frac{y_1}{x_1}.x$

চিত্র 5

মনে কর, PTQ এর সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$,

কিন্তু OT, PTQ এর উপর লম্ব বলিয়া $m.\frac{y_1}{x_1} = -1$ ∴ $m = -\frac{x_1}{y_1}$.

∴ স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\left(x - x_1\right)$,

বা, $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$, বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$.

যেহেতু (x_1, y_1), $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের উপর একটি বিন্দু,

∴ $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

∴ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

∴ $\boldsymbol{xx_1 + yy_1 = a^2}$.

145. (*b*) To find the co-ordinates of the point of contact when $y = mx + c$ touches the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

মনে কর স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y')। এখন স্পর্শবিন্দু (x', y') এ বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ এর স্পর্শকের সমীকরণ $xx' + yy' = a^2$,

বা $y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{a^2}{y'} \cdots(1)$

$y = mx + c$ রেখা (x', y') বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হইলে সমীকরণ (1) ও $y = mx + c$ সমীকরণদ্বয় একই সমীকরণ হইবে।

অর্থাৎ $m=-\frac{x'}{y'}$ এবং $c=\frac{a^2}{y'}$ হইবে।

$\therefore\ y'=\frac{a^2}{c}$ এবং $x'=-my'=-\frac{ma^2}{c}$.

অতএব নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{ma^2}{c},\ \frac{a^2}{c}\right)$।

আবার, যেহেতু $c=a\sqrt{1+m^2}$, সুতরাং

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ও লেখা যায়।

146. বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ধরিয়া (x_1, y_1) বিন্দুতে উহার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the tangent to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ at the point (x_1, y_1)]

মনে কর, বৃত্তের উপরে আর একটি বিন্দু (x_2, y_2)। এখন (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$.

কিন্তু যেহেতু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বৃত্তের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু,

$$\therefore\ x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

$$\text{এবং } x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0.$$

$$\therefore\ (x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)+2g(x_1-x_2)+2f(y_1-y_2)=0,$$

বা, $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2g)+(y_1-y_2)(y_1+y_2+2f)=0$,

$$\therefore\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী জ্যা-এর সমীকরণ

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}\left(x-x_1\right),$$

এই সরলরেখা স্পর্শক হইবে যদি $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ হয়।

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = -\dfrac{2x_1 + 2g}{2y_1 + 2f}\left(x - x_1\right)$,

বা, $y - y_1 = -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f}\left(x - x_1\right)$,

বা, $yy_1 + fy - y_1^2 - fy_1 = -xx_1 - gx + x_1^2 + gx_1$

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$.

এখন উভয় দিকে $gx_1 + fy_1 + c$ যোগ করিয়া পাই

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\boldsymbol{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.}$$

[দ্রষ্টব্য :—আমরা দেখিতেছি যে, বৃত্তের সমীকরণে x^2 এর স্থলে xx_1, y^2 এর স্থলে yy_1, $2x$ এর স্থলে $(x + x_1)$ এবং $2y$ এর স্থলে $(y + y_1)$ লিখিলেই স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়। পরে আমরা দেখিব যে এইভাবে লিখিলেই অন্য বক্ররেখারও স্পর্শক পাওয়া যাইবে।]

147. Normal (অভিলম্ব)।

যে সরলরেখা স্পর্শকের উপরে স্পর্শ-বিন্দুতে লম্ব তাহাকে Normal বলে।

148. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal-এর) সমীকরণ নির্ণয়।

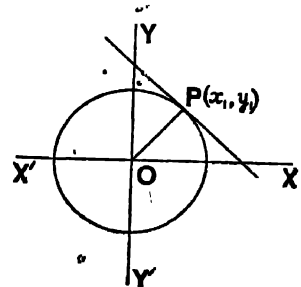
[To find the equation to the normal at the point (x_1, y_1) of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.]

আমরা জানি স্পর্শ-বিন্দুগামী ব্যাস স্পর্শকের উপর লম্ব হয়।

$\because$ (0, 0) এবং (x_1, y_1) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - 0 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}\left(x - 0\right), \text{ বা, } y = \frac{y_1}{x_1}x.$$

$\therefore$ Normal এর সমীকরণ হইল $\boldsymbol{xy_1 - yx_1 = 0}$.

চিত্র 6

বিকল্প পদ্ধতি : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$,

বা, $y=-\frac{x_1}{y_1}.x+\frac{a^2}{y_1}$ ......(i)

আবার, (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$y-y_1=m(x-x_1)$......(ii)

কিন্তু সরলরেখা (i) এবং (ii) পরস্পর লম্ব,

$\therefore\ m\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)=-1,\quad \therefore\ m=\frac{y_1}{x_1}$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-y_1=\frac{y_1}{x_1}\left(x-x_1\right)$, বা, $xy_1-yx_1=0$.

[দ্রষ্টব্য :—ঐ সমীকরণটি হইতে দেখা যায় যে, অভিলম্বটি মূলবিন্দু দিয়া যায় এবং ঐ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।]

149. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের (Normal-এর) সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to the normal at the point (x_1, y_1). of the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ-কোটি $(-g, -f)$,

$\therefore$ $(-g, -f)$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$\therefore\ y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}\left(x-x_1\right)$

বা, $y(x_1+g)-y_1(x_1+g)=x(y_1+f)-x_1(y_1+f)$,

বা, $x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0$.

বিকল্প পদ্ধতি : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$,

বা, $y=-\frac{x_1+g}{y_1+f}.x-\frac{gx_1+fy_1+c}{y_1+f}$.

আবার, (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$

$$\therefore \quad m\left(-\frac{x_1+g}{y_1+f}\right)=-1, \quad \therefore \quad m=\frac{y_1+f}{x_1+g}.$$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$,

বা, $\boldsymbol{x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0}$.

[দ্রষ্টব্য :—এই সমীকরণটি হইতেও দেখা যায় যে, (i) বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ দ্বারা normal এর সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অতএব, বৃত্তের কোন বিন্দুতে normalটি বৃত্তের কেন্দ্রগামী হয়। (ii) আবার, বিপরীতক্রমে বলা যায় যে, কেন্দ্রগামী যে কোন সরলরেখাই বৃত্তের normal হইয়া থাকে।]

150. বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

[Two tangents can be drawn to a circle from an external point.]

সরলরেখা $y=mx\pm a\sqrt{m^2+1}$, বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ এর স্পর্শক। যদি এই স্পর্শক বহিঃস্থ (x', y') বিন্দু দিয়া যায়, তবে $y'=mx'\pm a\sqrt{m^2+1}$,

বা, $(y'-mx')^2=a^2(m^2+1)$,

বা, $(x'^2-a^2)m^2-2x'y'm+(y'^2-a^2)=0$, এবং ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। $\therefore$ m এর দুইটি মান পাওয়া যায়;

এই মান দুইটি $y=mx\pm a\sqrt{m^2+1}$ এ বসাইলে দুইটি স্পর্শক পাওয়া যাইবে।

151. Chord of Contact.

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে যে দুইটি স্পর্শক টানা যায় তাহাদের স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে chord of contact বলে।

152. Chord of contact এর সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the chord of contact of the point (x', y') with respect to the circle $x^2+y^2=a^2$.]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটিতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$xx_1+yy_1=a^2 \text{ এবং } xx_2+yy_2=a^2.$$

যদি এই স্পর্শকদ্বয় (x', y') বিন্দু দিয়া যায়, তবে

$$\left.\begin{array}{r} x'x_1+y'y_1=a^2 \\ \text{এবং } x'x_2+y'y_2=a^2 \end{array}\right\}. \quad \text{ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে যে}$$

$xx'+yy'=a^2$ সরলরেখাটি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এই স্পর্শবিন্দুদ্বয় দিয়া যায়।

$\therefore$ (x', y') বিন্দুর chord of contact হইল $xx'+yy'=a^2$.

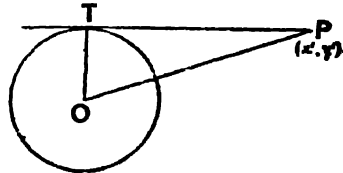
[দ্রষ্টব্য ঃ—(x', y') বিন্দুতে স্পর্শক এবং (x', y') বিন্দুর chord of contact এই দুইটি সরলরেখার একই সমীকরণ $xx'+yy'=a^2$. পার্থক্য এই যে যদি (x', y') বিন্দুটি বৃত্তের বহিঃস্থ হয়, তবে $xx'+yy'=a^2$ বৃত্তের (x', y') বিন্দুর chord of contact হয়। আর যদি (x', y') বিন্দুটি বৃত্তের উপরিস্থ বিন্দু হয়, তবে $xx'+yy'=a^2$ বৃত্তের (x', y') বিন্দুতে স্পর্শক হয়।]

153. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

বহিঃস্থ (x', y') বিন্দু হইতে (i) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং (ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the tangent from an external point (x', y') to the circle

(i) $x^2+y^2=a^2$

(ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.]

চিত্র 7

P বিন্দু হইতে PT স্পর্শক। OP, OT যুক্ত করা হইল। এখন, যেহেতু $\angle OTP = 1$ সমকোণ, $\therefore$ $PT^2 = OP^2 - OT^2$.

(i) P এবং O বিন্দুর ভুজ-কোটি যথাক্রমে (x', y') এবং $(0, 0)$.

$\therefore\ OP^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2$.

আবার, OT = ব্যাসার্ধ $= a$,

$\therefore\ PT^2 = OP^2 - OT^2 = x^2 + y^2 - a^2$.

$\therefore$ (স্পর্শক)$^2 = x^2 + y^2 - a^2$.

(ii) P এবং O বিন্দুর ভুজ-কোটি যথাক্রমে (x', y') এবং $(-g, -f)$

$\therefore\ OP^2 = (x'+g)^2 + (y'+f)^2$.

আবার, OT = ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c}$

$\therefore\ PT^2 = (x'+g)^2 + (y'+f)^2 - (g^2+f^2-c)$

$\therefore$ (স্পর্শক)$^2 = x'^2 + y'^2 + 2gx' + 2fy' + c$.

[দ্রষ্টব্য :—(i) এবং (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, যদি বৃত্তের সমীকরণ এমন ভাবে সাজান যায় যে ডানপক্ষ শূন্য হয়, তবে x, y এর মান x', y' বসাইলেই স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের বর্গ পাওয়া যাইবে।]

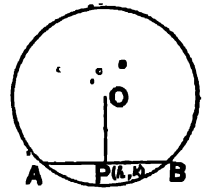
154. কোন বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the chord of a circle which is bisected at a given point.]

মনে কর, বৃত্তটি $x^2 + y^2 = a^2$, এবং নির্দিষ্ট বিন্দু P (h, k).

P বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$y - k = m(x - h)$.

O বৃত্তের কেন্দ্র, $\therefore$ OP সরলরেখার সমীকরণ হইল $y = \frac{k}{h}x$.

চিত্র 8

আবার $\because$ AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু P, $\therefore\ OP \perp AB$,

$$\therefore m \times \frac{k}{h} = -1, \quad \therefore \quad m = -\frac{h}{k}.$$

$\therefore$ যে জ্যা এর মধবিন্দু (h, k) তাহার সমীকরণ হইল

$$y - k = -\frac{h}{k}(x - h), \text{ বা, } h(x-h) + k(y-k) = 0.$$

155. To find the locus of the middle points of all chords of a circle, passing through a fixed point (α, β)

মনে কর, কোন একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু (h, k)

$\therefore$ ইহার সমীকরণ $h(x-h)+k(y-k)=0$.

যেহেতু ঐ জ্যা (α, β) বিন্দু দিয়া যায়, অতএব $h(\alpha-h)+k(\beta-k)=0$,

বা, $h^2+k^2-\alpha h-\beta k=0$.

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0$.

$\therefore$ সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত।

156. Find the locus of the middle points of the chords of the circle $x^2+y^2=a^2$, which pass through the fixed point (h, k).

[C. U. (B. Sc.) '37)]

মনে কর (h, k) বিন্দুগামী যে কোন জ্যা এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) সুতরাং উহার সমীকরণ হইবে $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$.

আবার, $\because$ ঐ জ্যাটি (h, k) বিন্দুগামী, $\therefore$ ঐ সমীকরণ হইতে পাই $hx_1+ky_1=x_1^2+y_1^2$.

অতএব, $(x_1, y_1$ বিন্দুটির অর্থাৎ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $hx+ky=x^2+y^2$, বা, $x^2+y^2-hx-ky=0$, ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ; সুতরাং নির্ণেয় সঞ্চারপথটি হইল একটি বৃত্ত এবং সমীকরণটি ধ্রুবকরাশি বর্জিত বলিয়া বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

উদাহরণমালা 20

উদা. 1. To find the equation of a circle which tou. each axis at a distance of 3 from the origin.

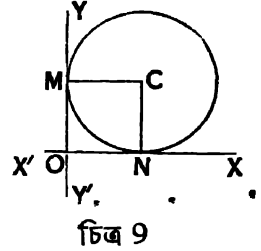
চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে

$ON = 3, \ OM = 3,$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র C এর ভুজ-কোটি (3, 3) এবং ব্যাসার্ধ $= 3$.

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$,

বা, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$.

চিত্র 9

উদা. 2. To find the equation of a circle of radius 5 that touches each axis.

[উদা. 1 এর চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে] $CN = CM =$ ব্যাসার্ধ $= 5$.

$\therefore$ C এর ভুজ-কোটি (5, 5).

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$,

বা, $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$.

উদা. 3. Write down the equations of the tangents to the circles (i) $x^2 + y^2 = 5$ (ii) $x^2 + y^2 + 7x + 12y + 12 = 0$ at the points $(1, -2)$.

(i) এখানে স্পর্শকের সমীকরণ $x.1 + y(-2) = 5$, বা $x - 2y = 5$.

(ii) এখানে $x^2 + y^2 + 7x + 12y + 12 = 0$,

বা, $x.x + y.y + \frac{7}{2}(x + x) + 6(y + y) + 12 = 0$.

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$x.1 + y(-2) + \frac{7}{2}(x + 1) + 6(y - 2) + 12 = 0$,

বা, $x - 2y + \frac{7}{2}x + 6y + \frac{7}{2} - 12 + 12 = 0$,

বা, $\frac{9}{2}x + 4y + \frac{7}{2} = 0$, বা, $9x + 8y + 7 = 0$.

উদা. 4. Find the equation to the tangents to the circle $x^2+y^2=20$, which are parallel to the line $x+2y+5=0$.

$x+2y+5=0$ রেখাটির সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x+2y=c$,

বা, $x=c-2y$.

এখন বৃত্তের সমীকরণে x এর মান $c-2y$ বসাইয়া পাই

$(c-2y)^2+y^2-20=0$, বা, $5y^2-4cy+c^2-20=0$.

এখন যদি $x+2y=c$ স্পর্শক হয়, তবে ঐ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore$ $16c^2-4.5.(c^2-20)=0$, বা, $4c^2-5(c^2-20)=0$,

বা, $c^2=100$, $\therefore$ $c=\pm 10$.

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইল $x+2y=\pm 10$,

অর্থাৎ $x+2y=10$ ও $x+2y+10=0$.

উদা. 5. Find the equations to the tangents to the circle $x^2+y^2-3x+10y-15=0$, which are perpendicular to the line $12x+5y=1$ and also find their points of contact.

$12x+5y=1$ রেখার উপর লম্ব হইবে এমন যে কোন সরল রেখার সমীকরণ হইবে $5x-12y=c$, বা $x=\dfrac{c+12y}{5}$.

এখন বৃত্তের প্রদত্ত সমীকরণে x এর মান $\frac{1}{5}(c+12y)$ বসাইয়া পাই,

$\frac{1}{25}(c+12y)^2+y^2-\frac{3}{5}(c+12y)+10y-15=0$,

বা, $c^2+144y^2+24cy+25y^2-15c-180y+250y-375=0$,

বা, $169y^2+2(12c+35)y+(c^2-15c-375)=0$......(1)

যদি $5x-12y=c$ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে সমীকরণ (1) এর বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore$ $4(12c+35)^2=169\times 4(c^2-15c-375)$ হইবে,

বা, $144c^2+840c+1225=169c^2-2535c-63375$,

বা, $25c^2-3375c-64600=0$, বা, $c^2-135c-2584=0$

বা, $(c+17(c-152)=0$, $\therefore\ c=-17$ বা 152.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $5x-12y+17=0$ এবং $5x-12y=152$.

আবার, সমীকরণ (1) এ, $c=-17$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$169y^2+2(-17\times12+35)y+(289-15\times-17-375)=0$,

বা, $169y^2-2.169y+169=0$, বা, $y^2-2y+1=0$,

বা, $(y-1)^2=0$, $\therefore\ y=1$,

১ম স্পর্শকের সমীকরণে $y=1$ বসাইয়া পাই, $5x-12+17=0$,

বা, $5x+5=0$, $\therefore\ x=-1$.

অতএব, প্রথম স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$।

পুনরায়, সমীকরণ (1)এ $c=152$ বসাইয়া এবং সরল করিয়া পাওয়া যায় $169y^2+2.1859y+20449=0$,

বা, $y^2+2.11y^2+121=0$, বা, $(y+11)^2=0$, $\therefore\ y=-11$.

এখন দ্বিতীয় স্পর্শকের সমীকরণে $y=-11$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$5x+132=152,\ \therefore\ x=4.$$

অতএব দ্বিতীয় স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, -11)$.

উদা. 6. Find the length of the chord cut off from the straight line $y=2x-5$ by the circle $x^2+y^2-6x+8y-5=0$.

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-6x+8y-5=0$

বা, $(x-3)^2+(y+4)^2=30$.

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(3,-4)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{30}$.

এখন কেন্দ্র $(3,-4)$ হইতে সরলরেখা $y=2x-5$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $OM=\dfrac{2.3-(-4)-5}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$ [অনুচ্ছেদ 142 (b) এর বিকল্প প্রমাণের চিত্র 4 (b) দেখ]

$\therefore\ PM^2=OP^2-OM^2=30-5=25$ $\therefore\ PM=5$.

অতএব, জ্যা এর নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=2.5=10$.

উদা. 7. Show that the line $x-y+2=0$ touches the circle $x^2+y^2=2$ and find the co-ordinates of the point of contact.

সরলরেখাটি $y=x+2$. এখন y এর মান বৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$x^2+(x+2)^2=2, \text{ বা } 2x^2+4x+2=0,$$

বা, $x^2+2x+1=0$, বা, $(x+1)^2=0$, $\therefore$ $x=-1$ এবং -1.

$\because$ বীজদ্বয় সমান, $x-y+2=0$ বৃত্ত $x^2+y^2=2$ এর স্পর্শক।

আবার, $\because$ $x=-1$, $\therefore$ $y=-1+2=1$, $\therefore$ স্পর্শবিন্দু $(-1, 1)$

উদা. 8. For what values of k, the line $x+3y=k$ touches the circle $x^2+y^2-3x-3y+2=0$ and in that case, find the point of contact.

$x=k-3y$ এই মান বৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$(k-3y)^2+y^2-3(k-3y)-3y+2=0,$$

বা, $10y^2+6(1-k)y+(k^2-3k+2)=0\cdots\cdots$(i)

অতএব, এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

$\therefore$ $36(1-k)^2-40(k^2-3k+2)=0$,

বা, $9(1-2k+k^2)-10(k^2-3k+2)=0$, বা, $k^2-12k+11=0$,

বা, $(k-1)(k-11)=0$, $\therefore$ $k=1$ বা, 11.

সমীকরণ (i)-এ $k=1$ বসাইয়া পাই $10y^2=0$, বা, $y=0$,

$\therefore$ স্পর্শক $x+3y=1$ এর স্পর্শবিন্দু $(1, 0)$.

আবার, (i)-এ $k=11$ বসাইয়া পাই $10y^2-60y+90=0$,

বা, $y^2-6y+9=0$, বা, $(y-3)^2=0$, $\therefore$ $y=3$,

$\therefore$ স্পর্শক $x+3y=11$ এর স্পর্শবিন্দু $(2, 3)$.

* উদা. 9. Find the equation to a circle touching the straight line $5x+12y=1$ and having its centre at the point $(3, 4)$.

মনে কর, বৃত্তটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. এখানে $g=-3, f=-4$,

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+y^2-6x-8y+c=0$, এবং ইহার ব্যাসার্ধ $=\sqrt{9+16-c}=\sqrt{25-c}$.

(3, 4) বিন্দু হইতে সরলরেখা $5x+12y=1$ এর উপর

লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{15+48-1}{\sqrt{25+144}}=\dfrac{62}{13}$, $\therefore$ $\frac{62}{13}=\sqrt{25-c}$,

বা, $\frac{3844}{169}=25-c$, $\therefore$ $c=25-\frac{3844}{169}=\frac{381}{169}$.

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+y^2-6x-8y+\frac{381}{169}=0$.

উদা. 10. A circle, the co-ordinates of whose centre are both positive, touches both the axes of co-ordinates. If it also touches the line $3x-4y+6=0$, find the equation and the co-ordinates of its points of contact with the given line.

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক বা ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক বলিয়া বুঝা যায় যে বৃত্তটি প্রথমপাদে অবস্থিত। আরও. বৃত্তটি অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে, সুতরাং কেন্দ্র হইতে অক্ষদ্বয়ের দূরত্ব সমান এবং প্রত্যেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

এখন মনে কর, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=h$.

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হইবে $(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$.

কেন্দ্র (h, h) হইতে প্রদত্ত রেখা $3x-4y+6=0$ এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্যও $=h$ হইবে। $\therefore$ $h=\dfrac{3h-4h+6}{\sqrt{3^2+4^2}}$, বা $5h=6-h$ $\therefore$ $h=1$,

সুতরাং বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,

বা, $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

বৃত্তের সমীকরণ ও প্রদত্ত রেখার সাধারণ বিন্দুই হইবে স্পর্শবিন্দু। সরলরেখাটির সমীকরণ হইতে পাই $x=\dfrac{4y-6}{3}$, x এর এই মান বৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই, $\left(\dfrac{4y-6}{3}-1\right)^2+(y-1)^2=1$,

বা, $\left(\frac{4y-9}{3}\right)^2+y^2-2y+1=1$, বা, $25y^2-90y+81=0$,

বা, $(5y-9)^2=0$, $\therefore\ y=\frac{9}{5}$. $\therefore\ x=\frac{4\times\frac{9}{5}-6}{3}=\frac{6}{5\times 3}=\frac{2}{5}$.

অতএব, নির্ণেয় স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

উদা. 11. Find the equation of the circle which cuts off intercepts equal to 5 and 2 on the axes of x and y respectively and whose centre lies on the line $2x-y=6$. Show that there are two such circles satisfying the given conditions.

মনে কর, বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\cdots(1)$, ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ প্রদত্ত সরলরেখা $2x-y=6$ এর উপর আছে বলিয়া পাই

$$-2g+f=6\cdots(2)$$

x-অক্ষের সমীকরণ $y=0$. $\therefore$ x-অক্ষ যে যে বিন্দুতে বৃত্ত (1)কে ছেদ করিবে সেই বিন্দুদ্বয়ের ভুজ $x^2+0+2gx+2f.0+c=0$,

বা, $x^2+2gx+c=0$, এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারাই নিরূপিত হইবে। মনে কর, ইহার বীজদ্বয় x_1 ও x_2.

$\therefore$ $x_2+x_1=-2g$ এবং $x_1x_2=c$

$\therefore$ $x_2-x_1=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4g^2-4c}$,

কিন্তু $x_2-x_1=5$ (সর্তানুযায়ী), $\therefore$ $4g^2-4c=25\cdots(3)$

আবার, y-অক্ষের সমীকরণ $x=0$. $\therefore$ y-অক্ষ বৃত্ত (1)-কে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে সেই বিন্দুদ্বয়ের কোটি $0+y^2+2g.0+2fy+c=0$, বা, $y^2+2fy+c=0$, এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারা নিরূপিত হয়। এই সমীকরণের বীজদ্বয় y_1 ও y_2 ধরিয়া পাই, $y_2+y_1=-2f$ এবং $y_1y_2=c$.

আবার, সর্তানুযায়ী $y_2-y_1=2$,

$\therefore 2=\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4f^2-4c}$. $\therefore 4f^2-4c=4\cdots(4)$

সমীকরণ (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া পাই, $4g^2-4f^2=21\cdots\cdots(5)$

এবং সমীকরণ (2) হইতে পাওয়া যায় $f=2g+6$. f এর এই মান (5) এ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$4g^2-4(2g+6)^2=21, \quad \text{বা,} \quad 4g^2+32g+55=0,$$

$$\text{বা,} \quad (2g+5)(2g+11)=0, \quad \therefore \quad g=-\tfrac{5}{2} \text{ বা } -\tfrac{11}{2}.$$

g এর এই দুইটি মান সমীকরণ (2)-এ বসাইয়া পাই $f=1$ বা -5.

আবার f এর মানদ্বয় (4)-এ বসাইয়া পাই, $c=0$ বা 24.

g, f, c এর দুইটি করিয়া মান পাওয়া যাইতেছে বলিয়া প্রদত্ত সর্তাধীনে দুইটি বৃত্ত হইবে।

অতএব, একটি বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2+2.(-\tfrac{5}{2})x+2.1.y+0=0, \text{ বা, } \quad x^2+y^2-5x+2y=0;$$

এবং অপরটির সমীকরণ হইল $x^2+y^2+2(-\frac{11}{2})x+2(-5)y+24=0$,

$$\text{বা,} \quad x^2+y^2-11x-10y+24=0.$$

* **উদা. 12.** Find the equations to the two tangents to the circle $x^2+y^2=3$, which make an angle of 60° with the x-axis.

[C. U. (B. Sc.) '55]

এখানে বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$, সুতরাং ঐ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$.

এখানে $m=\tan 60°=\sqrt{3}$ এবং $a=\sqrt{3}$,

$$\therefore \quad y=x\sqrt{3}\pm\sqrt{3}\sqrt{1+3}=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}\sqrt{4}=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{3},$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণদ্বয় হইল $y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{3}$.

উদা. 13. If $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ be a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$, show that $\cos^2\alpha=1$. [C. U. (B. Sc.) '19]

$\because \quad y=mx+c$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইলে $c^2=a^2(1+m^2)$ হয়,

$\therefore \quad y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ায় $a^2\sec^2\alpha=a^2(1+\sin^2\alpha)$, বা, $\sec^2\alpha=1+\sin^2\alpha$,

বা, $\sec^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha$, বা, $\tan^2\alpha = \sin^2\alpha$, বা, $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha$

$$\therefore \cos^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$$

উদা. 14. Show that the circles $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ and $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ touch each other and find their point of contact.

এখানে প্রথম বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-4x+6y+8=0$,

বা, $(x-2)^2+(y+3)^2=5=(\sqrt{5})^2$.

$\therefore$ এই বৃত্তের কেন্দ্র হইল $(2,-3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{5}$.

অনুরূপে, দ্বিতীয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-10x-6y+14=0$,

বা, $(x-5)^2+(x-3)^2=20=(2\sqrt{5})^2$.

$\therefore$ এই বৃত্তের কেন্দ্র হইল $(5, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=2\sqrt{5}$.

এক্ষণে, ঐ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $=\sqrt{(5-2)^2+(3+3)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

আবার, ব্যাসার্ধ দুইটির সমষ্টি $=\sqrt{5}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

= কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা।

$\therefore$ বৃত্ত দুইটি পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে।

আবার, ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাত $=\sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 1 : 2$,

$\therefore$ $(2,-3)$ ও $(5, 3)$ কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি স্পর্শ-বিন্দুতে $1 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে।

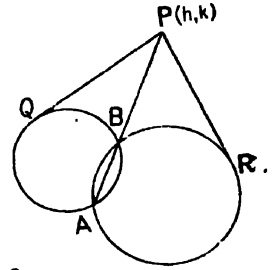
$\therefore$ ঐ স্পর্শবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল

$$\left\{\frac{2\times 2+1\times 5}{2+1}, \frac{2\times(-3)+1\times 3}{2+1}\right\}$$ অর্থাৎ $(3,-1)$.

উদা. 15. Find the equation to the common chord of the two circles $x^2+y^2+10x+8y+32=0$ and $x^2+y^2-4x-6y+12=0$, and show that this line is perpendicular to the line of centres of the circles.

মনে কর, $x^2+y^2+10x+8y+32=0 \cdots (1)$

এবং $x^2+y^2-4x-6y+12=0 \cdots (2)$

বৃত্তদ্বয় পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা AB এবং এই সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। AB কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশের উপর যে কোন বিন্দু P (h, k) লও। P হইতে বৃত্ত (1) এর স্পর্শক PQ ও বৃত্ত (2)-এর স্পর্শক PR টান।

চিত্র 6 (a)

এখন, বৃত্ত (1)-এর PQ স্পর্শক এবং PBA ছেদক, $PQ^2 = PA.PB.$

আবার বৃত্ত (2)-এর PR স্পর্শক এবং PBA ছেদক, $PR^2 = PA.PB.$

$\therefore \quad PQ^2 = PR^2.$

এখন $PQ^2 = h^2+k^2+10h+8k+32$

এবং $PR^2 = h^2+k^2-4h-6k+12$ [অনুচ্ছেদ 146 দেখ]

অতএব, $h^2+k^2+10h+8k+32 = h^2+k^2-4h-6k+12$

বা, $14h+14k+20=0,$ বা $7h+7k+10=0.$

P বিন্দুর সঞ্চারপথই AB জ্যার সমীকরণ হইবে।

অতএব সাধারণ জ্যা'র নির্ণেয় সমীকরণ $7x+7y+10=0.$

পুনরায়, সমীকরণ (1)-কে সাজাইয়া লিখিয়া পাই $(x+5)^2+(y+4)^2=9$ এবং সমীকরণ (2)-কে সাজাইয়া লিখিয়া পাই $(x-2)^2+(y-3)^2=1.$

$\therefore$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র সংযোজক রেখার gradient $= \dfrac{-4-3}{-5-2} = 1,$

এবং বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর gradient $= -1.$

$\therefore$ উহাদের গুণফল $= 1 \times -1 = -1,$

সুতরাং সাধারণ জ্যা কেন্দ্র সংযোজক রেখার উপর লম্ব।

Exercsie 20

1. Find the equation of the circle which touches the co-ordinate axes at (1, 0) and (0, 1). [C. U.]

2. Find the equation to the circle of radius 3, which touches both the axes.

3. Show that the circles $x^2+y^2-14x-10y+58=0$ and $x^2+y^2-2x+6y-26=0$ touch each other externally.

4. Show that the circles $x^2+y^2-12x-16y-125=0$ and $x^2+y^2+12x-6y+41=0$ touch each other internally.

5. Find the equation of the circle which touches x-axis, passes through the point (1, 1) and whose centre lies in the first quadrant on the line $x+y=3$. [C. U]

6. Find the equation to the circle which touches the x-axis at a distance $+5$ from the origin and cuts off a chord of length 24 from the y-axis. [C. U.]

7. Find the co-ordinates of the point of intersection of the circle $x^2+y^2=25$ with the straight line $x+y=7$.

8. Find where the line $3x+4y+7=0$ cuts the circle $x^2+y^2-4x-6y-12=0$. [C. U.]

9. Prove that the lines $x=7$, $y=8$ both touch the circle $x^2+y^2-4x-6y=12$. Find the points of contact. [C. U.]

10. Find the length of the chord cut off from the straight line (a) $3x-4y+15=0$ by the circle $x^2+y^2=25$; (b) $3x+4y-c=0$ by the circle $x^2+y^2=64$. [W. B. H. S. 1960]

11 (a). Find the equation to that chord of the circle $x^2+y^2=81$ which is bisected at the point $(-2, 3)$. [C. U.]

(b). Find the equation to the chord of the circle $x^2+y^2=25$, which is bisected at the point (1, 2).

12. Find the equation to the chord of the circle $x^2+y^2-4x+6y-3=0$, which is bisected at the point $(1, -2)$.

13. Write down the equation of the tangent to the following circles :—

(i) $x^2+y^2=25$ at the point $(3, -4)$.

(ii) $x^2+y^2+4x+6y-87=0$ at the point $(4, 5)$.

(iii) $x^2+y^2-8x+10y=128$ at the point $(-8, 0)$.

14. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=41$ at the points where $x=4$.

15. Find the equations of the normals to the circles :—

(i) $x^2+y^2=29$ at the point $(2, 5)$.

(ii) $x^2+y^2+4x+6y=87$ at the point $(6, 3)$.

16. For what values of k, the straight line $y=kx+13$ touches the circle $x^2+y^2=144$.

17. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=9$, which are parallel to the line $3x+4y=0$. [C. U.]

18. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$, which are perpendicular to the line $4x-3y=12$.

19. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$,

(i) Which are parallel to the straight line $3x+4y=0$.

(ii) Which pass through the point $(13, 0)$. [C. U. '58]

20. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2-6x+4y=12$, which are parallel to the line $4x+3y+5=0$. [C. U.]

21. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2-6x+4y=7$, which are perpendicular to the line $2x-y+3=0$.

22. Show that the line $y=x+2$ touches the circle $x^2+y^2=2$ and find the co-ordinates of the point of contact.

23. Show that the line $3y=2x+26$ touches the circle $x^2+y^2-4x+6y=104$ and find the co-ordinates of the point of contact.

24. Prove that the straight line $y=x+\sqrt{2}c$ touches the circle $x^2+y^2=c^2$, and find its point of contact.

25. Prove that the two circles $x^2+y^2+2ax+c^2=0$ and $x^2+y^2+2by+c^2=0$ touch each other if $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$.

26. Find the length of the tangent to the circles

(i) $x^2+y^2=13$ from the point $(2, 5)$.

(ii) $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ from $(6, 5)$.

(iii) $3x^2+3y^2+4x-7y+25=0$ from $(-1, 2)$.

27. The length of the tangent from (f, g) to the circle $x^2+y^2=6$ is twice the length of the tangent to the circle $x^2+y^2+3x+3y=0$, show that $f^2+g^2+4f+4g+2=0$. [C.U.]

28. Find the locus of the mid-points of all chords of the circle $x^2+y^2=25$, which pass through the fixed point $(1, 1)$.

29 Find the equation to the circle which has its centre at $(1, -3)$ and touches $2x-y-4=0$. [U. P. B. '51]

30. Show that the circle $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ touches the axes of x and y. [U. P. B '44]

31. Show that the circle $x^2+y^2=25$ is touched by the straight line $3x+4y=25$. [U. U. '48]

32. Show that the straight line $y-3x=10$ cuts the circle $x^2+y^2=10$ in two coincident points and determine the co-ordinates of this point. [C. U. '43]

33. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$ which are parallel to the straight line $4x+3y=0$. [U. U. '47]

34. Show that the line $x+\sqrt{3}y=8$ touches the circle $x^2+y^2=16$ and find the point of contact. [U. U.]

35. Prove that the straight line $x+y=2+\sqrt{2}$ touches the circle $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ and find its point of contact. [C. U. '39]

36. If the line $lx+my=1$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$ then (l, m) lies on a certain circle. Find its equation.
[U. P. B. '42]

37. Find the equations of the tangents of the circle $x^2+y^2=25$, which are inclined at an angle of 30° to the axis of x. [U. P. B. '46]

38. Find the equations of the tangents from the origin to the circle $x^2+y^2+20(x+y)+20=0$. [U. P. B.]

39. Find the value of c so that $y=mx+c$ may be a tangent to the circle $x^2+y^2=4y$ for all values of m. [U. P. B. '48]

40. Find the equations to the common chord and the line of centres of the two circles $x^2+y^2+6x-3y+4=0$ and $2x^2+2y^2-3x-9y+2=0$ and show that the common chord is perpendicular to the line of centres.

41. Find the equation to the common chord of the two circles $x^2+y^2-4x+6y-36=0$ and $x^2+y^2-5x+8y-43=0$ and also find its length.

অধিবৃত্ত (Parabola)

157. সংজ্ঞা : যদি কোন তলে কোন বিন্দু এরূপভাবে গতিশীল হয় যে, উহার সর্ব অবস্থানে ঐ তলস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ও কোন নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সতত ধ্রুবক থাকে, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে (locus) একটি কনিক (conic) বলে।

অধিবৃত্ত। কোন তলে যদি কোন গতিশীল বিন্দু অন্য কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকে, তবে ঐ গতিশীল

বিন্দুর সঞ্চার-পথকে অধিবৃত্ত (Parabola) বলে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে উহার **নাভি** (**Focus**) এবং ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখাকে **নিয়ামক** (**directrix**) বলা হয়।

নাভি হইতে নিয়ামকের উপরে যে সরলরেখা লম্ব, তাহাকে **অক্ষ** (**Axis**) এবং অক্ষ অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে **শীর্ষবিন্দু** (**vertex**) বলে। নাভিগামী যে জ্যা অক্ষের উপর লম্ব তাহাকে **নাভিলম্ব** (**Latus rectum**) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু ও নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ঐ গতিশীল বিন্দুটির দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সতত ধ্রুবক। এই ধ্রুব অনুপাতকে **উৎকেন্দ্রতা** (eccentricity) বলে। অধিবৃত্তের এই অনুপাত = 1 হয়। (ii) নাভিকে S দ্বারা, eccentricity বা উৎকেন্দ্রতাকে e দ্বারা, শীর্ষবিন্দুকে A দ্বারা, অক্ষকে AX দ্বারা এবং নাভিলম্বকে LL′ দ্বারা সূচিত করা হয়।]

158. উপপাদ্য 1. The length of the latus rectum of a parabola is equal to four times focal distance of the vertex.

LL′ নাভিলম্ব, S নাভি, MM′ নিয়ামক, SX অক্ষ এবং A শীর্ষবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে $LL' = 4AS$.

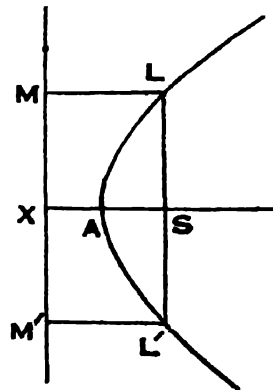
LM, L′M′ নিয়ামকের উপর লম্ব টানা হইল।

চিত্র 10

প্রমাণ। এখানে $AS = AX$,

$LS = LM$, $SL' = L'M'$.

এখন, $LL' = SL + SL'$

$= LM + L'M' = 2XS = 2.2AS = 4AS.$

159. সংজ্ঞা :—অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P হইতে অক্ষের উপর PN লম্ব টানিলে, PNকে ঐ বিন্দুর কোটি এবং ANকে ভুজ বলে।

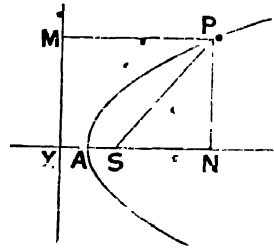
160. উপপাদ্য 2. The square on the ordinate of any point on the parabola is equal to the rectangle contained by the abscissa of the point and the latusrectum *i e.* $PN^2 = 4AS.AN$.

মনে কর, S, A, MX, SX যথাক্রমে নাভি, শীর্ষ বিন্দু, নিয়ামক এবং অক্ষ। অধিবৃত্তের উপর P যে কোন একটি বিন্দু। PN অক্ষের উপরে লম্ব টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে $PN^2 = 4AS\ AN$.

প্রমাণ। PM নিয়ামকের উপরে লম্ব টানা হইল এবং SP যুক্ত করা হইল। এখানে $SP = PM$ এবং $AX = AS$.

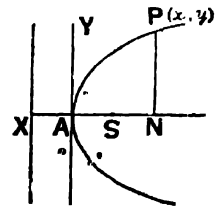
এখন SPN সমকোণী ত্রিভুজের

$$PN^2 = SP^2 - SN^2 = PM^2 - SN^2$$
$$= XN^2 - SN^2$$
$$= (AN + AX)^2 - (AN - AS)^2$$
$$= (AN + AS)^2 - (AN - AS)^2$$
$$= 4AS.AN.$$

M, P, Y, A, S, N

চিত্র 11

161 A. To find the equation of a parabola

(i) Where vertex is the origin and axis is the axis of x:

অধিবৃত্তের অক্ষ AX-কে x-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু Aতে অধিবৃত্তের স্পর্শককে y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর ভুজকোটি (x, y) লওয়া হইল। P হইতে অক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল।

অতএব, $AN = x$ এবং $PN = y$;

কিন্তু $PN^2 = 4AS.AN$. মনে কর, $AS = a$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y^2 = 4ax$

Y, P(x, y), X, A, S, N

চিত্র 12

অনুসিদ্ধান্ত :—নাভিলম্ব $= 4AS = 4a$, অর্থাৎ xএর সহগ।

নাভি Sএর ভুজকোটি হইল $(AS, 0)$ অর্থাৎ $(a, 0)$;

নিয়ামকের সমীকরণ $x = -a$, বা $x + a = 0$.

(ii) Where focus is the origin and axis is the axis of x.

মনে কর, নাভিকে মূলবিন্দু ও অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের P বিন্দুর ভুজকোটি (x, y) এবং PN অক্ষের উপর লম্ব।

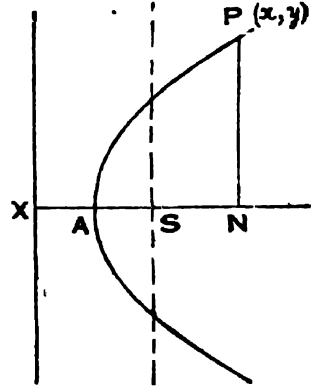
$\therefore$ $SN = x$, $PN = y$ এবং $AN = SN + AS = x + a$.

চিত্র 13

কিন্তু $PN^2 = 4AS.AN$,

$\therefore$ সমীকরণটি হইল $y^2 = 4a(x+a)$.

অনুসিদ্ধান্ত :—নাভিলম্ব (Latus rectum) $= 4AS = 4a$, অর্থাৎ x-এর সহগ এবং নাভি Sএর ভুজকোটি (0, 0).

নিয়ামকের সমীকরণ $x = -2a$ বা $x + 2a = 0$.

(iii) Where axis is the axis of x and directrix is the axis of y.

চিত্র 14

এখানে নিয়ামকটি y-অক্ষ এবং অক্ষটি x-অক্ষ।

মনে কর, Pএর ভুজকোটি (x, y) এবং PN, অক্ষের উপর লম্ব।

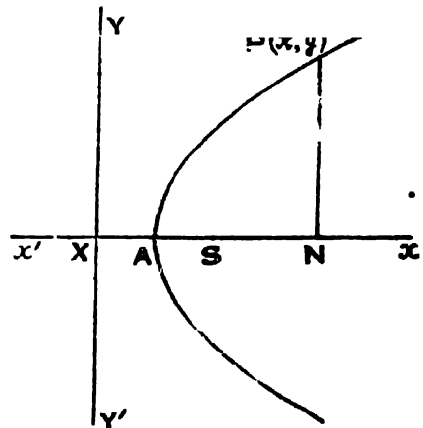
$\therefore$ $XN = x$, $PN = y$

এবং $AN = XN - AX$

$= XN - AS = x - a$;

কিন্তু $PN^2 = 4AS.AN$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y^2 = 4a(x-a).$$

অনুসিদ্ধান্ত :—নাভিলম্ব = (Latus rectum) = $4a$ অর্থাৎ xএর সহগ, নাভি Sএর ভুজকোটি = (XS, 0) = (2AS, 0) = $(2a, 0)$.

এইভাবে অধিবৃত্তের অক্ষকে y-অক্ষ ধরিয়াইহার সমীকরণ হয় :

(i) $x^2 = 4ay$, যখন শীর্ষবিন্দু A হয় মূলবিন্দু ;

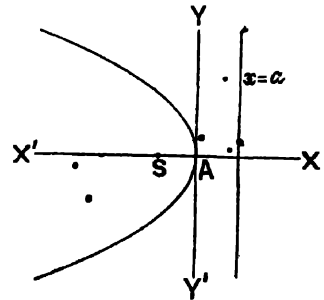
(ii) $x^2 = 4a(y+a)$, যখন নাভি S হয় মূলবিন্দু ;

(iii) $x^2 = 4a(y-a)$, যখন অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু হয় মূলবিন্দু।

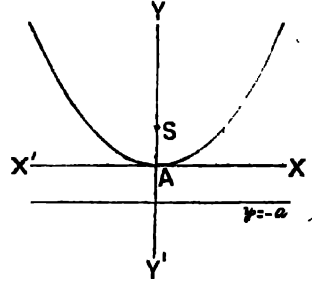
[**দ্রষ্টব্য** :—অধিবৃত্তের সমীকরণ বিভিন্ন আকারের হইতে পারে। যথা—
(1) $y^2 = 4ax$. (2) $y^2 = -4ax$, (3) $x^2 = 4ay$, (4) $x^2 = -4ay$.

এক্ষণে, (1) অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হইলে, উহার শীর্ষবিন্দুর **স্থানাঙ্ক** হইবে (0, 0) এবং x-অক্ষ উহার **অক্ষ** হইবে। উহার **নাভিলম্ব** হইবে, সমীকরণের একঘাত চলরাশির (এখানে x এর) চিহ্নবর্জিত সহগ (এখানে $4a$)। উহার **নাভির স্থানাঙ্ক** হইবে (a, o) অর্থাৎ (একঘাত চলরাশির সহগের এক-চতুর্থাংশ ও 0), এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x = -a$. এ ক্ষেত্রে অধিবৃত্তটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত হইবে অর্থাৎ উহার concavity (বক্রতা) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে হইবে।

(2) সমীকরণটি $y^2 = -4ax$ হইলে, অধিবৃত্তটি চিত্র 14 (A) আকারের হইবে।

উহার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে (0, 0), x-অক্ষ উহার অক্ষ, উহার নাভিলম্ব হইবে $4a$ (চিহ্নবর্জিত x এর সহগ), নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(-a, 0)$, নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x = -(-a) = a$.

চিত্র 14(a)

এখানে x-এর সহগ ঋণাত্মক বলিয়া অধিবৃত্তের বক্রতা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে হইবে।

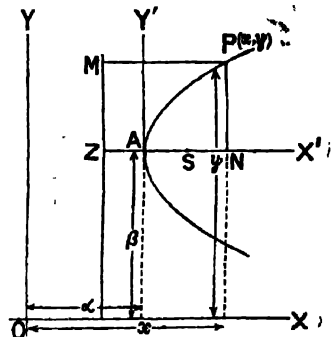
(3) সমীকরণটি $x^2=4ay$ হইলে অধিবৃত্তটির আকার চিত্র 14 (b) এর ন্যায় হইবে। এক্ষেত্রে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) হইবে, উহার অক্ষ হইবে y-অক্ষ, নাভির স্থানাঙ্ক হইবে (0, a), নাভিলম্ব হইবে $4a$, নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y=-a$ এবং অধিবৃত্তটির বক্রতা হইবে y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে।

চিত্র 14 (b)

(4) সমীকরণটি $x^2=-4ay$ হইলে, (চিত্র আঁকিয়া লও), অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে (0, 0), y-অক্ষটি হইবে উহার অক্ষ, নাভিলম্ব হইবে $4a$, নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(0, -a)$, নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y=-(-a)=a$, এবং বক্রতা হইবে y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে।

161. B. To find the equation of a parabola.

(i) When the axis of the parabola is parallel to x-axis.

মনে কর, শীর্ষবিন্দু A-এর স্থানাঙ্ক (α, β) ও নাভিলম্ব $=4a$. স্পষ্টতঃ অক্ষদ্বয়কে OX ও OY হইতে পরিবর্তিত করিয়া AX′ ও AY′ এ স্থানান্তরিত করিলে এবং নূতন অক্ষ অনুসারে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (X, Y) হইলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $Y^2=4aX \cdots (1)$

এখন, OX, OY অক্ষ অনুসারে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ধরিয়া চিত্র হইতে দেখা যায় $X=x-\alpha$ ও $Y=y-\beta$.

চিত্র 14 (c)

সুতরাং সমীকরণ (1) পরিবর্তিত হইয়া দাঁড়ায়, $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$.

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

[দ্রষ্টব্য :—এখানে নাভির স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$, শীর্ষবিন্দু (α, β), $LL'=4a$, নিয়ামকের সমীকরণ $x=\alpha-a$ এবং নাভিলম্বের সমীকরণ $x=\alpha+a$,

বিকল্প প্রমাণ।

যেহেতু P এর স্থানাঙ্ক (x, y) ও S এর স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$

$$\therefore\ SP^2=(x-a-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

আবার, $PM=ZN=ZA+AN=a+x-\alpha$ [চিত্র দেখ।]

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হইতে পাওয়া যায় $SP=PM$, $\therefore\ SP^2=PM^2$

$$\therefore\ (x-a-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x+a-\alpha)^2$$

বা, $(y-\beta)^2=(x+a-\alpha)^2-(x-a-\alpha)^2=4a(x-\alpha)$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $\boldsymbol{(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)}\cdots(2)$

(ii) When the axis of the parabola is parallel to y-axis.

চিত্র আঁকিয়া উপরের অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করিলে দেখিতে পাইবে যে, সমীকরণ হইবে $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)\cdots(3)$

(iii) Form of the equation of a parabola when its axis is parallel to x or y-axis.

অধিবৃত্তের অক্ষ যখন x-অক্ষের সমান্তরাল তখন অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় [(2) হইতে পাই] $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$

$$\text{বা,}\quad 4ax=y^2-2\beta y+\beta^2+4a\alpha,$$

$$\text{বা,}\quad x=\frac{1}{4a}y^2-\frac{\beta}{2a}y+\frac{\beta^2+4a\alpha}{4a}.\quad \text{অর্থাৎ } x=Ay^2+By+C.$$

আবার, অধিবৃত্তের অক্ষ যখন y-অক্ষের সমান্তরাল তখন অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় [সমীকরণ (3) দেখ]

$$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta),\ \text{বা,}\quad 4ay=x^2-2\alpha x+\alpha^2+4a\beta,$$

$$\text{বা,}\quad y=\frac{1}{4a}x^2-\frac{\alpha}{2a}x+\frac{\alpha^2+4a\beta}{4a}$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad y=Ax^2+Bx+C.$$

161. C. To detemine the vertex of a parabola when its equation is of the forms $x=\text{A}y^2+\text{B}y+\text{C}$ and $y=\text{A}x^2+\text{B}x+\text{C}$.

$x=\text{A}y^2+\text{B}y+\text{C}$ সমীকরণটি দেখিয়াই বুঝা যায় অধিবৃত্তের অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং ইহাকে $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ আকারে প্রকাশ করিতে হইবে।

$\text{A}y^2+\text{B}y+\text{C}=x$, বা $y^2+\frac{\text{B}}{\text{A}}y=\frac{x}{\text{A}}-\frac{\text{C}}{\text{A}}$,

বা, $\left(y+\frac{\text{B}}{2\text{A}}\right)^2=\frac{x}{\text{A}}+\frac{\text{B}^2}{4\text{A}^2}-\frac{\text{C}}{\text{A}}=\frac{x}{\text{A}}+\frac{\text{B}^2-4\text{AC}}{4\text{A}^2}$

বা, $\left(y+\frac{\text{B}}{2\text{A}}\right)^2=\frac{1}{\text{A}}\left(x+\frac{\text{B}^2-4\text{AC}}{4\text{A}}\right)$......(1)

$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ সমীকরণে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

$\therefore$ এই সমীকরণের সহিত (1) কে তুলনা করিয়া দেখা যায়

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{\text{B}^2-4\text{AC}}{4\text{A}}, -\frac{\text{B}}{2\text{A}}\right)$।

$y=\text{A}x^2+\text{B}x+\text{C}$ কে অনুরূপভাবে $\left(x+\frac{\text{B}}{2\text{A}}\right)^2=\frac{1}{\text{A}}\left(y+\frac{\text{B}^2-4\text{AC}}{4\text{A}}\right)$

আকারে প্রকাশ করা যায়। যেহেতু এক্ষেত্রে অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল সুতরাং ইহাকে $(x-\alpha)^2=4a\ (y-\beta)$র সহিত তুলনা করিলে দেখা যায়,

এখানে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{\text{B}}{2\text{A}}, -\frac{\text{B}^2-4\text{AC}}{4\text{A}}\right)$

161. D. To find the equation of a parabola when its focus and the equation of the directrix are given. (General equation).

মনে কর, নাভি S এর স্থানাঙ্ক (α, β) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $\text{AX}+\text{BY}+\text{C}=0$.

মনে কর, $\text{P}(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে-কোন একটি বিন্দু এবং P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব।

এখন $\text{SP}^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$

$$\text{এবং } PM^2 = \left\{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2$$

তোমরা জান অধিবৃত্তের সর্তানুযায়ী $SP = PM$, $\therefore$ $SP^2 = PM^2$

$$\text{অতএব, } (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \left\{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}^2$$

বা, $(A^2+B^2)\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\} = (Ax+By+C)^2$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। উপরের সমীকরণটি নিম্নলিখিত ভাবে সাজাইয়া রাখ

$$(A^2+B^2)\{(x^2+y^2)-2(\alpha x+\beta y)+(\alpha^2+\beta^2)\}-(Ax+By)^2$$
$$-2C(Ax+By)-C^2=0,$$

বা, $(A^2+B^2)(x^2+y^2)-(Ax+By)^2-2x\{\alpha(A^2+B^2)+CA\}$
$-2y\{\beta(A^2+B^2)+BC\}+(A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2)-C^2=0,$

বা, $(Bx-Ay)^2-2x\{\alpha(A^2+B^2)+CA\}-2y\{\beta(A^2+B^2)+BC\}$
$+(A^2+B^2)(\alpha^2+\beta^2)-C^2=0$

অতএব, অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণের আকার হইবে

$$(lx+my)^2+2gx+2fy+c=0.$$

[দ্রষ্টব্য ঃ—সমীকরণটি লক্ষ্য করিলে দেখিবে x ও y এর দ্বিঘাত অংশ একটি পূর্ণ বর্গ রাশিরূপে আছে, সুতরাং x ও y এর দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা অধিবৃত্ত সূচিত হইলে ইহার দ্বিঘাত অংশটুকু অর্থাৎ $ax^2+2hxy+by^2$ একটি পূর্ণবর্গ হইবে। অতএব দেখা যায়, ইহা হইতে গেলে $h^2=ab$ হইতে হইবে।

অতএব, x ও y এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবার সর্ত $h^2=ab$.

উদাহরণমালা 21

উদা. 1. Find the length of the latus rectum and the coordinates the of the parabolas :

(a) $y^2=4x$, (b) $y^2=3x$, (c) $2y^2=5x$, (d) $y^2+6x=0$
(e) $x^2=2y$, (f) $x^2=-4py$, (g) $y^2=px+q$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $y^2=4ax$.

(*a*) এখানে $y^2=4x$, $\therefore \quad a=1$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(a, 0)$ অর্থাৎ $(1, 0)$ এবং নাভিলম্ব $=4a=4\times 1=4$.

(*b*) এখানে $y^2=3x$, সুতরাং $4a=3$, $\therefore \quad a=\frac{3}{4}$.

অতএব, নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(\frac{3}{4}, 0)$ এবং নাভিলম্ব $=4a=3$.

(*c*) এখানে $2y^2=5x$, বা $y^2=\frac{5}{2}x$, সুতরাং $4a=\frac{5}{2}$. $\therefore \quad a=\frac{5}{8}$.

অতএব, নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(\frac{5}{8}, 0)$ এবং নাভিলম্ব $=4a=4\times\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$.

(*d*) অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2+6x=0$ অর্থাৎ $y^2=-6x$, সুতরাং অধিবৃত্তটি শীর্ষবিন্দু দিয়া গিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত হইয়াছে।

$\therefore$ নাভিলম্ব $=4a=6$, কিন্তু নাভির স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ বা $(-\frac{3}{2}, 0)$.

(*e*) এখানে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2=2y$, সুতরাং উহার নাভি y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং উহা y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।

$\therefore$ এখানে নাভির স্থানাঙ্ক $(0, a)$ অর্থাৎ $(0, \frac{1}{2})$ এবং নাভিলম্ব $=4a$ $=4\times\frac{1}{2}=2$.

(*f*) এখানে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2=-4py$, সুতরাং উহার নাভি y-অক্ষের ঋণাত্মক অংশের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ এখানে নাভির স্থানাঙ্ক $(0, -p)$ এবং নাভিলম্ব $=4p$.

(*g*) এখানে সমীকরণ হইল $y^2=px+q$, বা $y^2=p\left(x+\frac{q}{p}\right)$.

এক্ষণে মনে কর, $y=Y$ এবং $x+\frac{q}{p}=X$ অর্থাৎ মনে কর, মূলবিন্দুকে $\left(-\frac{q}{p}, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হইল এবং অক্ষদ্বয় হইল ঐ বিন্দুতে মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়।

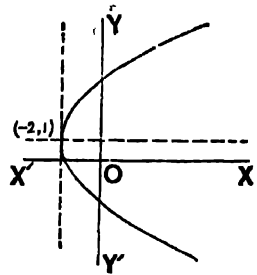
এখন প্রদত্ত সমীকরণটি $Y^2=pX$ সমীকরণে পরিণত হইল। অতএব $X=\frac{p}{4}$, $Y=0$ দ্বারা নাভি নির্ণীত হইবে। $\therefore$ মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে নাভির স্থানাঙ্ক হইল $\left\{\left(\frac{p}{4}-\frac{q}{p}\right), 0\right\}$ অর্থাৎ $\left(\frac{p^2-4q}{4p}, 0\right)$ এবং নাভিলম্ব $=p$.

উদা. 2. Find the vertex and the directrix of each of the parabolas :—(a) $y^2=12x$, (b) $y^2-4x-2y-7=0$.

(a) এখানে $4a=12$, $\therefore$ $a=3$. অতএব শীর্ষবিন্দু হইল (0, 0) এবং নিয়ামকের (directrix এর) সমীকরণ হইল $x+a=0$ অর্থাৎ $x+3=0$.

(b) এখানে প্রদত্ত সমীকরণটি হইল $y^2-2y-4x-7=0$.

বা, $y^2-2y+1=4x+8$, বা, $(y-1)^2=4(x+2)$.

এক্ষণে, $Y=y-1$ এবং $X=x+2$ ধরিয়া অর্থাৎ অক্ষদ্বয়কে $(-2, 1)$ বিন্দুতে সমান্তরাল অক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া সমীকরণটি হয় $Y^2=4X$, ইহাতে $4a=4$, $\therefore$ $a=1$. সুতরাং $X=0$, $Y=0$ দ্বারা শীর্ষবিন্দু এবং $X+1=0$ দ্বারা নিয়ামক পাওয়া যায়। অতএব, মূল অক্ষদ্বয় অনুসারে শীর্ষবিন্দু হইল $(-2, 1)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইল $x+2+1=0$ অর্থাৎ $x+3=0$.

চিত্র 18.

[দ্রষ্টব্য :—উপরের উদা. 2(b)তে $X=0$ হইয়াছে, কিন্তু $X=x+2$, সুতরাং $x+2=0$, $\therefore$ $x=-2$. আবার, $Y=0$ হইয়াছে, কিন্তু $Y=y-1$, সুতরাং $y-1=0$. $\therefore$ $y=1$. অতএব, শীর্ষবিন্দু $(-2, 1)$।]

✓উদা. 3. The parabola $y^2=4px$ passes through the point $(3,-2)$, find the latus rectum and co-ordinates of its focus. [C. U. '34]

যেহেতু $y^2=4px$ অধিবৃত্তটি $(3,-2)$ বিন্দু দিয়া গিয়াছে,

অতএব $4=12p$, $\therefore$ $p=\frac{1}{3}$. $\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $y^2=\frac{4}{3}x$.

$\therefore$ নাভিলম্ব $=\frac{4}{3}$.

আবার, এখানে $a=\frac{1}{4}.\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$, $\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $=(a, 0)=(\frac{1}{3}, 0)$.

উদা। 4. If $a+b\neq 0$, find the co-ordinates of the focus of the parabola $y^2=2mx$ which passes through the intersection of the lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ and $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$. [C. U. '52]

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=\frac{ab}{a+b}$ ও $y=\frac{ab}{a+b}$; সুতরাং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$.

এখন যেহেতু অধিবৃত্ত $y^2=2mx$ ঐ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী, সুতরাং আমরা পাই, $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2=2m\left(\frac{ab}{a+b}\right)$, $\therefore\ m=\frac{ab}{2(a+b)}$.

অতএব, নাভির নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left\{\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right\}$.

উদা. 5. (a) Find the equation of the parabola whose focus is the point (2, 1) and whose directrix is the str. line $4x-3y=1$ and determine the length of the latus rectum.

মনে কর, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু। এখানে S এর স্থানাঙ্ক (2, 1)। $\therefore\ SP=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.

আবার, P বিন্দু হইতে নিয়ামক $4x-3y=1$ এর উপর PM লম্ব হইলে,

$$PM=\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4x-3y-1}{5}.$$

এখন, যেহেতু, $SP^2=PM^2$, $\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=\frac{(4x-3y-1)^2}{25}$

ইহাকে সরল করিয়া পাওয়া যায়,

$9x^2+24xy+16y^2-92x-56y+124=0$, ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

নাভি S(2, 1) হইতে নিয়ামক $4x-3y-1=0$ এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য SZ ধরিলে, $SZ=\frac{4\times 2-3\times 1-1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}$.

তোমরা জান, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $LL'=2SZ$, কিন্তু এখানে $SZ=\frac{4}{5}$,

$\therefore$ নির্ণেয় নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2.\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$.

উদা. 5 (b). Find the equation of the parabola whose focus is at the point $(-1, 1)$ and whose directrix is the straight line $x+y+1=0$. [C. U. (B. Sc.)'32]

মনে কর, অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y)। এখানে নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$।

এক্ষণে, নাভি S হইতে ঐ P বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

আবার, নিয়ামক $x+y+1=0$ হইতে ঐ P বিন্দুর দূরত্ব

$$=\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}.$$

এখন $\because$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু উহার নাভি ও নিয়ামক হইতে সমদূরবর্তী, $\therefore$ এখানে $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}$,

বা, $(x+1)^2+(y-1)^2=\dfrac{(x+y+1)^2}{2}$,

বা, $2(x+1)^2+2(y-1)^2=(x+y+1)^2$,

বা, $2x^2+4x+2+2y^2-4y+2=x^2+y^2+1+2xy+2x+2y$,

বা, $x^2+y^2+2x-6y-2xy+3=0$,

বা, $(x-y)^2+2x-6y+3=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 6. In the parabola $4(y-1)^2=-7(x-3)$, find (i) the latus rectum (ii) the co-ordinates of the focus and the vertex. [C. U. '56].

প্রদত্ত সমীকরণ, $4(y-1)^2=-7(x-3)$

বা, $(y-1)^2=-\frac{7}{4}(x-3)$

[161 B (i) অনুচ্ছেদ দেখ।] এখানে অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল ও x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত হইয়া গিয়াছে।

এক্ষেত্রে নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{7}{4}$; শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 1)

এখন, $4a=-\frac{7}{4}$ $\therefore$ $a=-\frac{7}{16}$.

এখন নাভির স্থানাঙ্ক $\{(-\frac{7}{16}+3), 1\}$ বা $(\frac{41}{16}, 1)$.

উদা. 7. A double ordinate of a parabola $y^2=4ax$ is of length $8a$. Prove that the lines joining the vertex to its ends are at right angles. [W. B. H. S. 1960]

এখানে 'double ordinate' অর্থে নাভিলম্বের সমান্তরাল জ্যা।

মনে কর, PQ ঐরূপ একটি জ্যা এবং ইহা x-অক্ষ অর্থাৎ অধিবৃত্তের অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখানে প্রমাণ করিতে হইবে $\angle PAQ=90°$. A অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু। P বিন্দুর কোটি $=4a$ ($\because$ PQ, N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত)। অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ এ $y=4a$ বসাইয়া পাই, $4ax=16a^2$, $\therefore$ $x=4a$. অতএব, দেখা যাইতেছে, AN=PN.

$\therefore$ $\triangle ANP$ সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। অতএব, $\angle PAN=45°$.

অনুরূপে QAN=45°. অতএব, $\angle PAQ=90°$.

বিকল্প প্রমাণ :—

উপরের প্রমাণ অনুসারে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4a, 4a)$, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4a, -4a)$ ও A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)।

এখন PA রেখার gradient $=\dfrac{4a}{4a}=1$

ও QA রেখার gradient $=\dfrac{-4a}{4a}=-1$

সুতরাং রেখাদ্বয়ের gradient এর গুণফল $=1\times-1=-1$.

$\therefore$ PA ও QA পরস্পর লম্ব অর্থাৎ $\angle PAQ=90°$.

8. If the focus of a parabola be (5, 3) and its vertex be (3, 1), find the equation of the parabola.

এখানে S এর স্থানাঙ্ক (5, 3) এবং A এর স্থানাঙ্ক (3, 1)। SA কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে AZ=AS কাটিয়া লও। মনে কর, Z এর স্থানাঙ্ক (α, β)। যেহেতু A বিন্দু ZS এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore \quad 3=\frac{5+\alpha}{2}$, বা $\alpha=1$ এবং $1=\frac{3+\beta}{2}$ বা, $\beta=-1$.

অতএব, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, -1)$.

এখন, Z বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$$y+1=m(x-1)\cdots\cdots(1)$$

(1) রেখা নিয়ামক হইবে যখন ইহা AZ রেখার Z বিন্দুতে লম্ব হইবে।

AZ রেখার gradient$=\frac{1-(-1)}{3-1}=1$.

সুতরাং (1) রেখা নিয়ামক হইবে যখন $m\times 1=-1$ বা $m=-1$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $y+1=-(x-1)$

বা $x+y=0$.

এক্ষণে, অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু লও। $\because SP^2=PM^2$,

$\therefore \quad (x-5)^2+(y-3)^2=\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$,

বা, $2(x^2+y^2-10x-6y+34)=x^2+2xy+y^2$

বা, $x^2-2xy+y^2-20x-12y+68=0$, ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

9. If the vertex of a parabola be $(3, -2)$, latus rectum be 4 and its axis is parallel to the x-axis, find its equation.

এখানে A এর স্থানাঙ্ক $(3, -2)$ ও $LL'=4$.

যেহেতু নির্ণেয় অধিবৃত্তের অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল, $\therefore$ S এর স্থানাঙ্ক $(3+\frac{4}{4}, -2)$ বা $(4, -2)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=3-1$

বা $x-2=0$. [অনুচ্ছেদ 161 B (i) এর দ্রষ্টব্য দেখ।]

এখন $P(x, y)$ যে কোন একটি বিন্দু অধিবৃত্তের উপর লও।

$\because \quad SP^2=PM^2, \quad \therefore \quad (x-4)^2+(y+2)^2=(x-2)^2$

বা, $(y+2)^2=(x-2)^2-(x-4)^2$

$$=(x-2+x-4)(x-2-x+4)=4(x-3)$$

বা, $(y+2)^2=4(x-3)$, ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

10. Find the equation of the circle on the latus rectum of $y^2=4ax$ as diameter and show that it passes through the point where the axis of the parabola meets the directrix.

এখানে, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$, $\therefore$ নাভিলম্ব$=4a$. যেহেতু বৃত্তটির ব্যাস$=$নাভিলম্ব$=4a$, $\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ$=2a$. আবার, নাভিলম্ব ব্যাস বলিয়া, নাভি Sই বৃত্তের কেন্দ্র। $\therefore$ কেন্দ্রর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$.

অতএব, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2+(y-0)^2=(2a)^2$,

বা $(x-a)^2+y^2=4a^2$.

আবার, অধিবৃত্তের অক্ষ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করে। Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক আমরা জানি $(-a, 0)$। Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2+y^2=4a^2$ এ বসাইয়া দেখি, $(-a-a)^2+0=4a^2$; সুতরাং দেখা যাইতেছে নির্ণেয় বৃত্তটি অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু দিয়া যাইবে।

Exercise 21

1. Find the latus rectum and the co-ordinates of the focus of each of the parabolas :—

(i) $y^2=14x$ (ii) $y^2=5x$ (iii) $2y^2=7x$ (iv) $y^2+2x=0$
(v) $x^2=4y$, (vi) $x^2+8y=0$ (vii) $2x^2+7y=0$
(viii) $y^2=ax+b$

2. Find the vertex and the directrix of each of the parabolas :—(*a*) $x^2=8y$ (*b*) $x^2-4x-2y-7=0$.

3. The parabola $y^2=3px$ passes through the point $(2, -1)$ find the latus rectum and the co-ordinates of the focus.

4. Find the equation of the directrix of the parabola $y^2=13x$ and find the co-ordinates of the ends of it.

5. Show that the straight line parallel to the axis of the parabola meets the parabola in one point only.

6. Find the equation of the parabola :—

(a) Whose focus is at the point, (2, −1) and whose directrix is the straight line $2x+3y=6$.

(b) Whose directrix is $3x-4y+5=0$ and whose focus is (1, 3).

(c) Whose vertex is the origin, axis is the y-axis and which passes through the point (6, 9).

(d) Whose vertex is (−2, 2) and focus is (1, 2).

(e) Whose focus is (0, 0) and the tangent at the vertex is the line $y-x=4$.

(f) Whose latus rectum is $10\sqrt{2}$, axis is the line $x=y$ and the equation of the directrix is $x+y+5=0$.

7. Find the equation of a parabola :—

(a) Whose vertex is (−3, 2), latus rectum is 8 and axis is parallel to the x-axis.

(b) Whose vertex is (1, −1), latus rectum is 8 and axis is parallel to the y-axis.

8. Obtain the equation of the parabola whose focus is at the point (3, −2) and whose directrix is the straight line $2x-y+3=0$. [C. U. '58]

9. Find the vertex, the focus and the length of the latus rectum of the parabola $y=ax^2+bx+c$. [C. U. '12]

10. A parabola opens out along the positive direction of the axis of y. Its focus is the point (0, 3) and the length of the latus rectum is 12. Find its equation. [C. U. '50 (Sp)]

11. Find the length of the latus rectum of the parabola $5y^2=7x$, and also the co-ordinates of the focus. [C. U. '36]

12. The parabola $y^2=4px$ goes through the point (3, −2). Obtain the length of the latus rectum and the co-ordinates of the focus. [C. U. '34]

13. Find the vertex, the focus and the directrix of the parabola $(y+3)^2=2(x+2)$. [U. P. B. '46]

14. Find the latus rectum and the co-ordinates of the focus of the parabola $3y^2=4x$, and determine the points in which it is met by the straight line $2x=3y$. [C. U. '35]

15. Find the vertex, focus and latus rectum of the parabola $y^2=4y-4x$. [C. U.]

16. Find the point of intersection of the lines $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ and $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, and determine the co-ordinates of the focus of the parabola $y^2=2ax$ which passes through this point. [C. U. '43]

17. Prove that the equation $y^2+2ax+2by+c=0$, represents a parabola whose axis is parallel to the axis of x. Find its vertex. [C. U. '53]

18. Find the equation to the parabola whose axis is parallel to the y-axis and which passes through the points $(0, 4)$, $(1, 9)$ and $(-2, 6)$. Also determine its latus rectum.

19. A parabola opens out along the positive axis of y as the axis. Its focus is the point $(0, 3)$ and the length of its latus rectum is 12. Find its equation. [C. U. '50 Comp.]

20. A double ordinate of the curve $y^2=4px$ is of length $8p$; prove that the lines from vertex to its ends are at right angles. [C. U '52]

21. Find the equation of a parabola whose focus is at the origin and whose directrix is the straight line $2x+y-1=0$. Also, determine its latus rectum. [C. U. '54]

22. Find the equation of the circle whose centre is at the vertex of the parabola $y^2=8x$ and which passes through the focus of it.

23. Find the radius of the circle passing through the extremities of the latus rectum and the vertex of a parabola. (Give the result in terms of the latus rectum.)

162. To find the length of the chord of the parabola $y^2=4ax$ intercepted on the line $y=mx+c$.

$y=mx+c\cdots(1)$ সরলরেখা $y^2=4ax\cdots(2)$ অধিবৃত্তকে P, Q দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

মনে কর P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2)। এখন (1) হইতে yএর মান (2) এ বসাইয়া পাওয়া যায়, $(mx+c)^2=4ax$,

বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0\cdots\cdots(3)$

স্পষ্টতঃই দ্বিঘাত সমীকরণ (3) এর বীজদ্বয় হইবে x_1 ও x_2.

$$\therefore\quad x_1+x_2=\frac{-2(mc-2a)}{m^2} \text{ এবং } x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}.$$

$$\therefore\quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$
$$=\frac{4(mc-2a)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}=\frac{16a(a-mc)}{m^4}.$$

আবার, যেহেতু P, Q বিন্দুদ্বয় সরলরেখা (1) এর উপরেও আছে,

সুতরাং $y_1=mx_1+c\cdots(4)$ এবং $y_2=mx_2+c\cdots(5)$

(4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায়

$$y_1-y_2=m(x_1-x_2)\cdots(6)$$

একণে, জ্যা PQ এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+m^2(x_1-x_2)^2}$$
$$=(x_1-x_2)\sqrt{1+m^2}$$
$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a(a-mc)}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। যখন দৈর্ঘ্য $PQ=0$ হইবে, তখন (1)-রেখা অধিবৃত্ত (2) এর স্পর্শক হইবে।

$\therefore$ রেখা (1) এর স্পর্শক হইবার সর্ত $\dfrac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a(a-mc)}=0.$

এখানে m বা a কোনটি শূন্য নহে, সুতরাং $a-mc=0$,

$$\therefore\quad c=\frac{a}{m} \text{ ইহাই সর্ত।}$$

163. সরলরেখা $y=mx+c$, অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর স্পর্শক হইবার সর্ত।

[To find the condition that the straight line $y=mx+c$ may touch the parabola $y^2=4ax$]

$y=mx+c$, হইতে y-এর মান $y^2=4ax$এ বসাইয়া পাই

$(mx+c)^2=4ax$, বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0 \cdots\cdots (1)$

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া ইহার দুইটি বীজ আছে অর্থাৎ সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন এই ছেদবিন্দুদ্বয় একত্র মিলিত হইলে ঐ সরলরেখাকে স্পর্শক বলে।

$\therefore$ $y=mx+c$, $y^2=4ax$ এর স্পর্শক হইতে হইলে সমীকরণ (1 এর বীজ দুইটি সমান হইতে হইবে।

ঐ বীজদ্বয় সমান হইবার সর্ত হইল $4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$,

বা, $m^2c^2-4amc+4a^2-m^2c^2=0$, বা $4amc=4a^2$,

বা, $mc=a$, $\quad\therefore\ c=\dfrac{a}{m}$.

$\therefore$ $y=mx+c$, অধিবৃত্ত $y^2=4x$এর স্পর্শক হইবার সর্ত হইল $c=\dfrac{a}{m}$.

অনুসিদ্ধান্ত। উপরের সর্ত হইতে পাই $y=mx+\dfrac{a}{m}$, m এর যে-কোন মানেই $y^2=4ax$এর স্পর্শক হইবে।

164. When $y=mx+c$ touches the parabola $y^2=4ax$ find the point of contact.

তোমরা জান, $y=mx+\dfrac{a}{m}\cdots(1)$ সতত $y^2=4ax\cdots(2)$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। এখন (1) হইতে yএর মান (2)-তে বসাইয়া পাওয়া যায়

$$\left(mx+\frac{a}{m}\right)^2=4ax, \text{ বা } \left(mx+\frac{a}{m}\right)^2-4ax=0,$$

বা, $\left(mx-\dfrac{a}{m}\right)^2=0$, বা $mx=\dfrac{a}{m}$. $\therefore$ $x=\dfrac{a}{m^2}$.

x এর এই মান সমীকরণ (1) এ বসাইয়া পাওয়া যায়

$$y = m \times \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}.$$

অতএব, স্পর্শবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$।

165. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

[Two tangents can be drawn to a parabola from an external point.]

সরলরেখা $y = mx + \frac{a}{m}$ সতত $y^2 = 4ax$ এর স্পর্শক।

যদি এই স্পর্শক বহিঃস্থ বিন্দু (x', y') দিয়া যায়,

তবে $y' = mx' + \frac{a}{m}$, বা $m^2x' - my' + a = 0$ এবং ইহা m এর দ্বিঘাত সমীকরণ। অতএব mএর দুইটি মান পাওয়া যায় অর্থাৎ (x', y') এই বহিঃস্থ বিন্দু হইতে অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

166. (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর স্পর্শকের সমীকরণ।

[To find the equation of the tangent to the parabola at the point (x_1, y_1) .]

মনে কর (x_2, y_2) অধিবৃত্তের উপরিস্থিত আর একটি বিন্দু।

এখন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হয়

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \cdots\cdots (1)$$

যেহেতু, বিন্দুদ্বয় অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত

অতএব, $\left.\begin{array}{l} y_1^2 = 4ax_1 \\ y_2^2 = 4ax_2 \end{array}\right\}$, $\therefore\ y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \cdots\cdots (2)$$

অতএব (1) ও (2) হইতে পাওয়া যায় যে, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী জ্যা-এর সমীকরণ $y-y_1=\frac{4a}{y_1+y_2}(x-x_1)$

এই জ্যা স্পর্শক হইবে যদি $y_2=y_1$ হয়,

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $y-y_1=\frac{4a}{2y_1}(x-x_1)$

বা, $yy_1-y_1^2=2ax-2ax_1$ বা, $yy_1=2ax+y_1^2-2ax_1$

বা, $yy_1=2ax+4ax_1-2ax_1=2a(x+x_1)$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$এর স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$yy_1=2a(x+x_1)$$

[দ্রষ্টব্য :—যদি আমরা অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$কে $y.y=2a(x+x)$ এই আকারে লিখি এবং একটি x ও yএর পরিবর্তে x_1, y_1 লিখি তাহা হইলে উহাই স্পর্শকের সমীকরণ হয়।]

167. (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তের অভিলম্বের (Normal এর) সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the normal to the parabola $y^2=4ax$ at the point (x_1, y_1)].

মনে কর (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$.

$\because$ ইহা স্পর্শক $yy_1=2a(x+x_1)$ এর উপর লম্ব

$\therefore$ $m\times\frac{2a}{y_1}=-1$, $\therefore$ $m=-\frac{y_1}{2a}$

$\therefore$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইল $y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$

বা, $2a(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$,

বা, $y_1x+2ay=y_1(x_1+2a)$.

168. **To find the equation of the normal in terms of its gradient.**

অনুচ্ছেদ 167তে $-\frac{y_1}{2a}=m\ldots(1)$ ধরা হইয়াছে।

$\therefore$ m অভিলম্বের gradient.

এখন (1) হইতে পাওয়া যায় $y_1=-2am$.

যেহেতু (x_1, y_1) অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর উপর একটি বিন্দু, সুতরাং

$$x_1=\frac{y_1^2}{4a}=\frac{4a^2m^2}{4a}=am^2.$$

এখন অভিলম্বের সমীকরণ $y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$ এ, x_1 ও y_1 এর মান বসাইয়া পাওয়া যায়, $y+2am=m(x-am^2)$,

বা, $y=mx-2am-am^3\cdots(2)$, ইহাই অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত। অভিলম্বের পাদবিন্দু অর্থাৎ অধিবৃত্তের যে বিন্দুতে সমীকরণ (2) অভিলম্ব সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am^2, -2am)$।

169. **To prove that, in general, three normals can be drawn from a point to a parabola.**

মনে কর, যে বিন্দু হইতে অভিলম্ব টানা হইবে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)।

অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর অভিলম্বের সমীকরণ $y=mx-2am-am^3\cdots(1)$

এর মান এমনভাবে স্থির করা যায় যাহাতে (1) সমীকরণটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয়। (x_1, y_1) বিন্দুগামী সমীকরণ হয়

$$y_1=mx_1-2am-am^3$$

বা, $am^3+(2a-x_1)m+y_1=0\cdots\cdots(2)$. ইহা mএর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। সুতরাং mএর তিনটি বীজ (বাস্তব বা কাল্পনিক) থাকিবে। অতএব, প্রদত্ত যে কোন বিন্দু (x_1, y_1) হইতে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এ সাধারণভাবে তিনটি অভিলম্ব অঙ্কিত করা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। (1). যদি সমীকরণ (2) এর বীজত্রয় m_1, m_2, m_3 হয় তবে অভিলম্বত্রয়ের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(am_1^2, -2am_1)$, $(am_2^2, -2am_2)$ ও $(am_3^2, -2am_3)$। পাদবিন্দুত্রয়কে co-normal points বলে।

(2) যেহেতু সমীকরণ (2) এ m^2 এর সহগ শূন্য, সুতরাং বীজত্রয়ের সমষ্টি শূন্য হইবে অর্থাৎ $m_1+m_2+m_3=0$.

(3) যে কোন বিন্দু হইতে অধিবৃত্তে যে তিনটি অভিলম্ব অঙ্কিত করা যায়, তাহাদের কোটিগুলির সমষ্টি (sum of the ordinates) শূন্য হইবে,

অর্থাৎ $-2am_1-2am_2-2am_3=0$

বা $-2a(m_1+m_2+m_3)=0$ [কারণ $m_1+m_2+m_3=0$.]

170. অধিবৃত্তের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা (chord of contact) এর সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the *chord of contact* of the point (x', y') with respect to the parabola $y^2=4ax$.]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে

$yy_1=2a(x+x_1)$ এবং $yy_2=2a(x+x_2)$.

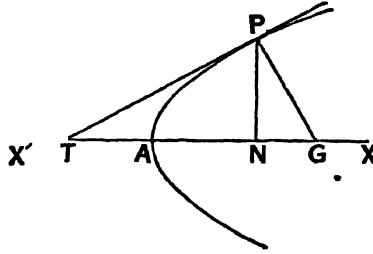
যদি এই স্পর্শকদ্বয় (x', y') বিন্দু দিয়া যায়,

তবে $y'y_1=2a(x'+x_1)$
এবং $y'y_2=2a(x'+x_2)$ } কিন্তু এই সর্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে,

সরলরেখা $yy'=2a(x+x')$, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী অর্থাৎ (x', y') বিন্দু হইতে যে দুইটি স্পর্শক টানা হইয়াছে, তাহাদের স্পর্শবিন্দু দিয়া সরলরেখা $yy'=2a(x+x')$ যায়।

$\therefore$ (x', y') বিন্দুর chord of contact এর সমীকরণ হইল

$$yy'=2a(x+x').$$

171. P অধিবৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু, PN অক্ষের উপরে লম্ব। P বিন্দুতে স্পর্শক PT এবং অভিলম্ব (Normal) PG অধিবৃত্তের অক্ষকে যথাক্রমে T এবং G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 15

TNকে উপ-স্পর্শক (Subtangent) এবং NGকে উপ-অভিলম্ব (Subnormal) বলে।

172. অধিবৃত্তের উপ-স্পর্শক শীর্ষবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

[The subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.]

মনে কর $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y').

PN অক্ষের উপর লম্ব এবং স্পর্শক PT অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

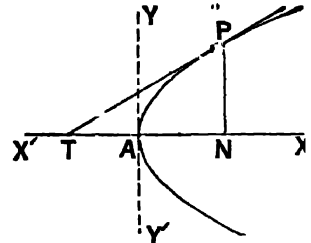
চিত্র 16

এখন, স্পর্শক PT এর সমীকরণ

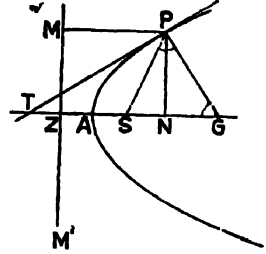
$$yy' = 2a(x + x'),$$

কিন্তু T বিন্দুর কোটি$=0$, $\therefore\ 0 = 2a(x + x')$, $\therefore\ x = -x'$.

অতএব T বিন্দুর ভুজ$= -x'$ অর্থাৎ AT $= x'$, কিন্তু AN $= x'$

$\therefore$ AT = AN, $\therefore$ উপ-স্পর্শক TN, শীর্ষবিন্দু A-তে সম-দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

173. The normal to a parabola at any point on it makes equal angles with the focal distance of the point and the axis.

চিত্র 17

মনে কর শীর্ষ বিন্দু Aকে মূলবিন্দু, অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যকে $4a$ ধরা হইল। অতএব অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল $y^2=4ax$. উহার উপরে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1). P বিন্দুতে PT স্পর্শক এবং PG অভিলম্ব অক্ষকে যথাক্রমে T ও G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle SPG=\angle SGP$.

মনে কর PM নিয়ামক MM′ এর উপর লম্ব।

$\because$ উপ-স্পর্শক TN শীর্ষ Aতে সমদ্বিখণ্ডিত,

$\therefore$ $AT=AN$, $\therefore$ $TS=TA+AS=AN+AS=x_1+a$.

আবার. $SP=PM=ZN=AN+ZA=AN+AS=x_1+a$.

$\therefore$ $SP=ST$, $\therefore$ $\angle SPT=\angle STP$.

এক্ষণে $\because$ $\angle GPT=1$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle PTG+\angle PGT=1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle SPT+\angle SPG=1$ সমকোণ $=\angle STP+\angle SGP$,

কিন্তু $\angle SPT=\angle STP$ (প্রমাণিত), $\therefore$ $\angle SPG=\angle SGP$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\because$ $\angle SPG=\angle SGP$, $\therefore$ $SP=SG$.

$\therefore$ $ST=SP=SG$.

174. The subnormal at any point on a parabola is equal to the semi-latusrectum.

মনে কর, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব PG [চিত্র 15 দেখ] অক্ষকে $(y=0)$ G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং PN অক্ষের উপর লম্ব। অতএব, উপ-অভিলম্ব হইল NG এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, উপ-অভিলম্ব = নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক (অর্থাৎ $2a$)।

এখানে $AN = x_1$, $PN = y_1$.

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y_1x + 2ay = y_1(x_1 + 2a), \quad \text{বা,} \quad y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)\text{।}$$

এই অভিলম্ব অক্ষকে $(y = 0)$ G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, সুতরাং G বিন্দুর কোটি শূন্য এবং ভুজ $= AG = x$. অতএব, ঐ সমীকরণ হইতে পাই,

$$0 - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1), \quad \text{বা} \quad -2ay_1 = -y_1(x - x_1)$$

$\therefore \quad x - x_1 = 2a$, বা $AG - AN = 2a$ ($\because AG = x$, $AN = x_1$)

$\therefore$ উপ-অভিলম্ব $NG = AG - AN = 2a$ অর্থাৎ নাভিলম্বের অর্ধেক ।

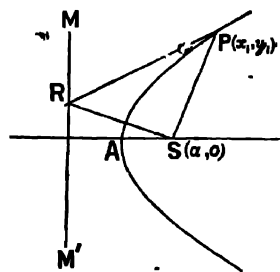
[দ্রষ্টব্য । নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক বলিয়া অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্যও ধ্রুবক ।]

175. The portion of a tangent to a parabola at any point on it, intercepted between the point of contact and the directrix subtends a right-angle at the focus.

মনে কর $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভি S, নিয়ামক MM′, অধিবৃত্তের উপর যে কোন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত অধিবৃত্তের স্পর্শকটি নিয়ামককে R বিন্দেুত ছেদ করিয়াছে।

চিত্র 18

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle PSR = 1$ সমকোণ।

এখানে শীর্ষ A হইল মূল বিন্দু, অধিবৃত্তের অক্ষটি x-অক্ষ এবং শীর্ষ হইতে নাভির দূরত্ব $AS = a$; সুতরাং S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$। এক্ষণে, নিয়ামক MM′ এর সমীকরণ হইল $x = -a$......(1) এবং স্পর্শক PR এর সমীকরণ হইল $yy_1 = 2a(x + x_1)$......(2)।

এই সমীকরণ দুইটি হইতে পাই $x=-a$, এবং $y=\frac{2a}{y_1}(-a+x_1)$,

$\therefore$ R এর স্থানাঙ্ক $\left\{-a, \frac{2a}{y_1}(-a+x_1)\right\}$

$\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$,

$\therefore$ SPর প্রবণতা (gradient) $m_1=\frac{y_1-0}{x_1-a}$ ।

অনুরূপে SR এর প্রবণতা $m_2=\frac{\frac{2a}{y_1}(-a+x_1)-0}{-a-a}$

$$=\frac{2a(-a+x_1)}{-2ay_1}=\frac{(x_1-a)}{-y_1}$$

$\therefore$ $m_1m_2=\frac{y_1}{x_1-a}\times\frac{(x_1-a)}{-y_1}=-1.$

অতএব $\angle$PSR একটি সমকোণ।

176. The locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to a parabola is the directrix.

সরলরেখা $y=mx+\frac{a}{m}$, $y^2=4ax$ এর স্পর্শক। যদি ঐ স্পর্শক বহিঃস্থ বিন্দু (h, k) দিয়া যায়, তব $k=mh+\frac{a}{m}$ হইবে। অতএব, $hm^2-km+a=0.$

মনে কর, এই সমীকরণের বীজ m_1, m_2. $\therefore$ $m_1m_2=\frac{a}{h}$.

কিন্তু m_1 ও m_2, (h, k) বিন্দুগামী দুইটি স্পর্শকের উন্নতি।

এখন, যেহেতু স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব, অতএব $m_1m_2=-1$

$\therefore$ $\frac{a}{h}=-1$, বা $h+a=0.$

$\therefore$ (h, k) বিন্দুর সঞ্চারপথ $x+a=0$ সরলরেখা অর্থাৎ নিয়ামক (কারণ, $x+a=0$ নিয়ামকের সমীকরণ)।

177. উপপাদ্য। অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চার-পথ উহার অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

[The locus of the middle points of a system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to its axis.]

এখানে জ্যা-গুলি সমান্তরাল বলিয়া তাহারা অক্ষের সহিত সমান কোণে নত থাকিবে অর্থাৎ উহাদের ঐ কোণের tangent অর্থাৎ উন্নতি m একই হইবে।

মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ এবং উহার একটি জ্যা-এর সমীকরণ $y=mx+c$. এই জ্যা-এর সমান্তরাল জ্যাগুলির উন্নতি m হইবে এবং উহাদের c ভিন্ন ভিন্ন মানের হইবে।

জ্যা-এর সমীকরণ $y=mx+c$ হইতে পাই $x=\frac{y-c}{m}$. x-এর এই মান অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ এ বসাইয়া পাই

$$y^2=\frac{4a(y-c)}{m}, \text{ বা } my^2-4ay+4ac=0,$$

এই সমীকরণের বীজ মনে কর y_1 এবং y_2. অতএব, ঐ জ্যা অধিবৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের কোটি দুইটি হইল y_1 ও y_2.

এখন $y_1+y_2=\frac{4a}{m}$, বা, $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2a}{m}$.

মনে কর, এই জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k)

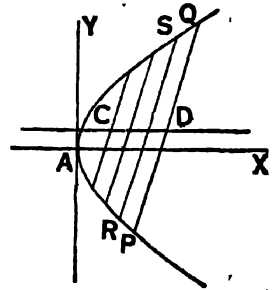
$$\therefore \quad k=\frac{y_1+y_2}{2} \quad \therefore \quad k=\frac{2a}{m}.$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $y=\frac{2a}{m}$, ইহা একটি সরলরেখা।

যেহেতু অক্ষের সমীকরণ $y=0$, $\therefore$ $y=\frac{2a}{m}$ সরলরেখা অক্ষের সমান্তরাল। অতএব, জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা এবং উহা অক্ষের সমান্তরাল।

178. ব্যাস (Diameter) : অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ যে সরলরেখা তাহাকে অধিবৃত্তের ব্যাস বলে।

চিত্রে PQ, RS প্রভৃতি সমান্তরাল জ্যা এবং D, E প্রভৃতি উহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ CD সরলরেখা। অতএব CD অধিবৃত্তের ব্যাস।

এই ব্যাস অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা ব্যাসের **শীর্ষবিন্দু**। চিত্রে C হইল ব্যাসের শীর্ষবিন্দু।

চিত্র 19

অধিবৃত্তের ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যাগুলিকে double ordinates বলা হয়।

179. Parameter (প্যারামিটর) :—অধিবৃত্তের কোন ব্যাস যে সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহাদের মধ্যে নাভিগামী জ্যাটিকে ঐ ব্যাসের **প্যারামিটর** বা **উপব্যাস** বলে।

[দ্রষ্টব্য। নাভিলম্বটি অধিবৃত্তের অক্ষের প্যারামিটর।]

180. The parameter of any diameter of a parabola is four times the focal distance of the vertex of the diameter.

মনে কর, অধিবৃত্তটির নিয়ামক MM′, নাভি S এবং নাভিগামী জ্যা PSP′. PSP′ এর উপর SK লম্ব টানা হইল, উহা যেন MM′ কে K বিন্দুতে ছেদ করিল। নিয়ামকের উপর KV লম্ব টানা হইল, উহা যেন অধিবৃত্তকে B বিন্দুতে এবং PSP′ কে V বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন KV হইল নাভিগামী জ্যা এর ব্যাস, PSP′ হইল KV ব্যাসের প্যারামিটর এবং B হইল KV এর শীর্ষ। BS যোগ করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PP′ = 4BS.

PM ও P′M′ নিয়ামকের উপর লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ : PM, KV ও P′M′ একই সরলরেখার উপর লম্ব,

∴ উহারা পরস্পর সমান্তরাল। আবার, K বিন্দু MM′ এর মধ্যবিন্দু বলিয়া V বিন্দু PP′ এর মধ্যবিন্দু এবং $KV = \frac{1}{2}(PM + P'M')$ হইবে।

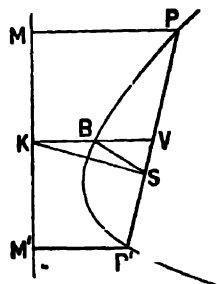
এক্ষণে, $PP' = PS + P'S = PM + P'M' = 2KV$.

আবার, ∵ $BK = BS$, ∴ $\angle BKS = \angle BSK$ এবং

∵ $\angle KSV$ সমকোণ, ∴ $\angle BSV = \angle BVS$.

∴ $BS = BV$, ∴ $BK = BS = BV$,

∴ $KV = 2BS$,

এক্ষণে $PP' = 2KV = 2 \times 2BS = 4BS$.

চিত্র 20

181. To find the equation of a chord of a parabola which is bisected at the given point (h, k).

মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$, এবং জ্যা-এর সমীকরণ $y = mx + c$.

অতএব, উপরোক্ত উপপাদ্য অনুযায়ী, $k = \frac{2a}{m}$ ∴ $m = \frac{2a}{k}$

আবার, যেহেতু জ্যা-এর সমীকরণ $y = mk + c$ এবং উহার উপর (h, k) বিন্দু অবস্থিত, অতএব $k = mh + c$.

∴ জ্যা-এর সমীকরণ $y - k = m(x - h)$,

বা, $y - k = \frac{2a}{k}(x - h)$, বা, $k(y - k) = 2a(x - h)$.

182. To find the locus of the middle points of the chords of a parabola, which pass through the given point (α, β).

মনে কর, অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (h, k).

∴ এই জ্যা-এর সমীকরণ $k(y - k) = 2a(x - h)$.

এখানে যেহেতু এই জ্যা (α, β) বিন্দু দিয়া গিয়াছে,

অতএব $k(\beta - k) = 2a(\alpha - h)$.

∴ মধ্যবিন্দু (h, k) এর সঞ্চারপথ $y(\beta - y) = 2a(\alpha - x)$

বা, $y^2 - \beta y = 2a(x - \alpha)$, ইহা একটি অধিবৃত্ত।

183. To show that the tangent at the vertex with respect to a diameter is parallel to the system of parallel chords bisected by the diameter.

মনে কর, অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর জ্যাগুলি $y=mx+c$ সরলরেখার সমান্তরাল।

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{2a}{m}$; সুতরাং এই ব্যাস যে বিন্দুতে অধিবৃত্তকে ছেদ করিয়াছে সে বিন্দুতে $x=\frac{y^2}{4a}=\frac{a}{m^2}$.

$\therefore$ এই ব্যাস এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুর অর্থাৎ ব্যাসের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

$\therefore$ $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y.\frac{2a}{m}=2a\left(x+\frac{a}{m^2}\right)$,

বা, $y=mx+\frac{a}{m}$. $\because$ $y=mx+\frac{a}{m}$ সরলরেখা $y=mx+c$ সরলরেখার সমান্তরাল, $\therefore$ স্পর্শকটি জ্যাগুলির সমান্তরাল।

184. To find the equation of the chord of contact of tangents drawn from a given point (x', y') to the parabola $y^2=4ax$.

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর বহিঃস্থ P (x', y') বিন্দু হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের PC ও PD দুইটি স্পর্শক, সুতরাং CD স্পর্শবিন্দু সংযোজক জ্যা (chord of contact)। মনে কর, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)।

C বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$ এবং D বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_2=2a(x+x_2)$।

$\because$ এই স্পর্শকদ্বয় P (x', y') বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

$\therefore$ $y'y_1=2a(x'+x_1)\cdots\cdots(1)$

এবং $y'y_2=2a(x'+x_2)\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমীকরণদ্বয় হইতে দেখা যায় যে, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দ্বারা $yy'=2a(x+x')$ সমীকরণটি সিদ্ধ।

$\therefore$ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) স্পর্শবিন্দুদ্বয় $yy'=2a(x+x')$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

অতএব, chord of contact এর সমীকরণ হইল $\boldsymbol{yy'=2a(x+x')}$.

উদাহরণমালা 22

উদা. **1.** Find the co-ordinates of the points of intersection of the straight line $x-5y+6=0$ with the parabola $y^2=x$.

$\because$ $x-5y+6=0$, $\therefore$ $x=5y-6$.……(1)

এখন x এর এই মান $y^2=x$ এ বসাইয়া পাই $y^2=5y-6$.

বা, $y^2-5y+6=0$, বা, $(y-2)(y-3)=0$,

$\therefore$ $y=2$ বা 3, $\therefore$ (1) হইতে $x=4$ বা 9.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (4, 2) এবং (9, 3).

উদা. **2.** Prove that the straight line $4x-2y+3=0$ touches the parabola $y^2=12x$ and find the co-ordinates of the point of contact. [C. U. 1947]

এখানে $y^2=12x$, বা, $x=\frac{y^2}{12}$; x এর এই মান $4x-2y+3=0$ সমীকরণে বসাইয়া পাই $\frac{y^2}{3}-2y+3=0$, বা $y^2-6y+9=0$,

বা, $(y-3)^2=0$, অতএব এই সমীকরণের বীজ দুইটি সমান।

অতএব, $4x-2y+3=0$, $y^2=12x$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে

এখন $\because$ $y=3$, $\therefore$ $x=\frac{3}{4}$. $\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{4}, 3)$.

উদা. **3.** If the straight line $y=3x+5$ touches the parabola $y^2=8ax$, find the co-ordinates of the point of contact, and the focus.

এখানে $y=3x+5$; y এর এই মান $y^2=8ax$ এ বসাইয়া পাই

$(3x+5))^2=8ax$ বা, $9x^2+2(15-4a)x+25=0$...... (1)

প্রদত্ত সরলরেখাটি স্পর্শক বলিয়া এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে ;

$\therefore\quad 4(15-4a)^2-4.9.25=0,$ বা $(15-4a)^2-225=0,$

বা, $(15-4a)^2-(15)^2=0,$

বা, $(30-4a)(-4a)=0,$ কিন্তু $\because\ a\neq 0,$

$\therefore\quad 30-4a=0,\quad \therefore\quad a=\frac{15}{2}.$

$\therefore$ (1) হইতে পাই $9x^2-30x+25=0,$

বা $(3x-5)^2=0,\ \therefore\ x=\frac{5}{3}.\ \therefore\ y=3\times\frac{5}{3}+5=10,$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{5}{3}, 10)$.

আবার, অধিবৃত্তটি $y^2=8ax,$ বা $y^2=8\times\frac{15}{2}x=60x,$

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক (15, 0).

উদা. 4. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2=4x$, which is parallel to the straight line $x+2y=3$.

$x+2y=3$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x+2y=c,$

সুতরাং $x=c-2y,$ xএর এই মান $y^2=4x$এ বসাইয়া পাই

$y^2=4c-8y,$ বা $y^2+8y-4c=0.$

$\because$ সরলরেখাটি স্পর্শক, $\therefore$ এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান,

$\therefore\ 64+16c=0,\quad \therefore\ c=-4.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইল $x+2y=-4,$ বা, $x+2y+4=0.$

উদা. 5. If $y=mx+c$ touches the parabola $y^2=12x$ and is parallel to the straight line $5y+3x+25=0$, find the values of m and c.

এখানে $y=mx+c$..... (1)

এবং $5y+3x+25=0,$ বা $y=-\frac{3}{5}x-5$......(2).

$\because$ (1) ও (2) সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল, $\therefore\ m=-\frac{3}{5}.$

$y^2=12x$ সমীকরণে yএর মান $mx+c$ বসাইয়া পাই,

$(mx+c)^2=12x,$ বা $m^2x^2+2(mc-6)x+c^2=0$...(3)

আবার, $\because\ y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=12x$এর স্পর্শক,

$\therefore$ (3) সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে,

$\therefore$ $4(mc-6)^2-4m^2c^2=0$, বা $-12mc+36=0$,

$\therefore$ $c=\frac{3}{m}=\frac{3}{-\frac{3}{5}}=-5$. অতএব, $m=-\frac{3}{5}$ এবং $c=-5$.

উদা. 6. Find the equation of the tangent and the normal to the parabolas :—

(i) $y^2=4x$ at $(1, 2)$; (ii) $y^2+12x=0$ at $(-3, 6)$

(iii) $y^2=12x$ at the ends of the latus rectum.

(i) স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$.

এখানে $a=1$, $y_1=2$ এবং $x_1=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y.2=2(x+1)$, বা, $y=x+1$.

$\therefore$ অভিলম্বের (normal এর) সমীকরণ

$y-2=-\frac{2}{2}(x-1)$, বা $y-2=-x+1$ বা $x+y=3$.

(ii) এখানে $y^2=-12x$, $\therefore$ $a=3$ এবং $x_1=-3$, $y_1=6$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হইল $yy_1=2a(x+x_1)$,

বা, $y\,6+6(x-3)=0$, বা $x+y=3$.

আবার, $y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$ সূত্র হইতে

অভিলম্বের সমীকরণ হইল $y-6=-\frac{6}{-6}(x+3)$, বা, $y=x+9$.

(iii) এখানে $a=12\div4=3$,

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $(3, 0)$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12

$\therefore$ নাভিলম্বের শেষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3, 6)$ এবং $(3, -6)$

$\therefore$ $(3, 6)$ বিন্দুতে স্পর্শক হইল $y\,6=6(x+3)$, বা $y=x+3$.

এই বিন্দুতে অভিলম্ব হইল $y-6=-\frac{6}{6}(x-3)$, বা $x+y=9$.

আবার, $(3, -6)$ বিন্দুতে স্পর্শক হইল $y\,(-6)=6(x+3)$,

বা, $x+y+3=0$.

এই বিন্দুতে অভিলম্ব হইল $y+6=-\frac{-6}{6}(x-3)$, বা $y=x-9$.

উদা. 7. Find the condition that the straight line $lx+my+n=0$ may touch the parabola $y^2=4ax$. [C. U.]

প্রদত্ত সমীকরণ $lx+my+n=0$ বা, $x=-\frac{my+n}{l}$.

x এর এই মান অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$y^2=-\frac{4a(my+n)}{l}, \quad \text{বা} \quad ly^2+4amy+4an=0,$$

ইহা y এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং ইহার বীজদ্বয় দ্বারা প্রদত্ত সরলরেখা ও অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি পাওয়া যায়। সরলরেখাটি অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে যখন এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে, অর্থাৎ, $(4am)^2=4l.4an)$

বা, $16a^2m^2=16anl$, বা, $am^2=ln$, ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

উদা. 8. Prove that the line $2x+4y=9$ is normal to the parabola $y^2=8x$. Find the foot of the normal.

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সাধারণ সমীকরণ

$$y=mx-2am-am^3 \cdots\cdots(1)$$

এবং পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am^2, -2am)\cdots\cdots(2)$ [অনুচ্ছেদ 168. দেখ।]

এখানে অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=8x$. $\therefore$ $4a=8$, বা $a=2$.

অতএব, $y^2=8x$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সাধারণ সমীকরণ হইবে

$$y=mx-4m-2m^3 \text{ এবং পাদবিন্দু } (2m^2, -4m).$$

এখন; m এর এমন কোন মান যদি পাওয়া যায় যাহাতে $2x+4y=9$ ও অভিলম্বের সমীকরণ একই হয়, তবেই সরলরেখাটি অধিবৃত্তের একটি অভিলম্ব হইবে।

এক্ষণে $2x+4y=9$, বা $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$.

$m=-\frac{1}{2}$ ধরিয়া অভিলম্বের সমীকরণটি হয়

$$y=-\tfrac{1}{2}x-4(-\tfrac{1}{2})-2(-\tfrac{1}{2})^3.$$

বা, $y=-\frac{1}{2}x+2+\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$, বা $2x+4y=9$.

আবার $2m^2=2(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ এবং $-4m=-4\times-\frac{1}{2}=2$.

অতএব, $2x+4y=9$ রেখাটি অধিবৃত্ত $y^2=8x$ এর অভিলম্ব এবং অভিলম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{2}, 2)$।

উদা. 9. Find the point of the parabola $y^2=4ax$ at which the normal is inclined at 30° at the axis. [C. U.]

এখানে, অভিলম্বের gradient $m=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

অভিলম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am^2, -2am)$

সুতরাং এক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{3}, -\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$.

উদা. 10. A tangent to the parabola $y^2=12x$ makes an angle of 60° with the x-axis ; find its equation and its point of contact.

মনে কর, স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx+c$, $\therefore\ m=\tan 60°=\sqrt{3}$.

$\therefore\quad c=\frac{a}{m}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ [$\because$ এখানে $a=12\div4=3$]

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$, বা $y=\sqrt{3}(x+1)$.

এখন y এর এই মান $y^2=12x$ এ বসাইয়া পাই

$3(x+1)^2=12x$, বা $(x+1)^2-4x=0$, বা, $(x-1)^2=0$,

$\therefore\quad x=1, 1,\quad \therefore\quad y=\sqrt{3}(x+1)=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 2\sqrt{3})$.

উদা. 11. Find the equation of the chord of the parabola $y^2=12x$ which is bisected at the point (2, 3).

এখানে, $h=2$ এবং $k=3$,

এবং $\because\ 4a=12$ (প্রদত্ত সমীকরণ হইতে), $\therefore\ a=3$.

এক্ষেত্রে, $k(y-k)=2a(x-h)$ সূত্র হইতে

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $3(y-3)=6(x-2)$, বা, $y=2x-1$.

উদা. 12. Find the locus of the middle points of all chords of the parabola $y^2=8x$, which pass through the point $(1,-2)$.

মনে কর, একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (h, k)। ইহার সমীকরণ $k(y-k)=4(x-h)$; যেহেতু এই জ্যা $(1,-2)$ বিন্দুগামী

$\therefore\ k(-2-k)=4(1-h)$, বা $k^2+2k=4(h-1)$.

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $y^2+2y=4(x-1)$, ইহা একটি অধিবৃত্ত।

উদা. 13. Find the equation of the diameter of the parabola $2y^2=3x$, which bisects all chords parallel to the straight line $4x+5y=20$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ $2y^2=3x$, বা $y^2=\frac{3}{2}x$, $\therefore$ এখানে $a=\frac{3}{8}$.

আবার, সরলরেখার সমীকরণ $y=-\frac{4}{5}x+4$. $\therefore$ এখানে $m=-\frac{4}{5}$.

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ $y=\dfrac{2a}{m}=\dfrac{2\times\frac{3}{8}}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{4}=-\dfrac{15}{16}$.

উদা. 14. Prove that the normal chord of a parabola at the point whose ordinate is equal to the abscissa subtends a right angle at the focus. [C. U. '40]

মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$. এখানে বিন্দুটির ভুজ ও কোটি সমান। মনে কর, প্রত্যেকে $=\alpha$, $\therefore\ \alpha^2=4a\alpha$, $\therefore\ \alpha=4a$.

অতএব, অধিবৃত্তটির যে-বিন্দুর ভুজ ও কোটি সমান তাহার স্থানাঙ্ক $(4a, 4a)$. মনে কর. অভিলম্ব-জ্যাটি (Normal chord) PQ এবং P বিন্দু $(4a, 4a)$।

$\therefore$ PQ এর সমীকরণ $y-4a=\dfrac{-4a}{2a}(x-4a)$,

বা, $y=-2x+12a \cdots\cdots(1)$

ইহা হইতে x এর মান $\dfrac{12a-y}{2}$ অধিবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যায় $y^2=2a(12a-y)$, বা $y^2+2ay-24a^2=0$, বা $(y+6a)(y-4a)=0$.

$\therefore\ y=-6a$ বা $4a$, সুতরাং Q এর কোটি $=-6a$. Q এর ভুজ বাহির করিতে সমীকরণ (1)এ $y=-6a$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$-6a=-2x+12a, \qquad \therefore\ x=9a.$$

অতএব, Q এর স্থানাঙ্ক $(9a,\ -6a)$. নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$.

এখন SP এর gradient $=\dfrac{4a-0}{4a-a}=\dfrac{4}{3}$

এবং SQ এর gradient $=\dfrac{-6a-0}{9a-a}=-\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$ উভয় gradient এর গুণফল $=\frac{4}{3}\times-\frac{3}{4}=-1.$

অতএব, SP ও SQ সমকোণে নত আছে, অর্থাৎ নাভি S বিন্দুতে অভিলম্ব-জ্যা PQএর সম্মুখকোণটি সমকোণ।

উদা. 15. Two equal parabolas have the same vertex and their axes are at right angles ; prove that the common tangent touches each parabola at the end of a latus rectum. [C. U. '35]

[এখানে বলা আছে অধিবৃত্ত দুইটি সমান, সুতরাং উহাদের নাভিলম্ব সমান হইবে। আবার উহাদের অক্ষদ্বয় সমকোণে নত আছে বলায় বুঝা যাইতেছে যে একটির অক্ষ যদি x-অক্ষ বরাবর হয় তবে অপরটির অক্ষ হইবে y-অক্ষ বরাবর।]

মনে কর, একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ ······(1)

প্রশ্নের সর্তানুযায়ী অপর অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2=4ay$ ······(2).

অধিবৃত্ত (1) এর নাভিলম্বের প্রান্তদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(a,\ \pm 2a)$ এবং (2) এর নাভিলম্বের প্রান্তদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 2a,\ a)$।

এখন প্রথম অধিবৃত্তের $(a, -2a)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$-2ay=2a(x+a), \quad \text{বা,} \quad -y=x+a, \quad \text{বা,} \quad x+y+a=0.$$

আবার, দ্বিতীয় অধিবৃত্তের $(-2a, a)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$-2ax=2a(y+a), \quad \text{বা,} \quad -x=y+a, \quad \text{বা,} \quad x+y+a=0$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে উভয় স্পর্শকের একই সমীকরণ।

অতএব, অধিবৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে এবং ঐ সাধারণ স্পর্শকটি উভয় অধিবৃত্তের নাভিলম্বের এক প্রান্তে স্পর্শক হয়।

উদা. 16. If l and l' be the lengths of the segments of any focal chord of the parabola $y^2=4ax$, prove that $\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a}$.

[C. U. (B. Sc.) '51]

মনে কর PSP′ অধিবৃত্তটিতে যে-কোন নাভিগামী জ্যা এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am_1^2, 2am_1)$ ও P′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am_2^2, 2am_2)$.

$\because$ PSP′ নাভিগামী জ্যা, $\therefore m_1m_2=-1$, $\therefore m_1^2m_2^2=1$.

$\because$ P এর ভুজ am_1^2, $\therefore SP=a+am_1^2=a(1+m_1^2)$

$\therefore$ এখানে $l=a(1+m_1^2)\cdots\cdots(1)$.

অনুরূপে $SP'=a+am_2^2=a(1+m_2^2)$, $\therefore l'=a(1+m_2^2)\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, $\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a(1+m_1^2)}+\frac{1}{a(1+m_2^2)}=\frac{1+m_2^2+1+m_1^2}{a(1+m_1^2)(1+m_2^2)}$

$$=\frac{2+m_2^2+m_1^2}{a(1+m_1^2+m_2^2+m_1^2m_2^2)}=\frac{2+m_2^2+m_1^2}{a(1+m_1^2+m_2^2+1)}\ [\because m_1^2m_2^2=1]$$

$$=\frac{(2+m_2^2+m_1^2)}{a(2+m_2^2+m_1^2)}=\frac{1}{a}.$$

উদা. 17. Show that the straight line $3y=1$ bisects all chords of the parabola $3y^2=4x$, which are parallel to the straight line $y=2x+3$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=\frac{4}{3}x$, সুতরাং $a=\frac{4}{3\times4}=\frac{1}{3}$.

$\because$ সরলরেখার সমীকরণ $y=2x+3$, $\therefore m=2$.

যে ব্যাস $y=2x+3$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক, তাহার সমীকরণ $y=\frac{2a}{m}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$, বা $3y=1$.

$\therefore$ $3y=1$ সরলরেখা, $y=2x+3$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক।

Exercise 22

1. Find the points of intersection of the line

(i) $y=x+2$ with the parabola $y^2=9x$,

(ii) $3x-y=1$ with the parabola $y^2=4x$.

2. Show that the straight line

(i) $y=2x+1$ touches the parabola $y^2=8x$.

(ii) $8y=16x+3$ touches the parabola $y^2=3x$.

(iii) $3y=x+3$ touches the parabola $3y^2=4x$, and find the point of contact in each case.

3. Find the equations of the tangent and normal to

(i) $x^2=-12y$ at $(6, -3)$

(ii) $y^2=8x$ at the ends of the latus rectum.

(iii) $x^2+2x+y=4$ at $(-2, 4)$

(iv) $y^2=6x$ at the point whose ordinate is 12.

(v) $y^2=4a(x-a)$ at the ends of the latus rectum.

4. Find the equation of the normal to the parabola $y^2=8x$, which is parallel to the line $x-2y+3=0$ and also find the co-ordinates of its foot.

5. Prove that the normal to the circle $x^2+y^2+4x+2y-8=0$ at the point $(1, 1)$ is a tangent to the parabola $9y^2=8x$.

6. For the parabola $y^2=8x$ form the equations of two tangents which pass through the point $(-2, \frac{16}{3})$. Also, find the angle between them. [C. U, '57]

7. The normal to the parabola $y^2=4ax$ at $(am_1^2, 2am_1)$ meets again at $(am_2^2, 2am_2)$. Prove that $m_1^2+m_1m_2+2=0$.

8. Find the length of the normal chord of the parabola $y^2=4x$ at the point whose ordinate is equal to its abscissa.

9. Find the point of the parabola $y^2=8x$ at which the normal is inclined at an angle 60° to the axis. [C. U. '44]

10. Prove that the straight line $4x-2y+3=0$ touches the parabola $y^2=12x$ and find the co-ordinates to the point of contact. [C. U.]

11. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2=7x$, which is parallel to the straight line $4y=x-5$ and find the co-ordinates of the point of contact.

12. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2=8x$, which is perpendicular to the line $2x-3y=6$.

13. A tangent to the parabola $y^2=8x$ makes an angle 45° with the straight line $y=3x+5$. Find its equation and its point of contact. [C. U. '46]

14. Find the condition that the straight line $lx+my+n=0$ may touch the parabola $x^2=4ay$.

15. Find the co-ordinates of the points where the line $x-5y+6=0$ meets the parabola $y^2=x$. [C. U. '44]

16. If the line $y=3x+1$ touches the parabola $y^2=4ax$, find the length of the latus rectum. [C. U. '46 ; D. U. '49]

17. Show that the straight line $4a(y-b)=x$ touches the parabola $ay^2=bx$. [C. U. (B. Sc) '21]

18. For what value of a, will the straight line $y=3x+1$ touch the parabola $y^2=4ax$?

19. For what value of a will the straight line $y=2x+3$ touch the parabola $y^2=4ax$? [D. U. '48]

20. Show that the line $x+my+am^2=0$ touches the parabola $y^2=4ax$. Find also the co-ordinates of the point of contact. [U. P. B. '48]

21. Find the equations of the normals to the parabola $y^2=4ax$ at the ends of the latus rectum. [U. P. B, '52]

22. Find the equation of the normal :

(a) to the parabola $y^2=-4x$ at the point $(-7, 4)$

(b) to the parabola $x^2=4y$ at the point $(3, 3)$.

23. Find the co-ordinates of that particular point on the parabola $y^2=4ax$, the normal at which, terminated by the axis, is equal in length to the latus rectum. [C. U, '56]

24. Find the equation of the common tangent to the two parabolas $y^2=32x$ and $x^2=108y$. [C, U.]

25. A straight line touches both $x^2+y^2=2a^2$ and $y^2=8ax$. Find its equation. [C. U, '55]

26. Find the points on the parabola $y^2=4ax$ at which the tangent is inclined at 30° to the axis.

27. A tangent to the parabola $y^2=8x$ makes an angle 45° with the straight line $y=3x+5$. Find its equations and its points of contact. [C. U. '46]

28. Show that the chord $4x+3y+1=0$ of the parabola $y^2=8x$ is bisected at the point $(2, -3)$. [C. U.]

29. Show that the tangents at the extremities of a focal chord of a parabola intersect at right-angles to the directrix. [U. P. B. '43]

30. If the straight line $4x-2y+3=0$ touches the parabola $y^2=12x$ at the poiut $(\frac{3}{4}, 3)$, verify that the subtangent is bisected at the vertex. [C. U. '50]

31. A circle and a parabola intersect in four points. Prove that the algebraic sum of the ordinates of the four points is zero. [C. U. (B. Sc) '20]

32. Find the equation of the diameter of the parabola $y^2=4x$ which bisects all chords parallel to the straight line $y=2x+3$.

33. Find the equation to the chord of the parabola $y^2=12x$, which is bisected at the point $(3, 2)$.

34. Find the equation to the chord of the parabola $y^2=8x$ which is bisected at the point $(2, -3)$.

35. Prove that the locus of the middle points of all chords of the parabola $y^2=4ax$, which are drawn through the vertex is the parabola $y^2=2ax$. [C. U. (B. Sc.) '46]

36. Show that the straight line $4y+9=0$ bisects all chords of the parabola $y^2=3x$, which are parallel to the straight line $2x+3y=6$.

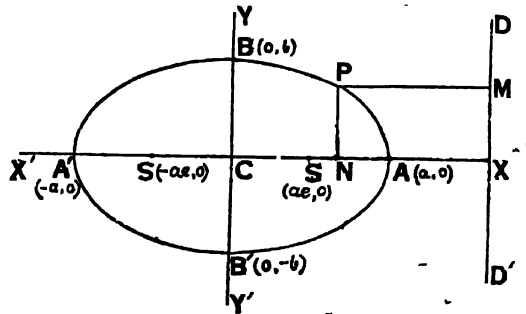
37. Find the locus of the middle points of all chords of the parabola $4y^2=5x$, which pass through the fixed point $(-2, 3)$.

উপবৃত্ত (Ellipse)

185. সংজ্ঞা : যদি কোন গতিশীল বিন্দু সমতলের উপরে এমন ভাবে, যায় যাহাতে ঐ সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে তাহার দুরত্ব দুইটির অনুপাত সতত সমান থাকে এবং এই অনুপাত যদি এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথকে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে।

ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে **নাভি** (Focus) ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখাকে **নিয়ামক** (Directrix) এবং ঐ অনুপাতকে **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলে।

উৎকেন্দ্রতাকে e দ্বারা সূচিত করা হয়। যদি S নাভি এবং উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন P বিন্দু হইতে DD_1 নিয়ামকের উপরে লম্ব PM হয়, তবে $\frac{SP}{PM}=e$ হয় এবং $e<1$. নাভি S হইতে নিয়ামকের উপরে SX লম্ব টানা হইল, এই রেখাকে **পরাক্ষ রেখা** (Line of major axis) বলে।

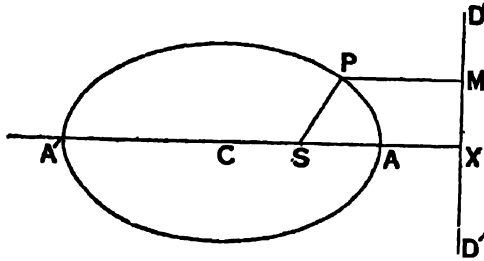
পরাক্ষ রেখা উপবৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই বিন্দু Aকে **শীর্ষবিন্দু** বলে। XS এর বর্ধিতাংশে A′ এমন একটি বিন্দু লওয়া হইল

চিত্র 21

যাহাতে $\frac{SA'}{A'X}=\frac{SA}{AX}=e$ হয়, তাহা হইলে A′ উপবৃত্তের উপরিস্থ বিন্দু হইবে। A বিন্দুকে **দ্বিতীয় শীর্ষবিন্দু** বলে। AA′ এর মধ্যবিন্দু Cকে উপবৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) বলে।

উপবৃত্তের নাভিগামী যে জ্যা পরাক্ষ রেখার উপর লম্ব তাহাকে উপবৃত্তের **নাভিলম্ব** (latus rectum) বলে।

186. কেন্দ্রকে মূল বিন্দু এবং পরাক্ষ রেখাকে x-অক্ষ ধরিয়া উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of an ellipse, taking the major axis as the axis of x and the centre as the origin.]

মনে কর, C উপবৃত্তে কেন্দ্র, নিয়ামক DD_1 এর উপরে CX লম্ব। S নাভি এবং A, A′ শীর্ষবিন্দুদ্বয়। CX কে x-অক্ষ এবং Cকে মূল বিন্দু ধরিয়া উপবৃত্তের

চিত্র 22

উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু P এর ভুজ-কোটি, মনে কর (x, y). PN এবং PM যথাক্রমে পরাক্ষ রেখা এবং নিয়ামকের উপর লম্ব।

এখন $SA = e.AX$ এবং $SA' = e.A'X$, $\therefore$ $SA + SA' = e(AX + A'X)$,

$\therefore$ $AA' = e(AX + AA' + AX) = e(2AX + 2CA) = 2e.CX$.

মনে কর, $AA' = 2a$, $\therefore$ $2a = 2e.CX$, $\therefore$ $a = e.CX$

আবার $SA' - SA = e(A'X - AX) = eAA' = 2ea$,

কিন্তু $SA' - SA = (CA' + CS) - (CA - CS) = 2CS$ [$\because$ $CA = CA'$],

$\therefore$ $2CS = 2ea$. $\therefore$ $CS = ea$.

SP যুক্ত করা হইল।

$\therefore$ $SP = e.PM = e.XN = e(CX - CN) = e.CX - e.CN = a - ex$,

$SN = CN - CS = x - ea$.

এখন SPN সমকোণী ত্রিভুজের $SN^2+PN^2=SP^2$

$\therefore\ (x-ea)^2+y^2=(a-ex)^2,$

বা, $x^2+e^2a^2+y^2=a^2+e^2x^2,$

বা, $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2),$

উভয়পক্ষকে $a^2(1-e^2)$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$

যখন $x=0$, তখন $y=\pm a\sqrt{1-e^2}.$

$\therefore$ দেখা যাইতেছে যে, y-অক্ষ উপবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর, ঐ দুই বিন্দু B এবং B′. ধরিলাম $BB'=2b,$

$\therefore\ b=CB=a\sqrt{1-e^2},\quad \therefore\ b^2=a^2(1-e^2)$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

অনুসিদ্ধান্ত (1). AA′ কে **পরাক্ষ** (major axis) এবং BB′ কে **উপাক্ষ** (minor axis) বলা হয়।

$\therefore$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$.

অনুসিদ্ধান্ত (2). $b^2=a^2(1-e^2)\quad\cdots$(i)

বা, $a^2e^2=a^2-b^2\quad\cdots$(ii)

$\therefore\ e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ বা $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\quad\ldots$(iii)

অনুসিদ্ধান্ত (3). যেহেতু $b^2=a^2-a^2e^2$, $CB=b$, $CA=a$, $CS=ae$,

$\therefore\ CB^2=CA^2-CS^2.$

অনুসিদ্ধান্ত (4). যেহেতু $CS=ea$, $\therefore$ নাভি S এর স্থানাঙ্ক (ae, o).

অনুসিদ্ধান্ত (5). যেহেতু নিয়ামক y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $CX=\frac{a}{e}$

$\therefore$ **নিয়ামকের সমীকরণ হইল** $x=\frac{a}{e}$ বা $ex=a$.

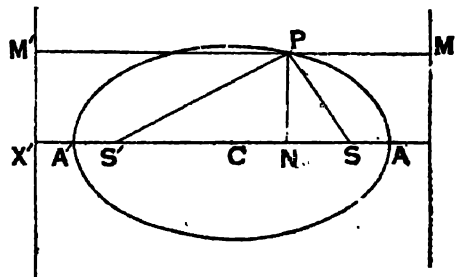
অনুসিদ্ধান্ত 6. পরাক্ষ রেখার উপরে যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-ae, o)$ তাহাকে S′ দ্বারা সূচিত করা হয়, এবং y-অক্ষরে সমান্তরাল আর একটি সরল রেখা পাওয়া যায় যাহার সমীকরণ $ex+a=0$. এই সরল রেখাকে **দ্বিতীয় নিয়ামক** এবং S′ কে **দ্বিতীয় নাভি** বলে।

দ্রষ্টব্য :—উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ পাওয়া যায়। এখন দেখা যাইতেছে, যদি x এর মান a হইতে বৃহত্তর এবং $-a$ হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, তবে y এর মান কাল্পনিক হয়। ∴ উপবৃত্তটি A এবং A′ এর বাহিরে যাইবে না। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে ইহা B, B′ এর বাহিরেও যায় না। আরও দেখা যায় যে x এর যে-কোন মানে y এর দুইটি সমান এবং বিপরীতধর্মী মান পাওয়া যায় এবং y এর যে-কোন মানে x এর সমান এবং বিপরীতধর্মী দুইটি মান্ পাওয়া যায়। ∴ উপবৃত্ত পরাক্ষ রেখা এবং উপাক্ষ রেখায় সুসমঞ্জস অবিচ্ছিন্ন বক্র রেখা (closed curve)।

187. উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর নাভিদ্বয় হইতে দূরত্বের সমষ্টি পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

[The sum of the focal distances of a point on an ellipse is equal to the major axis.]

চিত্র 23

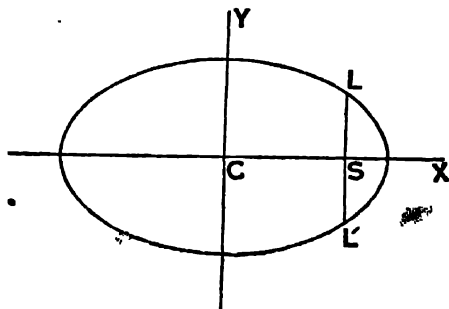
P উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু। MX ও M′X′ দুইটি নিয়ামক, S ও S′ দুইটি নাভি। MM′, P বিন্দুর মধ্য দিয়া নিয়ামকদ্বয়ের উপর লম্ব।

এখন, $SP+S'P=$
$e.PM+e.PM'=e(PM+PM')=e.MM'=2e.CX=2a=$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য।

[দ্রষ্টব্য। ∵ ঐ দূরত্বের সমষ্টি = পরাক্ষের দৈর্ঘ্য ∴ ঐ সমষ্টি ধ্রুবক।]

188. নাভিলম্ব ও তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[To find the length of the latus rectum of an ellipse.]

মনে কর, LSL′ নাভিলম্ব। যেহেতু S এর স্থানাঙ্ক (ae, o),

$\therefore$ L এর ভুজ $= ae$. মনে কর, L এর স্থানাঙ্ক (ae, SL).

চিত্র 24

যেহেতু L, উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর উপরিস্থ বিন্দু,

$\therefore$ L এর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{\text{SL}^2}{b^2}=1,$ বা $\frac{\text{SL}^2}{b^2}=1-e^2$

$\therefore \quad \text{SL}^2=b^2(1-e^2) =\frac{b^4}{a^2} \left[\because \quad e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\right].$

$\therefore$ $\text{SL}=\frac{b^2}{a}$. $\therefore$ **নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য** $=\text{LL}'=2\text{SL}=\frac{2b^2}{a}$.

189. To prove $\text{PN}^2 : \text{AN.A}'\text{N} :: \text{BC}^2 : \text{AC}^2$.

উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

বা, $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{a^2}.$

$\therefore \quad \frac{\text{PN}^2}{b^2}=\frac{\text{A}'\text{N.AN}}{a^2}, \quad \therefore \quad \frac{\text{PN}^2}{\text{AN.A}'\text{N}}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{\text{BC}^2}{\text{AC}^2}$ [চিত্র 21 দেখ।]

অনুসিদ্ধান্ত। (I) উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ হইলে বুঝিতে হইবে উহার পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর অর্থাৎ উহার নাভিদ্বয় পরাক্ষের উপর অবস্থিত এবং তখন নিয়ামক দুইটি উপাক্ষের সমান্তরাল। এইরূপ উপবৃত্তের—

(*a*) $CS=CS'=ae$, এবং $CX=CX'=\frac{a}{e}$

(*b*) $\because$ উভয় নাভিলম্ব সমান, $\therefore$ S′ বিন্দুগামী নাভিলম্ব$=\frac{2b^2}{a}$.

(*c*) নাভি S হইতে উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $SP=a+ex$ এবং $S'P=a-ex$.

$\therefore$ $SB=a$ ($\because$ B বিন্দুর পক্ষে $x=0$) এবং $S'B=a$.

(*d*) A শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং A′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$। উপাক্ষের দুই প্রান্তবিন্দু B ও B′ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b)$ এবং $(0, -b)$।

(*e*) নাভি S′ এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$, X ও X′ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে

$$\left(\frac{a}{e}, 0\right) \text{ এবং } \left(-\frac{a}{e}, 0\right).$$

(*f*) পরাক্ষের সমীকরণ হইল $y=0$, এবং উপাক্ষের সমীকরণ $x=0$.

(*g*) অপর নিয়ামকটির সমীকরণ হইল $ex=-a$, বা $x=-\frac{a}{e}$.

(*h*) নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ হইল $x=ae$ ও $x=-ae$.

(II) উপবৃত্তের পরাক্ষ যদি y-অক্ষ বরাবর হয় অর্থাৎ উহার নাভিদ্বয় যদি উপাক্ষের উপর থাকে এবং মূলবিন্দুটি পূর্বের ন্যায় কেন্দ্রে অবস্থিত হয় তবে উপবৃত্তের সমীকরণ হয় $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ [এক্ষেত্রেও পরাক্ষ$=2a$ এবং উপাক্ষ$=2b$ ধরিয়া]।

এইরূপ উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, ae)$ ও $(0, -ae)$ হইয়া থাকে; এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হয় $ey=a$ ও $ey=-a$.

190. উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the tangent to an ellipse at the point (x_1, y_1).]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং উহার উপরিস্থ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) দুইটি বিন্দু।

এখন (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \quad \cdots \text{(i)}$$

যেহেতু ঐ বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত,

অতএব, $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \cdots$(ii) এবং $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \cdots$(iii)

(ii)−(iii) করিয়া পাই $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,

বা, $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}$

$\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$.

$\therefore (x_1, y_1)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী জ্যা এর সমীকরণ

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1) \text{ এবং}$$

ইহা স্পর্শক হয় যখন $x_2=x_1$ ও $y_2=y_1$; তখন $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{2x_1}{2y_1}=\frac{x_1}{y_1}$.

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$, বা, $\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{x_1^2}{a^2}$,

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ [সমীকরণ (ii) হইতে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{\mathbf{xx_1}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{yy_1}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$.

[**দ্রষ্টব্য** ঃ—এখানেও দেখিতেছি যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণে x^2 এবং y^2 এর পরিবর্তে xx_1 এবং yy_1 লিখিলেই (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।]

191. (x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর **অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।**

[To find the equation of the normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at the point (x_1, y_1).]

(x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$ এবং ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$

$\because$ এই সরলরেখা ঐ স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুতে লম্ব,

$\therefore\ m\times\left(-\frac{b^2}{y_1}.\frac{x_1}{a^2}\right)=-1,\quad \therefore\ m=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ হইল $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$

বা, $\frac{x-x_1}{b^2x_1}=\frac{y-y_1}{a^2y_1}$ বা, $\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}.$

192. সরলরেখা $y=mx+c$, উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর **স্পর্শক হইবার সর্ত।**

[To find the condition that the straight line $y=mx+c$ may touch the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$]

yএর মান $mx+c$ উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0 \cdots\cdots$ (i)

ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ∴ এই সমীকরণের দুইটি বীজ।

∴ ঐ সরলরেখা উপবৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে।

এই দুই ছেদবিন্দু যখন একত্র মিলিত হয়, অর্থাৎ যখন সমীকরণ (i) এর বীজদ্বয় সমান হয় তখন সরলরেখাটি উপবৃত্তের স্পর্শক হয়।

আবার, ঐ বীজদ্বয় সমান হইবার সর্ত

$$4a^4m^2c^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)=0,$$

বা, $a^2m^2c^2-(a^2m^2+b^2)(c^2-b^2)=0,$

বা, $a^2m^2b^2+b^4-b^2c^2=0,$ বা, $c^2=a^2m^2+b^2,$

বা, $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

∴ $y=mx+c$ সরলরেখাটি উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শক হইবার সর্ত হইল $\mathbf{c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$.

অনুসিদ্ধান্ত : $y=mx\pm\sqrt{a^4m^4+b^4}$ সরলরেখা m এর যে-কোন মানেই উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শক হয়।

103. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

[Two tangents can be drawn to an ellipse from an external point].

মনে কর, (x', y') বহিঃস্থ যে-কোন বিন্দু।

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ রেখা উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শক।

যদি এই স্পর্শক (x', y') বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে

$y'=mx'\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, বা, $(y'-mx')^2=a^2m^2+b^2$ হইবে।

ইহা m এর দ্বিঘাত সমীকরণ, অতএব m এর দুইটি মান পাওয়া যায়,

∴ বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

194. উপবৃত্তের পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয়।

[To find the locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to an ellipse.]

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ স্পর্শক দুইটি যদি কোন বিন্দু (h, k) এর মধ্য দিয়া যায়, তাহা হইলে

$k=mh\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ হয়, $\therefore\ (k-mh)^2=a^2m^2+b^2$,

বা, $(k^2-a^2)m^2-2mkh+(k^2-b^2)=0.$

মনে কর, এই সমীকরণের বীজ m_1, m_2 $\therefore\ m_1m_2=\frac{k^2-b^2}{h^2-a^2}$,

কিন্তু $\because$ স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব, $\therefore\ m_1m_2=-1$

$\therefore\ \frac{k^2-b^2}{h^2-a^2}=-1,$ বা $h^2+k^2=a^2+b^2.$

$\therefore$ লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দু (h, k) এর সঞ্চারপথ হইল $x^2+y^2=a^2+b^2$.

ইহা একটি বৃত্ত, উপবৃত্তের কেন্দ্রই ইহার কেন্দ্র এবং ইহার

ব্যাসার্ধ $=\sqrt{a^2+b^2}=$ AB.

এই বৃত্তকে **নিয়ামক বৃত্ত** (Director Circle) বলে।

195. স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী জ্যা এর (chord of contact) সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation of the chord of contact of the point (x', y') point with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ এবং $\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$.

যদি এই স্পর্শকদ্বয় (x', y') বিন্দুগামী হয় তাহা হইলে,

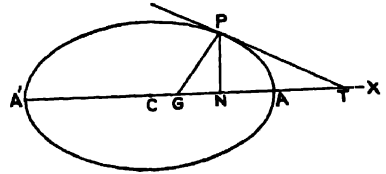
$\frac{x'x_1}{a^2}+\frac{y'y_1}{b^2}=1$ এবং $\frac{x'x_2}{a^2}+\frac{y'y_2}{b^2}=1$ হইবে।

এই সর্ত দুইটি হইতে দেখা যাইতেছে যে, $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$ সরলরেখা (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) স্পর্শবিন্দুদ্বয় দিয়া যায়।

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী জ্যা এর সমীকরণ হইল $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1.$

196. উপস্পর্শক (subtangent) ও উপ-অভিলম্বের (subnormal) দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

চিত্র 25

উপবৃত্তের উপর অবস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত PT স্পর্শক ও PG অভিলম্ব যেন পরাক্ষকে যথাক্রমে T ও G বিন্দুতে ছেদ করিল। অক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল। অতএব, P বিন্দুতে NT হইল উপ-স্পর্শক এবং NG হইল উপ-অভিলম্ব।

এক্ষণে P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1\cdots$ (1)

পরাক্ষের সমীকরণ $y=0$, এবং স্পর্শকটি ঐ অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করায় T বিন্দুর কোটি শূন্য এবং (1) সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া T বিন্দুর ভুজ CT পাওয়া যায়।

(1)-এ $y=0$ বসাইয়া পাই $\frac{xx_1}{a^2}=1$, $\therefore\ x=\frac{a^2}{x_1}$. $\therefore$ CT$=x=\frac{a^2}{x_1}$.

$\therefore$ NT$=$CT$-$CN$=\frac{a^2}{x_1}-x_1=\frac{a^2-x_1^2}{x_1}$.

অতএব, উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য$=\frac{a^2-x_1^2}{x_1}$.

আবার, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$\dfrac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\dfrac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$......(2), এই সরলরেখা পরাক্ষকে $(y=0)$ G বিন্দুতে ছেদ করায় (2) সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া G বিন্দুর ভুজ CG পাওয়া যায়।

(2)এ $y=0$ বসাইয়া পাই $\dfrac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\dfrac{-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=-b^2$, বা, $x=x_1-\dfrac{b^2}{a^2}x_1$

$\therefore$ $CG=x=x_1\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)$,

$\therefore$ উপ-অভিলম্ব $NG=CN-CG=x_1-x_1\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)=\dfrac{b^2}{a^2}x_1$

$=\dfrac{a^2(1-e^2)x_1}{a^2}=(1-e^2)x_1.$

197. (উপপাদ্য)। উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

[The locus of the middle points of a system of parallel chords of an ellipse is a straight line passing through the centre.]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, মূলবিন্দুই যাহার কেন্দ্র এবং $y=mx$ সরলরেখার সমান্তরাল একটি জ্যা এর সমীকরণ $y=mx+c$.…(1). এই জ্যা এর সমান্তরাল জ্যাগুলির উন্নতি m. এবং উহাদের c ভিন্ন ভিন্ন মানের। এই জ্যাএর মধ্যবিন্দু মনে করি (h, k).

$\therefore$ $k=mh+c$, $\therefore$ $c=k-mh$······(2)

এখন (1) হইতে y এর মান $mx+c$, উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+c)^2}{b^2}=1$,

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0\cdots\cdots(3)$

মনে কর, x_1 এবং x_2 এই সমীকরণের বীজ। অতএব, ইহারাই জ্যা এবং উপবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের দুইটি ভুজ।

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2+b^2},\ \text{বা}\ \frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2};$$

$$\text{কিন্তু}\ h=\frac{x_1+x_2}{2},\quad \therefore\ h=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}\cdots\cdots(4)$$

এখন (2) হইতে লব্ধ c এর মান (4) এ বসাইয়া পাই

$$h=-\frac{a^2m(k-mh)}{a^2m^2+b^2},\ \text{বা},\ b^2h=-a^2mk\quad\therefore\ k=-\frac{b^2}{a^2m}.h$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}.x$, ইহা একটি কেন্দ্রগামী সরলরেখা।

198. ব্যাস (Diameter) :

উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথকে উহার ব্যাস বলে।

$y=mx$ এর সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ

অর্থাৎ ব্যাসের সমীকরণ $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}x=m'x$ (মনে কর)

$$\text{সুতরাং}\ m'=-\frac{b^2}{a^2m},\ \therefore\quad mm'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে যে, যদি $mm'=-\dfrac{b^2}{a^2}$ হয়, তবে সরলরেখা $y=m'x$, অন্য সরলরেখা $y=mx$ এর সমান্তরাল জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক হয়।

স্পষ্টতঃ ঐ সর্ত $mm'=-\dfrac{b^2}{a^2}$ হইতে আরও দেখা যাইতেছে যে $y=mx$ সরলরেখা, $y=m'x$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক।

প্রতিযোগী বা অনুবদ্ধ ব্যাস (Conjugate diameters) :

দুইটি ব্যাস যদি এমন হয় যে প্রত্যেকটি অপরটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে তাহাদিগকে উপবৃত্তের অনুবদ্ধ ব্যাস (Conjugate diameters) বলে।

$\therefore$ দুইটি ব্যাস $y=mx$ এবং $y=m'x$ উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর অনুবদ্ধ ব্যাস (Conjugate diameters) হইবার সর্ত $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

199. To find the equation to the chord of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, which is bisected at the point (h, k).

মনে কর, জ্যা এর সমীকরণ $y=mx+c$

$\therefore$ উপপাদ্য হইতে পাই $k=-\frac{b^2}{a^2m}.h$ বা $m=-\frac{b^2h}{a^2k}$

এবং $c=k-mh=k+\frac{b^2h^2}{a^2k}=\frac{a^2k^2+b^2h^2}{a^2k}$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ $y=-\frac{b^2h}{a^2k}x+\frac{a^2k^2+b^2h^2}{a^2k}$,

বা, $\frac{h}{a^2}\left(x-h\right)+\frac{k}{b^2}\left(y-k\right)=0.$

200. To find the locus of the middle points of all chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^2}=1$, which pass through the given point (α, β).

মনে কর, একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু (h, k)।

$\therefore$ ঐ জ্যা এর সমীকরণ $\frac{h}{a^2}\left(x-h\right)+\frac{k}{b^2}\left(y-k\right)=0.$

যেহেতু ইহা (α, β) বিন্দুগামী, $\therefore$ $\frac{h}{a^2}\left(\alpha-h\right)+\frac{k}{b^2}\left(\beta-k\right)=0.$

$\therefore$ মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথ $\frac{x}{a^2}\left(\alpha - x\right)+\frac{y}{b^2}\left(\beta - y\right)=0$,

বা, $\frac{x}{a^2}\left(x-\alpha\right)+\frac{y}{b^2}\left(y-\beta\right)=0$, ইহাও একটি উপবৃত্ত।

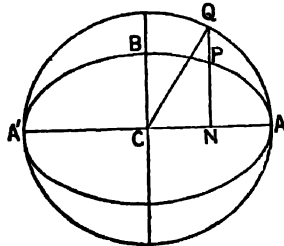
201. If the chord of contact of the point P with respect to an ellipse pass through Q, prove that the chord of tontact of Q with respect to the same ellipse passes through P.

মনে কর P ও Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\therefore$ P বিন্দুতে স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা (chord of contact) হইল $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. $\because$ ইহা Q (x_2, y_2) বিন্দু দিয়া যায়,

$\therefore$ $\frac{x_2x_1}{a^2}+\frac{y_2y_1}{b^2}=1$. ইহা হইতে দেখা যায় যে, Q বিন্দুর chord of contact $\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$ (x_1, y_1) বিন্দু অর্থাৎ P বিন্দু দিয়া যায়।

202. সহায়ক বৃত্ত (Auxiliary Circle)।

উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত বলে।

চিত্র 26

উপরের চিত্রে ABA' উপবৃত্তের পরাক্ষ AA'কে ব্যাস করিয়া AQA' বৃত্ত অঙ্কিত করা হইয়াছে। এই বৃত্তটি উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত হইল।

203. The ordinates of any point on the ellipse and the corresponding point on the auxiliary circle are in the ratio of the semi-minor to the semi-major axis of the ellipse.

চিত্র 26 এ উপবৃত্তের উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। P হইতে পরাক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল। PN হইল P বিন্দুর কোটি। PNকে Pএর দিকে বর্ধিত করায় উহা যেন সহায়ক বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এই Q বিন্দুকে P বিন্দুর অনুরূপ (corresponding) বিন্দু বলা হয় এব Q বিন্দুর কোটি হইল QN. AC ও BC যথাক্রমে অর্ধ-পরাক্ষ ও অর্ধ-উপাক্ষ।

এক্ষণে, ∵ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত P একটি বিন্দু,

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{BC^2}{CA^2}\cdots\cdots(1)$$

আবার, সহায়ক বৃত্তের ব্যাস AA′ এবং Q পরিধিস্থ বিন্দু বলিয়া অর্ধবৃত্তস্থ $\angle AQA'$ এক সমকোণ, এবং $QN \perp AA'$, $\therefore \quad QN^2=AN.A'N\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) হইতে পাই $\dfrac{PN^2}{QN^2}=\dfrac{BC^2}{CA^2}$,

$$\text{বা,} \quad \frac{PN}{QN}=\frac{BC}{CA}=\frac{\text{অর্ধ-উপাক্ষ}}{\text{অর্ধ-পরাক্ষ}}\,।$$

[দ্রষ্টব্য। (1) উপবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ধরিয়া পাই

$\dfrac{PN}{QN}=\dfrac{b}{a}$; ইহা উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন P বিন্দুর পক্ষেই সত্য।

(2) উপবৃত্তের যে কোন P বিন্দুর কোটিকে ঐ বিন্দুর দিকে বর্ধিত করিলে উহা সহায়ক বৃত্তকে যে-বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে P বিন্দুর অনুরূপ (corresponding) বিন্দু বলা হয়। (3) উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ হইলে উহার সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$]

উদাহরণমালা 23

উদা. 1. Find the latus rectum, eccentricity and the co-ordinates of the focus of the (i) ellipse $4x^2+9y^2=36$, and the (ii) ellipse $5x^2+4y^2=20$.

(i) প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $4x^2+9y^2=36$ বা, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

অতএব, এখানে $b^2=4$ এবং $a=3$,

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 4}{3}=\frac{8}{3}$.

উৎকেন্দ্রতা $=e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9-4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(\pm ae, 0)$ অর্থাৎ $\left(\pm 3\times\frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right)$

বা, $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

(ii) প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $5x^2+4y^2=20$, বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

এখানে দেখা যাইতেছে BB′ এক্ষেত্রে পরাক্ষ রেখা অর্থাৎ নাভিদ্বয় y অক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2\times 4}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

উৎকেন্দ্রতা $=e=\sqrt{\frac{5-4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $\left(0, \pm\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ বা $(0, \pm 1)$.

উদা. 2. Find the foci, directrices and eccentricity of the ellipse $4x^2+9y^2+16x-9y+12=0$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইল $4x^2+16x+9y^2-9y+12=0$,

বা, $4x^2+16x+16+9y^2-9y+\frac{9}{4}=6\frac{1}{4}$,

বা, $4(x+2)^2+9(y-\frac{1}{2})^2=\frac{25}{4}$, বা $\frac{16}{25}(x+2)^2+\frac{36}{25}(y-\frac{1}{2})^2=1$.

এখন $x+2=\text{X}$ এবং $y-\frac{1}{2}=\text{Y}$ লিখিলে অর্থাৎ মূলবিন্দুকে $(-2, \frac{1}{2})$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া সেই বিন্দু দিয়া মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে নূতন অক্ষদ্বয় ধরিলে ঐ সমীকরণটি হয় $\frac{16}{25}\text{X}^2+\frac{36}{25}\text{Y}^2=1$.

এখানে $a^2=\frac{25}{16}$ ও $b^2=\frac{25}{36}$,

$$\therefore \quad e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{\frac{25}{16}-\frac{25}{36}}{\frac{25}{16}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

আবার, নূতন অক্ষদ্বয়ে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(ae, 0)$ ও $(-ae, 0)$ $=\left(\frac{5\sqrt{5}}{12}, 0\right)$ ও $\left(-\frac{5\sqrt{5}}{12}, 0\right)$, এবং নিয়ামকদ্বয় হইল $\text{X}\pm\frac{a}{e}=0$ অর্থাৎ $\text{X}\pm\frac{3}{4}\sqrt{5}=0$.

অতএব, মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নাভিদ্বয়ের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক হইল $(-2\pm\frac{5}{12}\sqrt{5}, \frac{1}{2})$ $\left[\because x+2=\text{X}=\pm\frac{5\sqrt{5}}{12}, \therefore x=-2\pm\frac{5\sqrt{5}}{12};\right.$

এবং $\left.\because y-\frac{1}{2}=\text{Y}=0, \quad \therefore y=\frac{1}{2}\right]$

আর, নিয়ামকদ্বয় হইল $x+2\pm\frac{3}{4}\sqrt{5}=0$ $[\because \text{X}=x+2]$.

উদা. 3. Find the eccentricity of the ellipse whose latus rectum is 4 inches and the distance of the vertex from the nearest focus 1·5 inches. [C. U. '44]

এখানে নাভিলম্ব $=4$ই., $\therefore$ $\text{SL}=2$ ইঞ্চি, এবং $\text{AS}=1\cdot5$ ইঞ্চি।

আবার, $\because$ $\text{SL}=e.\text{XS}=e(\text{XA}+\text{AS})=e.\text{XA}+e.\text{AS}=\text{AS}+e.\text{AS}$,

$$\therefore \quad 2=1\cdot5+1\cdot5e, \text{ বা, } 1\cdot5e=2-1\cdot5=\cdot5,$$

$$\therefore \quad e=\frac{\cdot5}{1\cdot5}=\frac{1}{3}.$$

উদা. 4. Find the equation of the ellipse whose focus is $(1, -2)$, directrix is $y=2x+3$ and eccentricity is $\frac{1}{2}$.

মনে কর S নাভি, P উপবৃত্তের উপর যে-কোন একটি বিন্দু, ইহার স্থানাঙ্ক যেন (x, y) এবং PM নিয়ামকের উপর লম্ব।

$\therefore \quad SP=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}$

এবং নিয়ামক অর্থাৎ $2x-y+3=0$ হইতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব

$=\dfrac{2x-y+3}{\sqrt{2^2+1^2}}, \quad \therefore \quad PM=\dfrac{2x-y+3}{\sqrt{5}}$. কিন্তু $SP=e.PM$,

$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x-y+3}{\sqrt{5}}$

$\therefore \quad x^2+y^2-2x+4y+5=\dfrac{(2x-y+3)^2}{20},$

বা, $20x^2+20y^2-40x+80y+100$
$=4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y,$

বা, $16x^2+19y^2+4xy-52x+86y+91=0$, ইহাই উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 5. Find the equation of the ellipse passing through the point (2, 2) and (3, 1), whose axes are the axes of co-ordinates, and find its latus rectum and co-ordinates of the foci.

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

$\because$ উপবৃত্তটি (2, 2) এবং (3, 1) বিন্দুগামী, $\therefore$ ঐ স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ।

$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \end{array}\right\}$ এই দুই সমীকরণকে সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $a^2=\frac{32}{3}$ এবং $b^2=\frac{32}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\dfrac{x^2}{\frac{32}{3}}+\dfrac{y^2}{\frac{32}{5}}=1,$

বা, $\dfrac{3x^2}{32}+\dfrac{5y^2}{32}=1,$ বা, $3x^2+5y^2=32.$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.\frac{32}{5}}{\sqrt{\frac{32}{3}}}=\frac{2\sqrt{32}.\sqrt{3}}{5}=\frac{8}{5}\sqrt{6}.$

আবার, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{\frac{32}{3}-\frac{32}{5}}{\frac{32}{3}}}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5};$

$\therefore\ ae=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{8}{\sqrt{15}}.$

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ বা $\left(\pm\frac{8}{\sqrt{15}}, 0\right).$

উদা. 6. Find the equations of the ellipses, whose axes are the axes of co-ordinates and

(*a*) whose latus rectum is 5 and eccentricity is $\frac{2}{3}$ [C. U.]

(*b*) whose foci are the points $(\pm 4, 0)$ and eccentricity is $\frac{1}{2}$.

(*a*) মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore\ \frac{2b^2}{a}=$ নাভিলম্ব $=5$ এবং $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2=\frac{4}{9}.$

অতএব, $2b^2=5a\cdots$(i) } প্রথম সমীকরণ হইতে b^2 এর মান $\frac{5a}{2}$

এবং $5a^2-9b^2=0\ldots$(ii) } দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$5a^2-\frac{45a}{2}=0,\ \text{বা}\ 5a\left(a-\frac{9}{2}\right)=0,$$

কিন্তু $\because a\neq 0,\ \therefore\ a-\frac{9}{2}=0,$

$\therefore\ a=\frac{9}{2},\ \therefore\ a^2=\frac{81}{4}$, এবং $b^2=\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{45}{4}.$

$\therefore$ উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{\frac{81}{4}}+\frac{y^2}{\frac{45}{4}}=1$

বা, $\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1$ বা, $20x^2+36y^2=405.$

(b) মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$\because$ নাভিবিন্দুদ্বয় $(\pm ae, 0)$, এবং $e=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ এখানে $ae=4$, বা $\frac{1}{3}.a=4$, $\therefore$ $a=12.$

আবার, যেহেতু $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$, বা $a^2e^2=a^2-b^2$,

$\therefore$ $16=144-b^2$, $\therefore$ $b^2=128.$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{128}=1$, বা, $8x^2+9y^2=1152.$

উদা. 7. Find the equations of the tangent and the normal

(i) at the point (3, 2) of the ellipse $4x^2+9y^2=72.$

(ii) at the point of the ellipse $7x^2+8y^2=36$, whose abscissa is 2.

(iii) at the end of the latus rectum lying in the first quadrant of the ellipse $3x^2+4y^2=12.$

(i) $\because$ (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$

$\therefore$ (3, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $4x.3+9y.2=72,$

বা, $2x+3y=12.$

মনে কর, অভিলম্বের সমীকরণ $y-2=m(x-3).$

$\because$ ইহা $2x+3y=12$ স্পর্শকের উপর লম্ব, $\therefore$ $m(-\frac{2}{3})=-1$, $\therefore$ $m=\frac{3}{2}$

$\therefore$ অভিলম্বের (normal) সমীকরণটি হইল $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$,

বা, $2y-4=3x-9$, বা, $3x-2y=5$

(ii) যেহেতু বিন্দুটির ভুজ অর্থাৎ $x=2$,

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $28+8y^2=36$, বা, $8y^2=8$, $\therefore$ $y=\pm 1.$

$\therefore$ (2, 1) বিন্দুতে প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$7x.2+8y.1=36,$ বা, $7x+4y=18.$

ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, মনে কর $y-1=m(x-2)$

$\therefore \quad m(-\frac{7}{4})=-1, \ \therefore \quad m=\frac{4}{7}$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-1=\frac{4}{7}(x-2)$, বা, $4x-7y=1$.

অনুরূপে, $(2,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $7x-4y=18$.

আবার অভিলম্বের উন্নতি (slope) m হইলে $m\times\frac{7}{4}=-1, \therefore m=-\frac{4}{7}$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y+1=-\frac{4}{7}(x-2)$, বা $4x+7y=1$.

(iii) উপবৃত্তের সমীকরণ $3x^2+4y^2=12$ বা $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

অতএব, এখানে $a^2=4$, এবং $b^2=3$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 3}{2}=3$.

উৎকেন্দ্রতা $=e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4-3}{4}}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক হইল $(ae, 0)$ বা $(2\times\frac{1}{2}, 0)$ বা $(1, 0)$

$\therefore$ নাভিলম্বের শেষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{3}{2})$.

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $3x.1+4y.\frac{3}{2}=12$, বা, $x+2y=4$.

এখন অভিলম্বের উন্নতি m হইলে, $m\times(-\frac{1}{2})=-1, \therefore m=2$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-\frac{3}{2}=2(x-1)$,

বা, $2y-3=4x-4$, বা $4x-2y=1$.

উদা. 8. The foci of an ellipse are the points $(0, 1)$ and $(0,-1)$ and the minor axis is of unit length. Find the equation of the ellipse. Explain how an ellipse can be considered as a circle when its two foci coincide. [C. U. '51]

মনে কর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (b>a)$. উহার নাভিদ্বয় $(0, be)$ ও $(0, -be)$ বিন্দুতে অবস্থিত। এখানে $be=1$ এবং $a=\frac{1}{2}$;

কিন্তু $a^2=b^2(1-e^2)$, বা $a^2=b^2-b^2e^2$, বা $\frac{1}{4}=b^2-1 \quad (\because be=1)$

$\therefore\ b^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. $\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$,

বা, $20x^2 + 4y^2 = 5$.

আবার, যদি নাভিদ্বয় সমাপতিত হয়, তবে উহারা অবশ্যই উপবৃত্তের কেন্দ্রে সমাপতিত হইবে।

$\therefore$ সেক্ষেত্রে $be = 0$, $\therefore\ e = 0$; কিন্তু $a^2 = b^2(1 - e^2)$

$\therefore\ a^2 = b^2\ [\because\ e^2 = 0]$

অতএব, উপবৃত্তটি হইল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, অর্থাৎ $x^2 + y^2 = a^2$, এবং ইহা একটি বৃত্ত।

উদা. 9. Find the points of intersection of the ellipse $x^2 + 2y^2 = 17$ with the straight line $y = x + 1$.

এখানে $y = x + 1 \cdots\cdots(1)$

y এর এই মান উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই $x^2 + 2(x+1)^2 = 17$,

বা, $3x^2 + 4x - 15 = 0$,

বা, $(x+3)(3x-5) = 0$, $\therefore\ x = -3$ বা $\frac{5}{3}$

$\therefore$ (1) হইতে $y = -2$ বা $\frac{8}{3}$,

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(-3, -2)$ এবং $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$.

উদা. 10. Show that the straight line $3y = 4x + 11$ touches the ellipse $2x^2 + 3y^2 = 11$ and find the point of contact.

সরলরেখাটির সমীকরণ হইতে y এর মান হয় $\frac{4x+11}{3}$,

উপবৃত্তের সমীকরণে এই মান বসাইয়া পাই $2x^2 + 3 \times \frac{(4x+11)^2}{9} = 11$,

বা, $x^2 + 4x + 4 = 0$, বা, $(x+2)^2 = 0$,

$\therefore\ x = -2$ বা -2, $\therefore\ y = 1$ বা 1

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(-2, 1)$ ও $(-2, 1)$,

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয় $(-2, 1)$ বিন্দুতে সমাপতিত। অতএব, সরলরেখাটি ঐ বিন্দুতে স্পর্শক।

$\therefore$ $3y=4x+11$ সরলরেখা $2x^2+3y^2=11$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দু $(-2, 1)$.

উদা. 11. For what values of m, the straight line $y=mx-11$ touches the ellipse $2x^2+y^2=22$? Find the point of contact.

$y=mx-11$ হইতে y এর মান $2x^2+y^2=22$ সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$2x^2+(mx-11)^2=22,$$

বা, $(m^2+2)x^2-22mx+99=0$......(1) ;

কিন্তু সরলরেখাটি উপবৃত্তটির স্পর্শক হইলে এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে। $\therefore$ $22^2m^2-4(m^2+2)\times 99=0,$

বা, $11m^2-9(m^2+2)=0,$ বা $m^2=9,$ $\therefore$ $m=\pm 3.$

আবার, যখন $m=3$, তখন $11x^2-66x+99=0,$

বা, $x^2-6x+9=0,$ বা, $(x-3)^2=0,$ $\therefore$ $x=3.$

$\therefore$ $y=mx-11=3\times 3-11=-2.$

$\therefore$ $y=3x-11$ স্পর্শকের সহিত উপবৃত্তের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $(3, -2)$.

অনুরূপে, যখন $m=-3$, তখন $y=-3\times 3-11=-20$

$\therefore$ স্পর্শক $y=-3x-11$ এর স্পর্শবিন্দু হইল $(-3, -20)$.

উদা. 12. The ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ is touched by the straight line $5y=3x+25$ and its eccentricity is $\frac{3}{5}$. Find a and b. [G. U. '48]

$\because$ $e=\dfrac{3}{5}$ এবং $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}},$

$\therefore$ $\dfrac{9}{25}=1-\dfrac{b^2}{a^2},$ বা $\dfrac{b^2}{a^2}=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25},$ বা $b^2=\dfrac{16}{25}a^2$......(1)

আবার, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $5y=3x+25$, বা $y=\frac{3}{5}x+5$.

$\because$ $y=mx+c$ সরলরেখা উপবৃত্তটিকে স্পর্শ করিলে

$c^2=m^2a^2+b^2$ হয়, এবং এখানে $c=5$ ও $m=\frac{3}{5}$,

$\therefore$ এখানে $25=\frac{9}{25}a^2+b^2=\frac{9}{25}a^2+\frac{16}{25}a^2=a^2$, $\therefore a=5$ বা -5

$\therefore$ (1) হইতে $b=4$ (aএর -5 ঋণাত্মক মানটি গ্রাহ্য হইল না)।

অতএব, $a=5$ ও $b=4$.

উদা. 13. Find the equations of the tangents to the ellipse $2x^2+y^2=17$, which are parallel to the straight line $4x-3y=12$

$4x-3y=12$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা হইল $4x-3y=c$,

বা, $y=\dfrac{4x-c}{3}$. yএর এই মান $2x^2+y^2=17$ এ বসাইয়া পাই

$$2x^2+\frac{16x^2-8cx+c^2}{9}=17, \quad \text{বা,} \quad 34x^2-8cx+c^2-153=0,$$

কিন্তু $4x-3y=c$ সরলরেখাটি স্পর্শক বলিয়া এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান। $\therefore$ $64c^2-4\times34(c^2-153)=0$, বা, $9c^2=17\times153$,

$\therefore$ $c^2=17\times17$ $\therefore$ $c=\pm17$.

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $4x-3y=17$ এবং $4x-3y+17=0$.

উদা. 14. Find the equations of the tangents to the ellipse $2x^2+y^2=17$, which are perpendicular to the straight line $3x+4y=9$.

সরলরেখা $4x-3y=c$, সতত $3x+4y=9$ সরলরেখার উপরে লম্ব।

$\therefore$ $y=\dfrac{4x-c}{3}$.

$\therefore$ উদা. 13-র অনুরূপে, স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইল

$4x-3y=17$ এবং $4x-3y+17=0$.

উদা. 15. For what value of p does the ellipse $px^2+4y^2=1$ pass through the points $(\pm 1, 0)$? Find the lengths of its two axes. [C. U. '35]

$\because$ উপবৃত্তটি $(1, 0)$ ও $(-1, 0)$ বিন্দুদ্বয়গামী,

$\therefore$ ঐ স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা উপবৃত্তের প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

এক্ষণে $px^2+4y^2=1$ সমীকরণে $x=\pm 1$ এবং $y=0$ বসাইয়া পাই $p(\pm 1)^2+4\times 0=1$, বা $p=1$.

$\therefore$ উপবৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+4y^2=1$ $(\because p=1)$.

বা, $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. বা $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$.

অতএব, এখানে অক্ষদ্বয়ের অর্ধেক হইল 1 ও $\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $=2$ ও 1

উদা. 16. The ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ passes through the point of intersection of the straight lines $7x+13y-87=0$ and $5x-8y+7=0$ and its latus rectum is $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; find a and b.

$7x+13y-87=0$ ও $5x-8y+7=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=5$, $y=4$. অতএব ঐ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইল $(5, 4)$।

এক্ষণে, $\because$ উপবৃত্তটি $(5, 4)$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $\dfrac{25}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1$ ......(1)

আবার, $\because$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2b^2}{a}$,

$\therefore$ এখানে $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{32}{5}\sqrt{2}$, বা $b^2=a.\dfrac{16}{5}\sqrt{2}$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $\dfrac{25}{a^2}+\dfrac{16}{a.\frac{16}{5}\sqrt{2}}=1$.

বা, $25+\dfrac{5a}{\sqrt{2}}=a^2$, বা $a^2-\dfrac{5}{\sqrt{2}}a-25=0$.

বা, $\left(a-\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)\left(a+\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)=0$, $\therefore$ $a=\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ অথবা $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad b^2 = a.\frac{16}{5}\sqrt{2} = \frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{16}{5}\sqrt{2} = 32$

(a এর ঋণাত্মক মান গ্রহণ করা হইল না।)

$\therefore \quad b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \quad \therefore \quad a = \frac{10}{\sqrt{2}},\ b = 4\sqrt{2}.$

উদা. 17. Find the equation of the diameter of the ellipse $2x^2 + 3y^2 = 6$, which bisects all chords parallel to $3x + 4y = 5$.

উপবৃত্ত এবং সরল রেখার সমীকরণ হইতে যথাক্রমে পাই,

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \cdots (1)$ এবং $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \cdots (2)$

(1) হইতে $a^2 = 3$, $b^2 = 2$, এবং (2) হইতে $m = -\frac{3}{4}$

মনে কর, ব্যাসের সমীকরণ $y = m'x$

এক্ষণে $\because \ mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \therefore \quad -\frac{3}{4}m' = -\frac{2}{3}, \quad \therefore m' = \frac{8}{9}.$

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{8}{9}x$, বা $9y = 8x$.

উদা. 18. Find the equation of the diameter of the ellipse $4x^2 + 5y^2 = 20$, which is conjugate to the diameter $y = 3x$.

এখানে উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$, সুতরাং $a^2 = 5$, $b^2 = 4$.

আবার, প্রদত্ত ব্যাসের সমীকরণ $y = 3x$, সুতরাং $m = 3$.

মনে কর, নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y = m'x$, $\therefore m' \times 3 = -\frac{4}{5}$, বা $m' = -\frac{4}{15}$

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ $y = -\frac{4}{15}x$ বা $4x + 15y = 0$.

উদা. 19. Show that the diameters, whose equations are $y + 3x = 0$ and $4y - x = 0$, are conjugate diameters of the ellipse $3x^2 + 4y^2 = 5$.

ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ $y = -3x$ এবং $y = \frac{1}{4}x$, $\therefore mm' = -3 \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$.

আবার উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে পাই $\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1.$

$\therefore \quad -\frac{b^2}{a^2}=-\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}}=-\frac{3}{4}, \quad \therefore \quad mm'=-\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore$ ব্যাস দুইটি অনুবদ্ধ বা প্রতিযোগী (Conjugate)।

উদা. 20. Find the equation of the chord of the ellipse $9x^2+16y^2=144$, which is bisected at the point (2, 1).

উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, সুতরাং $a^2=16$, $b^2=9$.

প্রদত্ত বিন্দু (2, 1), সুতরাং $h=2$, $k=1$.

অতএব, $\frac{h}{a^2}\left(x-h\right)+\frac{k}{b^2}\left(y-k\right)=0$ সূত্র হইতে

নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ হইল $\frac{2}{16}(x-2)+\frac{1}{9}(y-1)=0$,

বা, $\frac{x-2}{8}+\frac{y-1}{9}=0$, বা $9x+8y=26$.

উদা. 21. Find the locus of the middle points of all chords of the ellipse $8x^2+9y^2=72$, which pass through the fixed point $(3, -2)$.

উপবৃত্তের প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$, সুতরাং $a^2=9$, $b^2=8$.

মনে কর, একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (h, k)। ইহার সমীকরণ

$\frac{h}{9}\left(x-h\right)+\frac{k}{8}\left(y-k\right)=0$, বা $8h(x-h)+9k(y-k)=0$.

যেহেতু ইহা $(3, -2)$ বিন্দুগামী, অতএব $8h(3-h)+9k(-2-k)=0$,

বা, $8h(h-3)+9k(k+2)=0$,

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $8x(x-3)+9y(y+2)=0$,

বা, $8x^2+9y^2-24x+18y=0$.

উদা: 22. For the ellipse $5x^2+6y^2=15$, find a pair of conjugate diameters which are inclined to each other at an angle $\tan^{-1}11$.

এখানে উপবৃত্তের সমীকরণ $5x^2+6y^2=15$,

বা, $\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$, বা $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{\frac{5}{2}}=1$.

$\therefore$ এক্ষেত্রে $a^2=3$ এবং $b^2=\frac{5}{2}$

মনে কর, প্রতিযোগী ব্যাসদ্বয় $y=m_1x$ এবং $y=m_2x$,

সুতরাং, $m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{5}{6}\cdots\cdots(1)$

আবার, $\because$ ঐ ব্যাসদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণটি $\tan^{-1}11$,

$\therefore$ $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=11$, বা $\frac{m_1-m_2}{1-\frac{5}{6}}=11$, বা $\frac{m_1-m_2}{\frac{1}{6}}=11$,

$\therefore$ $m_1-m_2=\frac{11}{6}\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই

$$\left.\begin{array}{l} m_1=\frac{5}{6} \\ m_2=-1 \end{array}\right\} \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{array}{l} m_1=1 \\ m_2=-\frac{5}{6} \end{array}\right\}$$

অতএব, নির্ণেয় ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ হইল $y=\frac{5}{6}x$, $y=-x$

এবং $y=x$, $y=-\frac{5}{6}x$; অর্থাৎ $5x-6y=0$, $x+y=0$

এবং $x-y=0$, $5x+6y=0$.

Exercise 23

1. Find the eccentricity, co-ordinates of the foci and the latera-recta of the ellipses :—

(i) $9x^2+16y^2=144$. (ii) $3x^2+4y^2=12$.

(iii) $25x^2+16y^2=400$. (iv) $2x^2+3y^2=8$.

(v) $2x^2+3y^2=1$. [U. P. B. '52]

2, Find the foci and directrices of the ellipses :—

(*a*) $3x^2+4y^2=9$ (*b*) $4x^2+9y^2-8x-36y+39=0$.

3. Find the lengths of the axes, the eccentricity and the position of the foci of the ellipse $3x^2+4y^2=48$.

[C. U. '41]

4. An ellipse whose axes lie along the co-ordinate axes is of eccentricity $\frac{4}{5}$ and passes through the point $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$. Determine its equation. [C. U. '42]

5. Find the latus rectum, eccentricity and the co-ordinates of the foci of the ellipse $9x^2+5y^2-30y=0$.

6. Find the centre, eccentricity, and directrices of the ellipse $4x^2+9y^2-24x-36y+36=0$.

7. Taking the axes as the axes of co-ordinates, find the equations of the ellipses :—

(i) whose major and minor axes are 8 and 6.

(ii) whose eccentricity is $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ and latus rectum is 3.

(iii) whose major axis is $\dfrac{9}{2}$ and eccentricity is $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(iv) which passes through the points $(2, 3)$ and $(-4, 1)$.

8. Find the equation of the ellipse

(i) whose focus is $(2, 1)$, directrix is $x+2y-1=0$ and eccentricity is $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

(ii) whose focus is $(-1, 1)$, directrix is $x-y+3=0$ and eccentricity is $\frac{1}{2}$. [C. U.]

9. Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of x and y respectively) which passes through the point $(-3, 1)$ and has the eccentricity $\sqrt{\frac{2}{5}}$. [C. U. '48]

10. The distance between the focus and the directrix of an ellipse is 16 inches and its eccentricity is $\frac{3}{5}$. Obtain the lengths of the principal axes. [C. U. '43]

11. Find the points of intersection of the ellipse

(i) $4x^2+9y^2=36$ with the straight line $2x+3y=6$.

(ii) $7x^2+5y^2=52$ with the straight line $x+y=2$.

12. Show that the straight line $y=x+5$ touches the ellipse $9x^2+16y^2=144$ and find the point of contact.

13. Prove that the straight line $y=x+\sqrt{\frac{7}{12}}$, touches the ellipse $3x^2+4y^2=1$ and find the point of contact.

14. Find the equation of the tangent and the normal to the ellipse $4x^2+9y^2=20$ at the point $(1, \frac{4}{3})$.

15. Find the equation of the tangent and the normal to the ellipse $5x^2+3y^2=137$ at the point $y=2$.

16. Find the equation of the tangents at the ends of the latera recta of the ellipse $9x^2+16y^2=144$.

17. For what values of m, the straight line $3y=mx+7$ touches the ellipse $2x^2+3y^2=14$? Find the points of contact in those cases.

18. Find the equations of the tangents to the ellipse $4x^2+3y^2=5$, which are parallel to the straight line $y=3x+4$.

19. Find the equations of the tangents to the ellipse $x^2+9y^2=2$, which are perpendicular to the straight line $3x+y=2$ and find the points of contact.

20. The latus rectum is half of the major axis of an ellipse. Find its eccentricity. [U. P. B. '48]

21. Find the eccentricity and the position of the foci of the ellipse $x^2+2y^2=2$. [C. U.]

22. Find the eccentricity and the position of the foci of the ellipse $3x^2+4y^2=48$. [C. U.]

23. Find the equation of the ellipse referred to its axes as axes of co-ordinates which passes through the points (2, 2) and (3, 1). Find also its eccentricity. [C. U. '39]

24. Find the equation of the ellipse referred to its axes as the axes of x and y respectively, which passes through the points $(-3, 1)$ and $(2, -2)$. Find also its eccentricity,

[C. U. '45]

25. Find the equation of an ellipse whose focus is $(6, 7)$, directrix $x+y+2=0$ and eccentricity $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

26. Find the equation of the ellipse, referred to its centre and origin and major axis as x-axis whose latus rectum is 5 and eccentricity $\frac{2}{3}$. [C. U.]

27. Find the equation to the ellipse which meets the st. line $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ on the axis of x and the st. line $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ on the axis of y and whose axes lie along the axes of co-ordinates. Determine the eccentricity and the positions of the foci of the ellipse. [C. U. '38]

28. Find the equation of the diameter of the ellipse $x^2+2y^2=2$, which bisects all chords parallel to $y=5x+3$.

29. Find the equation of the diameter of the ellipse $5x^2+6y^2=3$, which bisects all chords parallel to $2x+3y=1$.

30. Find the equation of the diameter of the ellipse $3x^2+5y^2=15$, which is conjugate to the diameter $4x+3y=0$.

31. In an ellipse $CS.CX=CA^2$ where C is the centre, S is a focus, A is the corresponding vertex and X is the point where the line CS meets the corresponding directrix of the ellipse. Verify this theorem when the ellipse is $x^2+2y^2=2$.

[C. U. '50]

32. Show that the straight line $y=x+\sqrt{\frac{5}{6}}$ is a tangent to the ellipse $2x+3y^2=1$. [C. U. (B. Sc.) '55]

33. In the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, construct the equation of that particular chord, which is bisected at the point $(2, -1)$.

[C. U. '56]

34. For the ellipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, determine the pair of conjugate diameters which are inclined to each other at an angle of 135°. [C. U. '58]

[Hints ; এখানে $m_1m_2=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$;

এবং $\tan 135° = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$, বা $-1=\frac{m_1-m_2}{1-\frac{1}{2}}$, বা $m_2-m_1=\frac{1}{2}$...]

35. If any tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ intercepts lengths h, k on the axes, prove that $\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}=1$. [C. U. '51]

36. Show that the diameters $2x+3y=0$ and $y=x$ are conjugate diameters of the ellipse $6x^2+9y^2=2$.

37. Find the equation of the chord of the ellipse $9x^2+10y^2=90$, which is bisected at the point $(1, -1)$.

38. Find the equation of the chord of the ellipse $12x^2+15y^2=180$, which is bisected at the point $(2, \frac{1}{2})$.

39. Find the locus of the middle points of all chords of the ellipse $4x^2+5y^2=20$, which pass through (i) the point $(1, 1)$, (ii) the point $(4, -5)$.

40. Show that $4x-3y+8=0$ and $x+3y-1=0$ are parallel to conjugate diameters of the ellipse $4x^2+9y^2=36$. [C. U.]

41. Show that the diameters whose equations are $y+3x=0$ and $4y-x=0$ are conjugate diameters of the ellipse $3x^2+4y^2=5$. [C. U.]

42. For the ellispe $8x^2+12y^2=96$, find a pair of conjugate diameters which are inclined to each other at an angle $\tan^{-1}7$. [C. U.]

43. Prove that an ellipse the sum of the squares of the perpendiculars on any tangent from two points on the minor axis, each distant $\sqrt{a^2-b^2}$ from the centre is $2a^2$. [C. U. (B. Sc.) '53]

পরাবৃত্ত (Hyperbola)

204. সংজ্ঞা :—যদি কোন গতিশীল বিন্দু সমতলের উপরে এমন ভাবে যায় যাহাতে ঐ সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে উহার দূরত্ব দুইটির অনুপাত সতত সমান থাকে এবং ঐ অনুপাত যদি এক অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথকে পরাবৃত্ত (Hyperbola) বলে।

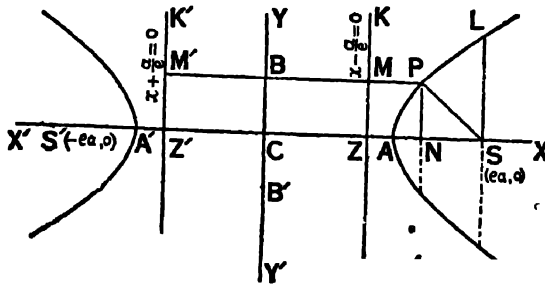
ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে নাভি (Focus), ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখাকে নিয়ামক (Directrix) এবং ঐ অনুপাতকে উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) বলে। নাভিকে S দ্বারা এবং উৎকেন্দ্রতাকে e দ্বারা সূচিত করা হয়।

[দ্রষ্টব্য। যে কণিকের উৎকেন্দ্রতা এক অপেক্ষা বৃহত্তর তাহাকে পরাবৃত্ত বলে।]

205. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to a hyperbola.]

মনে কর S নাভি, KZ নিয়ামক। SZ নিয়ামকের উপরে লম্ব। SZ সরলরেখার উপরে A এমন একটি বিন্দু যাহাতে

$\frac{SA}{AZ}=e$ $(e>1)$ অর্থাৎ $SZ=e.AZ$······(1

[চিত্র 27]

SZ এর বর্ধিতাংশের উপরে আর একটি বিন্দু A′ পাওয়া যায় যাহাতে

$\frac{SA'}{A'Z}=e$ অর্থাৎ $SA'=e.A'Z$······(2)

এখন, A এবং A' পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত থাকিবে।

মনে কর AA' এর মধ্যবিন্দু C এবং AA' এর দৈর্ঘ্য $2a$.

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই $SA' - SA = eA'Z - eAZ$

বা, $AA' = e(CA' + CZ) - e(CA - CZ) = e.2CZ$

বা, $2a = 2e.CZ \quad \therefore \quad CZ = \frac{a}{e}$.

অবার (1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই

$eAZ + eA'Z = SA + SA' = CS - CA + CS + CA' = 2CS,$

বা, $e(AZ + A'Z) = 2CS$, বা, $eAA' = 2CS$

বা, $2ea = 2CS$, $\therefore$ $CS = ea$.

C বিন্দুতে AA' এর উপরে YCY' লম্ব টানা হইল।

এখন CSX এবং YCY' কে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিয়া পরাবৃত্তের উপরে যে কোন P বিন্দু লওয়া হইল যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). PM এবং PN যথাক্রমে নিয়ামক ZK এবং অক্ষ ZSএর উপরে লম্ব টানা হইল।

যেহেতু $CS = ea$, $\therefore$ S এর স্থানাঙ্ক $(ea, 0)$.

$SP = e.PM = e.ZN$, $\therefore$ $SP^2 = e^2 ZN^2 = e^2(CN - CZ)^2 \cdots (A)$.

আবার, $SP^2 = NS^2 + PN^2 = (CS - CN)^2 + PN^2 = (ea - x)^2 + y^2$

$\because \quad (ea - x)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$ [(A) হইতে]

বা, $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$

বা, $x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

বা, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1.$

যেহেতু $e > 1$, $\therefore$ $a^2(e^2 - 1)$ ধনাত্মক রাশি। মনে কর $a^2(e^2 - 1) = b^2$.

অতএব, পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

অনুসিদ্ধান্ত :—(1) যেহেতু $b^2=a^2e^2-a^2$, $\therefore\ a^2e^2=a^2+b^2$

$\therefore\ e=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$ এবং $CS^2=(ea)^2=a^2+b^2$.

(2) $\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}-1=\dfrac{x^2-a^2}{a^2}=\dfrac{(x-a)(x+a)}{a^2}$

$\therefore\ \dfrac{PN^2}{b^2}=\dfrac{AN.A'N}{a^2}$, $\therefore\ \dfrac{PN^2}{AN.A'N}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

সজ্ঞা :—(i) নাভিবিন্দুগামী যে সরলরেখা নিয়ামকের উপর লম্ব সেই সরলরেখার সহিত পরাবৃত্তের ছেদবিন্দুকে পরাবৃত্তের **শীর্ষ** বলে। চিত্রে A ও A′ বিন্দুদ্বয়কে পরাবৃত্তের দুইটি **শীর্ষ** (vertices) বলে, এবং C বিন্দুকে উহার কেন্দ্র (centre) বলে।

(ii) x-অক্ষের AA′ অংশকে পরাবৃত্তের **তির্যক অক্ষ** (transverse axis) বলে। $AA'=2a$.

(iii) y-অক্ষের যে অংশ $2b$ এর সমান এবং মূল বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহাকে **অনুবন্ধী অক্ষ** (conjugate axis) বলে। চিত্র 27-এ BB′ হইল conjugate axis. $BB'=2b$.

(iv) নাভিবিন্দুগামী যে জ্যা নিয়ামকের সমান্তরাল তাহাকে পরাবৃত্তের **নাভিলম্ব** (latus-rectum বলে।

206. পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

[There exist a second focus and a second directrix of a hyperbola.]

SC রেখার বর্ধিতাংশের উপরে দুইটি বিন্দু S′ এবং Z′ লওয়া হইল

যেন $SC=CS'=ae$ এবং $ZC=CZ'=\dfrac{a}{e}$ হয়।

AA′ রেখার উপরে Z′M′ লম্ব টানা হইল। এখন PM কে বর্ধিত করিলে মনে কর, উহা Z′M′ কে M′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1,$

বা, $x^2+a^2e^2+y^2=e^2x^2+a^2,$

বা, $x^2+2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2+2aex+a^2,$

বা, $(x+ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2$

অর্থাৎ $S'N^2+PN^2=e^2(Z'C+CN)^2,$

অর্থাৎ $S'P^2=e^2.\ PM'^2, \quad \therefore \quad S'P=e.PM'.$

ইহা হইতে দেখা যাইতেছে যে S′ কে নাভি এবং Z′M′ কে নিয়ামক ধরিলেও একই পরাবৃত্ত পাওয়া যায়।

অতএব, পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি S′ এবং দ্বিতীয় নিয়ামক Z′M′.

[**দ্রষ্টব্য।** (i) শীর্ষ A ও A′ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$.

(ii) S ও S′ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(ea, 0)$ এবং $(-ea, 0)$.

(iii) ZM নিয়ামকের সমীকরণ $ex-a=0$ বা $x=\frac{a}{e}$ এবং Z′M′ নিয়ামকের সমীকরণ $ex+a=0$, বা $x=-\frac{a}{e}$]

207. The difference of the focal distances of any point on the hyperbola is equal to the transverse axis.

[চিত্র 27 দেখ] $\quad \because \quad S'P=ePM'$ এবং $SP=ePM$

$\therefore \quad SP'-SP=e(PM'-PM)=eMM'=eZZ'=2eCZ$
$=2a=AA'$ (অর্থাৎ transverse axis);

[**দ্রষ্টব্য।** নাভি হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন P বিন্দুর দূরত্ব $SP=e.PM=e.NZ=e(CN-CZ)=e\left(x-\frac{a}{e}\right)=ex-a.$]

208. নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য (length of latusrectum)

S নাভির স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$। এখন মনে কর নাভিলম্বের প্রান্ত L এর স্থানাঙ্ক (ae, SL)

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{\text{SL}^2}{b^2} = 1, \quad \text{বা } e^2 - \frac{\text{SL}^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{বা,} \quad \frac{\text{SL}^2}{b^2} = e^2 - 1 = \frac{a^2+b^2}{a^2} - 1 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \text{SL}^2 = \frac{b^4}{a^2}. \quad \therefore \quad \text{SL} = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore \quad \text{নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য} = \text{LL}' = 2\text{SL} = \frac{2b^2}{a}.$$

দ্রষ্টব্য। উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ বা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$. $\therefore$ দেখা যায় যে, উপবৃত্তের b^2 এর স্থলে $-b^2$ লিখিলেই পরাবৃত্ত পাওয়া যায়।

ইহাকে সূত্র ধরিয়া পরাবৃত্ত সংক্রান্ত কতকগুলি সিদ্ধান্ত :—

(1) যদি $c^2 > a^2m^2 - b^2$ হয়, তবে $y = mx + c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের সাহিত দুইটি পৃথক বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার যদি $c^2 < a^2m^2 - b^2$ হয়, তবে ঐ সরলরেখাটি ঐ পরাবৃত্তকে দুইটি অবাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ ছেদ করে না।

(2) $y = mx + c$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবার সর্ত $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

[এ ক্ষেত্রে বলা যায় যে, ঐ সরলরেখাটি ঐ পরাবৃত্তকে দুইটি পরস্পর সমাপতিত বা মিলিত বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ স্পর্শক হয়।]

(3) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ সতত অর্থাৎ m এর সকল মানেই পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর স্পর্শক।

[দ্রষ্টব্য। $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)$, এবং $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2 + m^2 - b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)$।]

(4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে **স্পর্শকের সমীকরণ**

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

(5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে **অভিলম্বের (Normal** সমীকরণ $\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{-b^2}}$, বা, $a^2\frac{x}{x_1} + b^2\frac{y}{y_1} = a^2 + b^2$.

(6) $\frac{h}{a^2}(x - h) - \frac{k}{b^2}(y - k) = 0$ একটি জ্যা এর সমীকরণ যাহার মধ্য-বিন্দু (h, k).

209. নিয়ামক বৃত্ত (Director Circle)।

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের দুইটি পরস্পর লম্ব স্পর্শকের ছেদ বিন্দুর সঞ্চার-পথ একটি বৃত্ত। এই বৃত্তকে নিয়ামক বৃত্ত বলে। এই বৃত্তটি হইল $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, অর্থাৎ উহা এরূপ একটি বৃত্ত মূলবিন্দুটি যাহার কেন্দ্র এবং যাহার ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2 - b^2}$.

এস্থলে $b^2 < a^2$ হইলে, বৃত্তটি বাস্তব হইবে ;

$b^2 = a^2$ হইলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ শূন্য হওয়ায় বৃত্তটি একটি বিন্দু-বৃত্তে (মূল বিন্দুতে) পরিণত হয়।

$b^2 > a^2$ হইলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কাল্পনিক হয়, সুতরাং ঐরূপ কোন বৃত্ত হইতে পারে না এবং এক্ষেত্রে পরাবৃত্তের পরস্পর লম্ব দুইটি স্পর্শক টানা সম্ভব নহে।

210. সংজ্ঞা। পরাবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ একটি সরলরেখা হয় এবং উহাকে পরাবৃত্তের ব্যাস বলে।

211. পরাবৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ (The equation of the diameter of the hyperbola).

মনে কর, পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং মনে কর, ব্যাসটি $y = mx + c$ সরল রেখার সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{b^2}{a^2 m}.x$ [উপবৃত্তের ব্যাসের সমীকরণে b^2এর পরিবর্তে $-b^2$ লিখিয়া।]

বা, $y = m'x$. $\therefore$ $m' = \frac{b^2}{a^2 m}$, বা $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

212. যদি দুইটি ব্যাস $y = mx$ এবং $y = m'x$ এরূপ হয় যে একটি অপরটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহাদিগকে পরস্পর প্রতিযোগী বা অনুবন্ধ ব্যাস (conjugate diameters) বলে। ঐ ব্যাস দুইটি পরস্পর অনুবন্ধ (conjugate) হইবার সর্ত $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

213. অনুবন্ধ পরাবৃত্ত (Conjugate hyperbola)

যদি কোন পরাবৃত্তের conjugate axis BB′ এবং transverse axis AA′ কে যথাক্রমে transverse axis এবং conjugate axis করিয়া অপর

একটি পরাবৃত্ত থাকে, তবে ঐ দ্বিতীয় পরাবৃত্তকে অনুবদ্ধ পরাবৃত্ত (conjugate hyperbola) বলে।

অতএব, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের (conjugate hyperbola) সমীকরণ হইল $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, বা, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$

214. Any pair of conjugte diameters with respect to a hyperbola are also conjugte diameters with respect to the conjugate hyperbola.

পরাবৃত্ত এবং তাহার অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের (conjugate hyperbola) সমীকরণ যথাক্রমে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$y=mx$ এবং $y=m'x$ পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর অনুবদ্ধ ব্যাসদ্বয় (conjugate diameters) হইবার সর্ত $mm'=\frac{b^2}{a^2}$ এবং এই সর্তই উহাদের পরাবৃত্ত $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর পরস্পর অনুবদ্ধ ব্যাস (conjugate diameters) হইবারও সর্ত।

215. সমপরাবৃত্ত (Rectangular hyperbola)

যে পরাবৃত্তের transverse axis এবং conjugate axis সমান, তাহাকে সমপরাবৃত্ত rectangular hyperbola কহে।

যেহেতু $a=b$, $\therefore$ ইহার সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

বা, $x^2-y^2=a^2$, বা, $(x+y)(x-y)=a^2.$

ইহার উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2a^2}{a^2}}=\sqrt{2}.$

216. পরাবৃত্তের অসীম পথ (Asymptotes)

পরাবৃত্তের সমীকরটিকে $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ এই আকারে লেখা যায়। ইহা হইতে দেখা যায় যে, ঐ পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দুর পক্ষে y এর সাংখ্যমান $\pm\frac{b}{a}x$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব yএর সীমাস্থমান $\pm\frac{b}{a}x$ হইল এবং x এর মান যত ∞ এর নিকটতর হইতে থাকিবে y এর মান তত ঐ সীমাস্থ মানের নিকটতর হইবে। অতএব, দেখা যায় যে x এর মান ক্রমশঃ যত বাড়িতে থাকিবে, পরাবৃত্তটি ক্রমশঃ তত $y=\pm\frac{b}{a}x$ সরলরেখাদ্বয়ের নিকটতর হইতে থাকিবে। $\therefore$ এই সরলরেখাদ্বয় হইল ঐ পরাবৃত্তের অসীম পথ।

[দ্রষ্টব্য ঃ—(1) পরাবৃত্তের অসীম পথের সমীকরণ হইল $y=\pm\frac{b}{a}x.$ ইহাকে $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ এই আকারেও লেখা যায়। অতএব, ঐ সমীকরণদ্বয়ের মিলিত আকার হইল $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$

(2) এখানে দেখা গেল যে, পরাবৃত্তের দুইটি অসীম পথ, উভয়ই কেন্দ্রগামী এবং x-অক্ষের সহিত উভয়ের নতি সমান।

(3) কোন পরাবৃত্তের এবং তাহার অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের অসীম পথ একই হয়।]

217. অসীম পথের সংজ্ঞা। যদি কোন সরলরেখা অনন্তপ্রসারী কোন কণিকের (conic) সহিত অসীম দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে মিলিত হয় কিন্তু নিজে সম্পূর্ণ অসীমে অবস্থিত না থাকে, তবে তাহাকে ঐ কণিকের অসীম পথ (aysmptote) বলে।

উদাহরণমালা 24

উদা. 1. Find the equation to the hyperbola, referred to its axes as the axes of co-ordinates,

(i) whose transverse and conjugate axes are 6 and 4.

(ii) whose conjugate axis is 6 and the distance between whose foci = 10.

(iii) which passes through the points (1, 1) and (2, −3).

(iv) whose eccentricity is $\sqrt{\frac{3}{2}}$ and whose one of the foci is $(2\sqrt{6}, 0)$.

(i) এখানে $a = 3$ এবং $b = 2$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, বা $4x^2 - 9y^2 = 36$.

(ii) এখানে $b = 3$, এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae = 10$, $\therefore$ $ae = 5$,

কিন্তু $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\therefore$ $5 = \sqrt{a^2 + 9}$

বা, $25 = a^2 + 9$, $\therefore$ $a^2 = 16$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, বা $9x^2 - 16y^2 = 144$.

(iii) মনে কর, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

ইহা (1, 1) এবং (2, −3) বিন্দুগামী

$\therefore$ $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$

এবং $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$

এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $a^2 = \frac{5}{2}$. $b^2 = \frac{5}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$, বা, $2x^2 - 3y^2 = 5$.

(iv) এখানে একটি নাভি $(2\sqrt{6}, 0)$, সুতরাং $ae = 2\sqrt{6}$,

$\therefore$ $a.\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{6}$, $\therefore$ $a = 4$.

আবার, $a^2e^2 = a^2 + b^2$, $\therefore$ $16.\frac{3}{2} = 16 + b^2$,

বা. $24 = 16 + b^2$, $\therefore$ $b^2 = 8$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{৮} = 1$, বা, $x^2 - 2y^2 = 16$.

উদা. 2. Find the latus-rectum, eccentricity and the co-ordinates of the foci of the hyperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

এখানে পরাবৃত্তের সমীকরণ $9x^2 - 16y^2 = 144$,

বা, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, সুতরাং এখানে $a = 4$ এবং $b^2 = 9$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$.

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$,

এবং নাভির স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm 5, 0)$.

উদা. 3. Find the foci, directrices and eccentricities of the hyperbolæ (i) $4x^2 - 9y^2 = 36$ & (ii) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 23 = 0$.

(i) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$,

সুতরাং এখানে $a = 3$, $b = 2$.

$\therefore$ নির্ণেয় $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{9+4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

অতএব, $ae = 3 \times \frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13}$.

$\therefore$ নির্ণেয় নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = (\pm \sqrt{13}, 0)$.

এক্ষণে, নিয়ামকের সূত্র $x \pm \frac{a}{e} = 0$ হইতে

নির্ণেয় নিয়ামকদ্বয় হইল $x \pm \frac{9}{\sqrt{13}} = 0$ $\left(\because \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{13}}\right)$.

(ii) এখানে প্রদত্ত সমীকরণকে $(x^2-6x+9)-4(y^2+4y+4)=16$,

বা, $(x-3)^2-4(x+2)^2=16$,

বা, $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ এই আকারে লেখা যায়।

এক্ষণে যদি $x-3=X$ এবং $y+2=Y$ ধরা হয় অর্থাৎ যদি এখানে অক্ষদ্বয়কে $(3,-2)$ বিন্দুতে সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ে স্থানান্তরিত করা হয়, তবে সমীকরণটির আকার হইবে $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{4}=1$. এখানে $a^2=16$ ও $b^2=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16+4}{16}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

$\therefore$ $ae=4\times\frac{1}{2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ এবং $\frac{a}{e}=\frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$.

$\therefore$ নূতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm2\sqrt{5},0)$ এবং নিয়ামকদ্বয় হইল $X\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=0$. অতএব, মূল (অর্থাৎ পূর্বের) অক্ষ সম্পর্কে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(3\pm2\sqrt{5},\ 0)$ এবং নিয়ামকদ্বয় হইল $x-3\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=0$.

[দ্রষ্টব্য। নূতন অক্ষদ্বয়ে নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm2\sqrt{5},0)$ এখানে $X=\pm2\sqrt{5}$, সুতরাং পূর্ব অক্ষদ্বয় সম্পর্কে $X=x-3$ বলিয়া $x-3=\pm2\sqrt{5}$ অর্থাৎ $x=3\pm2\sqrt{5}$ হইল। অবার $\because Y=y+2$, $\therefore$ এখানে $y+2=0$, $\therefore$ $y=-2$. $\therefore$ নির্ণেয় নাভিদ্বয় $(3\pm2\sqrt{5},-2)$ হইল। অনুরূপে X এর স্থানে $x-3$ বসাইয়া নির্ণেয় নিয়ামকদ্বয় হইল $x-3\pm\frac{8}{\sqrt{5}}=0$.]

উদা. 4. Find the point of intersection of the hyperbola $2x^2-3y^2=5$ with the straight line $3y=x+1$.

সরলরেখার সমীকরণ হইতে পাই $x=3y-1$......(1)

পরাবৃত্তের সমীকরণে x এর ঐ মান বসাইয়া পাই

$2(3y-1)^2-3y^2-5=0$ বা, $15y^2-12y-3=0$,

বা, $5y^2-4y-1=0$, বা, $(y-1)(5y+1)=0$,

$\therefore \quad y=1$ বা $-\frac{1}{5}$.

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $x=2$ বা, $-1\frac{3}{5}$.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (2, 1) এবং $(-1\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$.

উদা. 5. Show that the straight line $9x-8y=11$ touches the hyperbola $3x^2-4y^2=11$, and find the point of contact.

এখানে $8y=9x-11$, বা $y=\frac{9x-11}{8}$ ......(1). yএর এই মান পরাবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া পাই $3x^2-4\times\frac{(9x-11)^2}{64}=11$,

বা, $x^2-6x+9=0$, বা $(x-3)^2=0$, $\therefore \quad x=3, 3$.

যেহেতু সমীকরণের বীজ দুইটি সমান, অতএব $9x-8y=11$ সরলরেখাটি $2x^2-4y^2=11$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে।

আবার, (1) হইতে $y=\frac{9\times3-11}{8}=2$, $\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2).

উদা. 6. Find the tangent and the normal to the hyperbola $3x^2-4y^2=8$ at the point (2, 1).

এখানে $\because$ স্পর্শক পরাবৃত্তকে (2, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে,

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $3x.2-4y.1=8$, বা $6x-4y=8$,

বা, $3x-2y=4$.

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-1=-\frac{2}{3}(x-2)$, বা $2x+3y=7$.

উদা. 7. Find the equations of the tangents to the hyperbola $x^2-4y^2=4$, which are parallel to the straight line $y=2x+3$.

পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $x^2-4y^2=4$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$, সুতরাং এখানে $a^2=4$, $b^2=1$.

এক্ষণে, স্পর্শকগুলি $y=2x+3$ সরলরেখার সমান্তরাল বলিয়া মনে কর, স্পর্শকের সমীকরণ $y=2x+c$, সুতরাং $m=2$.

$\therefore \quad c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}=\pm\sqrt{4\times4-1}=\pm\sqrt{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $y=2x\pm\sqrt{15}$.

উদা. 8. Show that the line $y=3x$ bisects all chords of the hyperbola $4x^2-9y^2=36$, which are parallel to the straight line $27y=4x+5$.

মনে কর, $y=mx$ রেখা $27y=4x+5$ রেখার সমান্তরাল জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক। $27y=4x+5$ সমীকরণে $m=\frac{4}{27}$.

এখানে পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$,

সুতরাং $a^2=9$, $b^2=4$. $\therefore \quad m\times\frac{4}{27}=\frac{4}{9}$, $\quad\therefore \quad m=3$.

অতএব, $y=3x$ রেখা $27y=4x+5$ এর সমান্তরাল জ্যা-গুলির সমদ্বিখণ্ডক হইল।

উদা. 9. Show that the straight lines $y=2x$ and $5y=2x$ are conjugate diameters of the hyperbola $4x^2-5y^2=20$.

পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ (প্রদত্ত সমীকরণ হইতে),

সুতরাং $a^2=5$, $b^2=4$.

এখানে $\because \ y=2x$, $\therefore \ m=2$. এবং $\because \ 5y=2x$, $\therefore \ m'=\frac{2}{5}$.

$\therefore \quad mm'=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.

আবার $\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{5}$, $\quad\therefore \quad mm'=\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore \quad y=2x$ এবং $5y=2x$ পরস্পর দুইটি অনুবদ্ধ ব্যাস।

উদা. 10. Find the equation of the hyperbola whose focus is $(-1, 2)$, eccentricity 3 and the directrix $x+y=7$.

মনে কর, P ঐ পরাবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y).

এক্ষণে, নাভি $(-1, 2)$ হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব

$$=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}.$$

আবার, নিয়ামক $x+y=7$ হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব

$$=\frac{x+y-7}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+y-7}{\sqrt{2}}.$$

$\because$ $\dfrac{\text{নাভি হইতে P বিন্দুর দূরত্ব}}{\text{নিয়ামক হইতে P বিন্দুর দূরত্ব}}=e,$

$\therefore$ এখানে $\dfrac{\sqrt{(x^2+y^2+2x-4y+5)}}{\dfrac{x+y-7}{\sqrt{2}}}=e=3$

$\therefore$ $\sqrt{(x^2+y^2+2x-4y+5)}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}(x+y-7),$

এক্ষণে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া ও সরল করিয়া পাই

$7x^2+7y^2+18xy-130x-118y+431=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 11. Find the equation to the hyperbola referred to its axes as axes of co-ordinates whose conjugate axis is 6 and the distance between the foci is 10.

এখানে conjugate axis বা অনুবন্ধাক্ষ $=6$, $\therefore$ $b=\frac{6}{2}=3,$

এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব অর্থাৎ $2ae=10$, বা $ae=5$, $\therefore$ $a=\dfrac{5}{e}.$

আবার, $e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}$, বা $e^2=1+\dfrac{9}{\frac{25}{e^2}}=1+\dfrac{9e^2}{25},$

বা, $e^2 - \frac{9}{25}e^2 = 1$, বা $e^2 = \frac{25}{16}$. $\therefore$ $e = \frac{5}{4}$.

$$\therefore \quad a = \frac{5}{\frac{5}{4}} = 4.$$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

বা, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, বা $9x^2 - 16y^2 = 144$.

উদা. **12.** If e denotes the eccentricity of a hyperbola and e' that of its conjugate, show that $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.

[C. U. (B. Sc.) '41]

মনে কর e হইল $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের

এবং e' হইল উহার অনুবন্ধী $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা।

অতএব, $b^2 = a^2(e^2 - 1) \cdots\cdots (1)$ এবং $a^2 = b^2(e'^2 - 1) \cdots\cdots (2)$।

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $a^2b^2 = a^2b^2(e^2 - 1)(e'^2 - 1)$,

বা, $(e^2 - 1)(e'^2 - 1) = 1$, বা $e^2 + e'^2 = e^2e'^2$, বা $\frac{e^2 + e'^2}{e^2e'^2} = 1$

$$\therefore \quad \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1.$$

উদা. **13.** Show that the equation $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y - 4 = 0$ represents a hyperbola and find its centre and axes.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$(3x^2 - 12x + 12) - (4y^2 + 8y + 4) = 12$,

বা, $3(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 12$ বা, $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$.

মূলবিন্দুকে (origin) যদি (2, −1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়, তবে ঐ সমীকরণটি $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{3}=1$ হয় এবং ইহা পরাবৃত্তের সমীকরণের সাধারণ আকার, যাহার কেন্দ্র (centre) হইল মূলবিন্দু এবং যাহার অক্ষদ্বয় হইল x-অক্ষ ও y-অক্ষ।

এক্ষণে, পূর্বের মূল অক্ষদ্বয় সম্পর্কে কেন্দ্রটি হইল (2, −1) এবং পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় হইল $x-2=0$ ও $y+1=0$.

Exercise 24

1. Find the equation of the hyperbola, referred to its axes as the axes of co-ordinates,

(i) whose transverse and conjugate axes are 4 and 3 respectively ;

(ii) whose conjugate axis is 5 and co-ordinates of whose foci are $(\pm 6{\cdot}5, 0)$;

(iii) which passes through the point $(3, -2)$ and whose conjugate axis is 7 ;

(iv) whose eccentricity is $\sqrt{2}$ and whose transverse axis is $8\sqrt{2}$.

2. (*a*) Find the eccentricity, latus-rectum and co-ordinates of the foci of the hyperbola $4x^2-9y^2=36$.

(*b*) Calculate the eccentricity and the positions of the two foci of the hyperbola $\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$. [C. U. '57]

3. Find the foci, directrices and eccentricities of the hyperbolæ (i) $12x^2-4y^2=3$ and

(ii) $3x^2-4y^2+18x+16y+2=0$.

4. Find the co-ordinates of the point of intersection of the hyperbola $25x^2-9y^2=225$ with the straight line $25x+12y=45$.

5. Find the point of intersection of the line $2x=5y+1$ with the hyperbola $4x^2-9y^2=27$.

6. Find the co-ordinates of the points of intersection of the hyperbola $bx^2-ay^2=a^2b-ab^2$ with the straight line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

7. Show that the line $y=2x+3$ touches the hyperbola $7x^2-4y^2=28$ and find the point of contact.

8. Find the equation of the tangent to the hyperbola $4x^2-9y^2=1$, which is parallel to the line $4y=5x+3$.

9. Show that the straight line $2x+3y=0$ bisects all chords of the hyperbola $2x^2-3y^2=6$ parallel to the straight line $x+y=6$.

10. Show that the straight lines $3y=4x$ and $8y=5x$ are conjugate diameters of the hyperbola $5x^2-6y^2=30$.

11. For the hyperbola $16x^2-9y^2=144$, find the equation to the diameter which is conjugate to the diameter $x=2y$.

[C. U. '46]

12. Find the equation of the hyperbola having eccentricity 3, one focus the point $(-1, 3)$ and the corresponding directrix the line $x+2y+1=0$.

13. Find the equation to the hyperbola referred to its axes as axes of co-ordinates whose conjugate axis is 12 and the distance between the foci is 13.

14. Find the equations of the asymptotes of the following hyperbola :—

(i) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ (ii) $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$.

15. If a pair of diameters be conjugate with respect to a hyperbola, they will be conjugate with respect to its conjugate hyperbola.

উত্তরমালা

ALGEBRA

Exercise 1

1. বাস্তব, মূলদ ও অসমান 2. বাস্তব, মূলদ ও সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত
3. বাস্তব, মূলদ ও সমান 4. (a) কল্পিত ও অসমান, (b) বাস্তব, অমূলদ ও অসমান 8. $\frac{49}{4}$ 9. 17, 1, 72

13. $x^2-7x+12=0$ 14. $x^2+2x-35=0$

15. $x^2-2x-2=0$ 16. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

17. $x^2-2(a^2+1)x+a^4+a^2+1=0$ 18. $x^2\pm56x+768=0$

19. $x^2-5x+4=0$ 20. (i) $\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

(ii) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (iii) $\frac{3abc-b^3}{a^3}$

(iv) $-\frac{bc}{a^2}$ (v) $\frac{b^2-2ac}{a^4c^2}\left(b^4-4ab^2c+a^2c^2\right)$

21. $\frac{-p^3+3pq}{q^3}$ 22. $4x^2+3x+1=0$

23. $ax^2+2bx+4c=0$ 24. $x^2-x+1=0$

27. $\frac{p}{q}(p^4-5p^2q+4q^2)$ 29. 8 30. $9261x^2-903x-170=0$

31. $x^2+x+1=0$ 32. $x^2-px+9q-2p^2=0$

33. $x^2+x+1=0$ 34. $a^4x^2-2a^2(b^2-2ac)x+b^2(b^2-4ac)=0$

36. $a^2a_1^2x^2-aa_1bb_1x+a_1c_1b^2+acb_1^2-4aa_1cc_1=0$

37. (i) -3 (ii) 8 (iii) 5 (iv) -1

40. (i) $x^2-px+q=0$; (ii) $qx^2-(p+q^2)x+pq=0$

44. $x^2-8x+11=0$ **50.** $5b^2=36ac$ **51.** $\frac{7}{4}$ বা $-\frac{11}{8}$

53. $\frac{\gamma+\delta\pm\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta}}{2}$ **55.** $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$

60. নির্ণেয় সর্ত (i) $c=a$ (ii) $b=c=0$ (iii) a,b,c একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

61. (a) (i) $ac<0$ হইলে বীজ দুইটি বাস্তব, সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ; $a>0$ হইলে বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে। (ii) একটি বীজ 0 (শূন্য) এবং অপরটি শূন্য নহে ও বাস্তব এবং ধনাত্মক হইবে যদি $ab<0$ হয়, কিন্তু ঋণাত্মক হইবে যদি $ab>0$ হয়। (iii) বীজদ্বয় 0, 0 ; (iv) একটি বীজ বাস্তব এবং ধনাত্মক হইবে যদি $bc<0$ হয়, আর ঋণাত্মক হইবে যদি $bc>0$ হয় ; অপর বীজটি অসীম। (c) 8.

Exercise 2

1. ধনাত্মক **2.** ঋণাত্মক **3.** ধনাত্মক

4. 2 ও $3\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী নহে এরূপ যে কোন মান **5.** $\frac{25}{8}$

8. 11, 3 **9.** 5 ও $\frac{1}{5}$ **15.** 4, -5

18. $(3x-2y+1)(x+3y-2)$ **19.** ± 7 **20.** 0, 12

23. 3, 5 **24.** $(aa'-bb')^2+4(ha'+h'b)(hb'+h'a)=0.$

Exercise 3

1. 40320 ; 210 ; 5040 ; 360 ; 120 **2.** 5 বা 4 **3.** 4

8. 30 **9.** 720 **10.** 60 **11.** 336 **12.** 380 **13.** 4320

14. 389188800, 59875200 **15.** 20160, 5040

16. (i) 10079 (ii) 719 (iii) 359 **18.** 576

19. 60 **20.** 60 **21.** 36 **22.** 2160 **23.** 120

24. 24 **25.** 154 **26.** $(n-2)\,\underline{|n-1}$

27. (i) 330 (ii) 990 **28.** 576 **29.** 4096 **30.** $\underline{|20} \times {}^{21}P_{16}$

31. 3600 **32.** 900 **33.** 720, 600, 96 **34.** 81 **35.** $8\underline{|9}$

36. $\underline{|9}$ **37.** 12 **38.** 20160 **39.** 86400 **40.** 2880

41. $\dfrac{\underline{|41}}{\underline{|4}\,\underline{|5}\,\underline{|5}\,\underline{|7}\,\underline{|7}\,\underline{|7}}$ **42.** $\dfrac{\underline{|39}}{\underline{|5}(\underline{|4})^3(\underline{|6})^3}$

43. 125 **44.** 3456 **45.** 5040 **46.** 2520

47. 870 **48.** $\dfrac{\underline{|16}\,\underline{|15}}{\underline{|4}}$ **49.** (i) 240, (ii) 480

50. 2880 **52.** 2520.

Exercise 4

1. (i) 15 (ii) 120 (iii) 435 (iv) 51 **2.** 14 **3.** (i) 8, (ii) 1771

4. $n-1$ **5.** 55 **6.** 840 **7.** 246 **8.** 868224

9. 816000 **10.** 36 **11.** 220 **12.** (i) 210 (ii) 371

13. 200 **14.** 25 **15.** 20, 9 **16.** 120 **17.** (i) 40 (ii) 116

18 (i) $\frac{1}{2}\{n(n-1)-m(m-1)+2\}$

(ii) $\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$ **19.** 990

20. $n=6, r=3$ **21.** 63 **22.** 344 **23.** (i) 100 (ii) 451

24. 15 **25.** 68 **26.** $\dfrac{\underline{|22}}{2\,\underline{|11}\,\underline{|11}}$ **27.** 5 **28.** 255

29. 369600 **30.** $\dfrac{\underline{|p+1}}{\underline{|n}\,\underline{|p-n+1}}$ **31.** 31 **32.** 5040

33. 55 **34.** 4 **36.** (i) $\dfrac{\underline{|68}}{(\underline{|17})^4\,\underline{|4}}$, (ii) $\dfrac{\underline{|68}}{(\underline{|17})^4}$

37. 1260 **38.** 15400 **39.** (i) 113, (ii) 2190 **40.** 7776000

42. (i) 160, (ii) 2274 45. $\frac{51}{\lfloor 12 \lfloor 16 \lfloor 23}$ 46. 59

47. $\frac{\lfloor pr}{(\lfloor p)^r \lfloor r}$ 48. 315 49. 30.

Exercise 5

1. $a^5+15a^4+90a^3+270a^2+405a+243$
2. $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$
3. $32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3+810xy^4+243y^5$
4. $x^7-\frac{21x^6}{y}+\frac{189x^5}{y^2}-\frac{945x^4}{y^3}+\frac{2835x^3}{y^4}-\frac{5103x^2}{y^5}+\frac{5103x}{y^6}-\frac{2187}{y^7}$ 5. $240\sqrt{3}$ 6. $32-40a^2+10a^4$
7. $a^6-3a^5-3a^4+11a^3+6a^2-12a-8$ 8. ${}^{17}c_7 \cdot \frac{1}{x^7}$
9. $43750x^4y^4$ 10. ${}^{2n}c_{n-1}x^2$ 11. 924
12. $126x, -\frac{126}{x}$ 13. -252 14. $\frac{2835}{8}$
15. (i) $(-1)^n \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$ অথবা $\frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{\lfloor n}(-2)^n$; (ii) 252 ;
17. -252 18. 1340 19. -364 20. 4433
21. 340 ; 21 22. $-{}^{2n+1}c_{2r+1}$ 24. 495 25. $199\frac{1}{8}$.
26. $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$ 27. -70 ; 27(a) $\frac{7}{18}$; 28. 252
29. $(n+1)$-তম পদ, $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor n \lfloor m}$ 30. $\frac{28672}{729}$ 31. t_6
32. $t_4=t_5=\frac{224}{9}$ 33. $\frac{2816}{27}$ 34. -1 35. -1
37. $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$ 38. $x=1, a=2, n=7$ 39. 8 40. 11

43. 9 **44.** 1 **47.** 970299, ·96

60. (i) 0 (ii) $\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n+1}\,\underline{|n-1}}$ (iii) $\frac{1}{2}n(n+1)$

61. n জোড় হইলে $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}n}\,\underline{|\frac{1}{2}n}}x^{\frac{1}{2}n}$;

n বিজোড় হইলে $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}(n-1)}\,\underline{|\frac{1}{2}(n+1)}}x^{\frac{1}{2}(n-1)}$ ও

$\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}(n+1)}\,\underline{|\frac{1}{2}(n-1)}}x^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

62. 2^6 (সহগগুলির সমষ্টি) **63.** $a=2$. $x=3$, $n=5$.

Exercise 6

1. $1-4x+10x^2-20x^3+\cdots$ **2.** $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$

3. $1-10x+60x^2-280x^3+\cdots$ **4.** $1-\frac{3}{5}x-\frac{3}{25}x^2-\frac{7}{125}x^3-\cdots$

5. $1-\frac{3}{2}x+\frac{27}{8}x^2-\frac{135}{16}x^3+\ldots$ **6.** $8+9x+\frac{27}{16}x^2-\frac{27}{128}x^3+\cdots$

7. $\frac{1}{8}-\frac{3}{16}a+\frac{3}{16}a^2-\frac{5}{32}a^3+\cdots$ **8.** $1-\frac{1}{3}x-\dfrac{1}{3^2}x^2-\dfrac{5}{3^4}x^3-\ldots$

9. $a^{-\frac{5}{2}}\left(1+\dfrac{5x}{a}+\dfrac{35x^2}{2a^2}+\dfrac{105x^3}{2a^3}+\cdots\right)$

10. $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\cdots$

11. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{16}}\left(1+\dfrac{6}{5}x^2+\dfrac{81}{50}x^4+\dfrac{567}{250}x^6+\cdots\right)$

12. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots$

13. $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\cdots$ **14.** $-4a^3$, $(-1)^r(r+1)a^r$

15. $\frac{2}{3}x^3$ **16.** $36x^7$, $\dfrac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$ **17.** $\dfrac{b^r}{a^{r+1}}x^r$

18. $\dfrac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-2)n+1\}}{n^{r-1}\,\underline{|r-1}}\cdot\dfrac{x^{r-1}}{a^{\frac{1}{n}+r-1}}$

19. $3\times\frac{1.3.5\cdots(2r-7)}{2^{r-1}\underline{|r-1}}x^{r-1}$ 20. $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}a^{2r}$

21. $(-1)^{r-1}\frac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r\underline{|r}}x^r$ 22. $(-1)^r\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\underline{|r}}x^r$

23. $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$; $(r+1)x^r$.

24. $1+4x+10x^2+20x^3+\cdots$; $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$

25. $1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\cdots$; $\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\underline{|r}}x^r$ 26. $-\frac{27}{128}$

27. 101 28. 121 29. 2 30. $-\frac{1}{4}\left(3+\frac{5}{3^8}\right)$

31. $4n$ 32. $-\frac{r+9}{2^{r+2}}$, $-\frac{7}{64}$ 33. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3.2}$

34. $(-1)^n$ 35. সপ্তম পদ 36. তৃতীয় পদ

37. অষ্টম ও নবম পদদ্বয় 38. $\frac{77}{2}.3^{\frac{3}{4}}$ 39. (i) নবম পদ, (ii) দ্বিতীয়, (iii) নবম 40. (i) $-\frac{5}{8}a^4$, (ii) $-\frac{1}{2x^3}$

41. $\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\underline{|r}}$ 42. নবম।

Exercise 7

1. 1·2167 2. 4·9920 3. 9·9990 4. 9·9499
5. ·1459 6. 1·0007 7. 1·2599 8. ·1996
9. 4·89898 10. ·9996 11. (a) ·0638
11. (b) 1·0003 12. 1·00199
13. $1+\frac{13}{6}a$ 14. $1-\frac{51}{20}a$ 17. $1+x+x^2+\ldots$ to ∞

18. $\frac{3}{4}$ 19. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 20. $\frac{2}{3}$ 21. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$

22. $\frac{1-3x}{(1+x)^2}$ 23. $\sqrt{2}$ 24. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 25. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

26. $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ **27.** $\sqrt[3]{2}$ **28.** 2 **29.** $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{3}}$

30. $4(2)^{\frac{1}{3}}-2$ **31.** $(\frac{3}{2})^{-\frac{3}{2}}$ **32.** $\frac{19}{8}$ **33.** $3\sqrt{3}$ **34.** $\frac{1}{24}$

35. $(1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **38.** $\frac{1}{11}$ **39.** $\frac{5}{99}$ **40.** $\frac{9}{110}$

41. $1\frac{5}{9}$ **43.** $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}$ **44.** $\frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+r)}{\lfloor r}$

Exercise 8

1. $1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots$ **2.** ·9048 **3.** $\frac{(-1)^r}{\lfloor r}(1+r)$

4. $\frac{(-1)^n}{\lfloor n}(p+nq)$ **5.** $e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+\cdots)$

6. $e(1+px+p^2x^2+\frac{5}{6}p^3x^3+\frac{5}{8}p^4x^4+\cdots)$

7. $\frac{(-1)^n}{\lfloor n}(1+2n-n^2)$ **8.** $2-x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{360}x^4\cdots$

9. $\frac{(-1)^r}{\lfloor r}(r^2-4r+1)$ **10.** $(-1)^n\frac{(n-1)^2}{\lfloor n}$ **11.** $e+e^{-1}-2$.

23. $\frac{1}{2}\left(2+\frac{2^2a^2}{\lfloor 2}+\frac{2^4a^4}{\lfloor 4}+\cdots+\frac{2^{2n}a^{2n}}{\lfloor 2n}+\cdots\right)$ **25** $3e$

26. $2e$ **27.** e^2-e **28.** $6e-1$ **29.** $\frac{3}{2}e$ **30.** $5e$

31. $2e-\frac{7}{2}$ **32.** $(x^3+6x^2+7x+1)e^x$ **33.** $5e$ **34.** $3e$ **35.** ·69

36. 4·000347 **43.** $\log_e\frac{4}{3}$ **46.** $\log_e 3$ **47.** $\frac{3}{2}\log_e 2$

48. $\frac{x}{1-x}+\log_e(1-x)$ **49.** $\log_e 3-\log_e 2$.

50. $-\left(\frac{2+1}{1}x+\frac{2^2+1}{2}x^2+\frac{2^3+1}{3}x^3+\cdots\right)$, $-\frac{2^n+1}{n}$

51. n যদি 3 এর গুণিতক হয়, তবে $-\frac{2}{n}$, নতুবা $\frac{1}{n}$

52. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)$

53. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{8}x^8+\cdots$,

n বিজোড় হইলে সহগ $=\frac{1}{2n}$, n জোড় হইলে সহগ $=-\frac{3}{2n}$.

54. $\frac{a+b}{x}-\frac{a^2+b^2}{2x^2}+\frac{a^3+b^3}{3x^3}-\cdots$ 58. $\frac{(-1)^r2^r-1}{r}x^r$

65. ·002000 67. $\frac{1}{\log_e 2}$.

TRIGONOMETRY

Exercise 9

1. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$ 2. $n\pi+\frac{3\pi}{4}$ 3. $2n\pi+\frac{7\pi}{6}$

4. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ অথবা $2n\pi-\frac{\pi}{6}$ 5. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 6. $n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

7. $\frac{n\pi}{2}+\left(-1\right)^n\frac{\pi}{12}$ 8. $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{12}$ 9. $2n\pi+\frac{\pi}{3}$.

10. $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ 11. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা $n\pi+\cot^{-1}\frac{1}{2}$

12. $\frac{r\pi}{m+(-1)^r n}$ যেখানে r কোন অখণ্ড সংখ্যা বা 0

13. $\left(2n+1\right)\frac{\pi}{5}$ বা $\frac{2n\pi}{3}$ 14. $\left(2n+1\right)\frac{\pi}{14}$

15. $\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 16. $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

17. $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$ 18. $2n\pi$ অথবা $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 19. $\frac{n\pi}{3}$ বা $\frac{1}{12}\pi(6n\pm1)$

20. $\frac{n\pi}{4}$ বা $\left(2n+1\right)\frac{\pi}{24}$ 21. $n\pi$ বা $\frac{1}{4}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{24}$

22. $\frac{n\pi}{2}\left(\text{বা } n\pi\right)$ 23. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ অথবা $n\pi+\frac{\pi}{3}$ 24. $\frac{1}{3}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

25. $\frac{1}{3}n\pi$ বা $n\pi$ বা $\frac{1}{2}n\pi$ 26. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

27. $2n\pi$ বা $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ বা $n\pi - \frac{\pi}{4}$ 28. $\frac{1}{4}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{40}$

29. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}$ 30. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 31. $2n\pi$ বা $\frac{1}{6}(4n+1)\pi$

32. $\frac{1}{3}n\pi$ বা $n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 33. $2n\pi - \alpha$ বা $(4n-1)\frac{\pi}{2} + \alpha$

34. $(2n+1)\frac{\pi}{8}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

35. $2n\pi + \alpha$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$ 36. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ বা $2n\pi - 40°44'$

37. $2m\pi$ বা $\frac{4m\pi}{n \pm 1}$ 38. 90°, 450°, 810° 39. $\frac{n\pi}{6}$

40. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ বা $\sin^{-1}(-\frac{3}{5})$ 42. 30°, 120°, 150° 43. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

44. $\frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$ 45. $\frac{\pi}{3}$ 46. $\frac{1}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi$

47. 75° বা 345° 48. $x = y = 45°$.

Exercise 10

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $-\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{6}$ 4. $\frac{\pi}{2}$ 5. $\frac{\pi}{2}$ 6. $\frac{\pi}{2}$

7. (i) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

(ii) $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos^{-1}\frac{\pm 1}{\sqrt{1+x^2}} = \cot^{-1}\frac{1}{x}$

$= \sec^{-1}(\pm\sqrt{1+x^2}) = \text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\pm x}$.

33. ± 1 **34.** $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ **35.** $-\frac{1}{6}$ বা 1 **36.** 3

37. 0 বা $\frac{1}{2}$ **38.** 13 **39.** 1 **40.** $\pm \frac{1}{2}$ **41.** $-\frac{4}{9}$61

42. $\pm \frac{25}{24}$ **43.** $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **44.** $\frac{a+b}{1-ab}$ **45.** $\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

46. 2 **47.** $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ **48.** No value **49.** 8.

Exercise 11

1. A = 30°, B = 120°, C = 30° **2.** 60° বা 120° **3.** 43

4. $\frac{4}{7}$ **5.** $\frac{4}{5}$ **6.** 60° **7.** 84 **8.** 24 **9.** 864 ব. গ.

29. B = 90°, A = 30°, C = 60°. **31.** 120°.

Exercise 12

1. $r=4$, $r_1=10\frac{1}{2}$ **2.** $R=\frac{abc}{4\Delta}$ **23.** 7 : 2.

Exercise 13

1. ·70671 **2.** ·90482 **3.** ·71857 **4.** ·26095

5. 1·24884 **6.** 1·29752 **7.** 9·84758 **8.** 9·61614

9. 9·81911 **10.** 10·28229 **11.** 68°57′ **12.** 3·68372

13. ·0353441 **14.** ·61837 **15.** ·30317175 **16.** 2·64114

17. 35°24′37″ **18.** ·66553 **19.** 58°18′12″

20. 76°21′29″ **21.** 10·74013 **22.** 9·7867587

23. 79°51′47·2″ **24.** θ = 27°39′55″ **25.** ·66843

26. 10·613296 **27.** 9·8505931 **29.** ·29974

30. 1·776 **31.** ·2394

32. 36°52′7″ **33.** 16°41′15″.

Exercise 14

1. A=41°23′14″, B=47°45′50″, C=90°49′56″ 2. 9·6733937
3. 38°56′33″, 47°41′7″, 93°22′20″ 4. 58°59′33″
5. 78°27′46″·8 (প্রায়) 6. 88°59′41″ (প্রায়)
7. 48°11′23″, 58°24′43″, 73°23′54″ 8. 55°46′16″·14 (প্রায়)
9. 104°28′39″ (প্রায়) 10. 71°42′ (প্রায়) 11. 53°7′48″
12. 60°, 45°, 75°, 13. A=120°, B=C=30° 14. 120°
16. 30°, 105° ; 2 : $\sqrt{2}$: ($\sqrt{3}$+1) 17. 2 : ($\sqrt{3}$+1)
18. 1 : $\sqrt{3}$: 2 21. 12 : 5 : 13 22. 2 : ($\sqrt{3}$+1)
23. $\sqrt{2}$: 2 : ($\sqrt{3}$+1) 24. 14·35948 ফুট।

Exercise 15

1. a=1, B=120°, C=30°. 2. c=2, A=75°, B=60°
3. 16°3′·5, 123°56′·5 4. B=78°17′39·6″, C=49°36′20·4″
5. A=38°12′47″·5, B=21°47′12″·5 6. 119°16′51″, 5°43′9″
7. A=94°42′54″, B=25°17′6″
8. A=71°44′29·5″ B=48°15′30·5″
9. B=76°47′2″·2, C=49°12′57″·8
10. A=116°33′54″, B=26°33′54″
11. B=19°38′3″ C=109°39′57″, a=559·63
12. 70°53′36″, 49°6′24″ 13. অঙ্কে $\frac{C}{2}$ স্থানে $\frac{A}{2}$ ধর 14. 27·0375
15. 7·698622 16. B=30°, a=c=2($\sqrt{3}$+1)
17. Each side= $\sqrt{5}$+1, 72°,72°, 36°
18. C=70°30′, b=18·33, c=37·05 19. 769·3622
20. 172·6436.

Exercise 16

1. $B=75°, C=45°$

3. $B_1=105°, C_1=30°, b_1=\sqrt{2}$; $B_2=75°, C_2=60°, b_2=\sqrt{6}$

4. No solution 5. $A_1=105°, C_1=45°, a_1=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $A_2=15°, C_2=135°, -a_2=10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

6. $B=60°, A=90°, a=20\sqrt{3}$; অথবা $B=120°, A=30°, a=10\sqrt{3}$ 7. $A=30°, B=90°, b=10$ 8. 63·996 ft.

9. 44°25′39″ 10. $A=100°34', B=34°26'$

11. $A=75°53', C=67°47'$, অথবা $A=31°27', C=112°13'$

12. 59°10′35″ বা 120°49′25″ 13. $B=34°27', C=100°33'$ [অঙ্কে 30° স্থানে 34° হইবে] 14. 4·56706 ফুট

15. 5°44′21″ 17. $A=31°39'33''$, $C=96°1'27''$, $a=878·753$.

Exercise 17

1. (a) $2\cos\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)$, (b) $\frac{1}{2}(\phi_1+\phi_2)$ 2. 1960·95 গজ

4. 1202·08 গজ 5. 1 বা $\frac{1}{3}$ 6. 1 বা 4 8. $341\sqrt{2}$ ফুট

9. 1 বা 2 10. 12 ফুট 11. 100 ফুট 12. 10000 ফুট

13. 73·2 ফুট., 200 ফু. 14. $h \cot\beta \tan\alpha$ 15. 1060·5 ফুট

17. পাহাড় হইতে 141·7 ফুট দূরে 18. 200·1 ফুট 19. $440\sqrt{6}$ গজ

21. 1185·7 ফুট 22. 339·4 ফুট 27. $\frac{a}{\sqrt{2}}$

29. 107·238 ফুট (প্রায়)।

Exercise 18

7. $x=\frac{\pi}{4}$ 8. $x=n\pi+\frac{1}{4}\pi$ 9. $x=\frac{\pi}{4}$ 10 $x=38°10'$ (প্রায়)

11. $x=0$, $x=1·17$ রেডি. (প্রায়) 12. $x=0°$, 60°, 180°, 300° 360°

13. $x=0$ 14. $\theta=90°$ ও 46°25′ (প্রায়)

15. লেখটি $x=\frac{\pi}{2}$ রেখার নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, কিন্তু উহাকে কখন স্পর্শ করিবে না সুতরাং $x=\frac{\pi}{2}$ রেখাটি ঐ বক্র লেখটির asymptote হইবে।

16. লেখ অঙ্কনের সময় x এর radian মান ধরিবে। লেখগুলি মূল বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে।

CO-ORDINATE GEOMETRY

Exercise 19

1. (i) $x^2+y^2=9$, (ii) $x^2+y^2+6y-16=0$
(iii) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ (vi) $x^2+y^2+6x-8y+16=0$
(v) $x^2+y^2+6x-4y+7=0$ (vi) $x^2+y^2+2x+4y=0$
(vii) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

2, (i) (0, 0), 2 ; (ii) (0, 0), $\sqrt{5}$; (iii) $(-1, 2)$, $\sqrt{2}$
(iv) (2, 3), 5 ; (v) $(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$, $\frac{5\sqrt{2}}{4}$; (vi) $(3, -7)$, 5

3. 19 4. 0 ; the centres are collinear 6. $x+3y=0$

7. $2x+5y=6$ 8. (i) $x^2+y^2-4x-5y=0$
(ii) $x^2+y^2-22x-4y+25=0$
(iii) $x^2+y^2-5x-y+4=0$ (iv) $x^2+y^2-6x-2y+5=0$
(v) $x^2+y^2+5x-5y=0$

9. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ 10. $x^2+y^2+56x+46y-212=0$

11. $x^2+y^2-6x-8y=0$ 12. $x^2+y^2-4x-3y=0$

13. $x^2+y^2-3x+4y-12=0$ 14. $2x^2+2y^2+5x-6y+7=0$

15. $x^2+y^2=36$

16. $x^2+y^2+2\sqrt{21}y-4=0$, $x^2+y^2-2\sqrt{21}y-4=0$

18. $\frac{3\sqrt{3}}{4}(f^2+g^2-c)$ 19. $x^2+y^2+2x+4y-45=0$

20. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

21. $x-2y+2=0$, $y=0$, $x+y=1$; $x^2+y^2=x+y$.

22. Centres : (1, −1), (3, 1), (4, 2) ; radii : 3, 4, 5 ; $x-y=2$

23. $x^2+y^2+6y-16=0$ 24. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$.

Exercise 20

1. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

2. $x^2+y^2+6x+6y+9=0$, $x^2+y^2-6x-6y+9=0$

3. *Hints* :—Distance between the centres = the sum of the radii

4. *Hints* :—Distance between the centres = the difference of the radii 5. $x^2+y^2-4x-2y+4=0$

6. $x^2+y^2-10x+26y+25=0$, $x^2+y^2-10x-26y+25=0$

7. (3,4) and (4,3)

8. The line touches the circle at the point (−1, −1)

9. (7, 3) and (2, 8) 10 (*a*), 8 10 (*b*). $\frac{2}{5}\sqrt{1600-c^2}$

11. (*a*) $2x-3y+13=0$ (*b*) $x+2y=5$ 12. $x-y=3$

13. (i) $3x-4y=25$; (ii) $3x+4y=32$; (iii) $12x-5y+95=0$

14. $4x+5y=41$ and $4x-5y=41$

15. (i) $2y=5x$; (ii) $3x-4y=6$ 16. $\pm\frac{5}{12}$

17. $3x+4y+15=0$ and $3x+4y-15=0$

18. $3x+4y+25=0$ and $3x+4y-25=0$

19. (i) $3x+4y\pm 25=0$ (ii) $12y=\pm 5x+65$

20. $4x+3y+19=0$ and $4x+3y-31=0$

21. $x+2y+11=0$ and $x+2y-9=0$ 22. (−1, 1)

23. $(-4, 6)$ 24. $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ 26. (i) 4 (ii) 3 ; (iii) $\sqrt{}$

28. $x^2+y^2-x-y=0$ 29. $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$

32. $(-3, 1)$ 33. $4x+3y\pm25=0$ 34. $(2, 2\sqrt{3})$

35. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$ 36. $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ 37. $\sqrt{3}y=x\pm10$

38. $x+2y=0, 2x+y=0$ 39. $c=2(1\pm\sqrt{1+m^2})$.

40. $5x+y+2=0$; $2x-10y+21=0$ 41. $x-2y+7=0$; 4.

Exercise 21

1. (i) 14 ; $(\frac{7}{2}, 0)$; (ii) 5 ; $(\frac{5}{4}, 0)$; (iii) $\frac{7}{2}$; $(\frac{7}{8}, 0)$;
(iv) 2 ; $(-\frac{1}{2}, 0)$; (v) 4 ; $(0, 1)$; (vi) 8 ; $(0, -2)$
(vii) $\frac{7}{2}$; $(0, -\frac{7}{8})$; (viii) $a, \left(\frac{a^2-4b}{4a}, 0\right)$

2. (a) $(0, 0), y+2=0$; (b) ~~$(-2, 1), x+3=0$~~

3. $\frac{1}{2}$; $(\frac{1}{8}, 0)$ 4. $4x+13=0$; $(-\frac{13}{4}, \frac{13}{2})$ and $(\frac{13}{4}, -\frac{13}{2})$

6. (a) $9x^2+4y^2-12xy-28x+62y+29=0$;
(b) $16x^2+9y^2+24xy-80x-110y+225=0$;
(c) $x^2=4y$ (d) $(y-2)^2=12(x+2)$;
(e) $x^2+2xy+y^2-16x+16y-64=0$;
(f) $x^2-2xy+y^2-20x-20y=0$

7. (a) $(y-2)^2=8(x+3)^2$; (b) $(x-1)^2=8(y+1)$

8. $(x+2y)^2-42x+26y+56=0$

9. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac-1}{4a}\right)$; $\frac{1}{a}$

10. $x^2=12y$ 11. $\frac{7}{5}, (\frac{7}{20}, 0)$ 12. $\frac{4}{3}, (\frac{1}{3}, 0)$

13. $(-2, -3), (-\frac{3}{2}, -3), 2x+5=0$

14. $\frac{4}{3}$, $(\frac{1}{3}, 0)$, ছেদবিন্দুদ্বয় $(0, 0)$ এবং $(3, 2)$ 15. $(1, 2), (0, 2)$, 4

16. ছেদবিন্দু $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$, নাভি $(\frac{3}{10}, 0)$ 17. $\left(\frac{b^2-c}{2a}, \quad -b\right)$

18. $y=2x^2+3x+4$; $\frac{1}{2}$ 19. $x^2=12y$

21. $x^2-4xy+4y^2+4x+2y-1=0$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 22. $x^2+y^2=4$

23. $\frac{5}{8}$th of the latus rectum.

Exercise 22

1. (i) $(1, 3)$; $(4, 6)$ (ii) $(1, 2)$; $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{3})$

2. (i) $(\frac{1}{2}, 2)$, (ii) $(\frac{3}{16}, \frac{3}{4})$, (iii) $(3, 2)$

3. (i) $x+y=3$, $x-y=9$; (ii) $x \pm y+2=0$; $x \pm y=6$; (iii) $y=2x+8$; $x+2y=6$; (iv) $4y-x=24$; $4x+y=108$; (v) $y=x$, $x+y=4a$; $y+x=0$, $x-y=4a$

4. $2x-4y=9$; $(\frac{1}{2}, 2)$ 6. $x-3y+18=0$, $9x+3y+2=0$, 90°

8. $5\sqrt{5}$ 9. $(6, -4\sqrt{3})$ 10. $(\frac{3}{4}, 3)$

11. $4y=x+28$; $(28, 14)$ 12. $9x+6y+8=0$; $(\frac{8}{9}, -\frac{8}{3})$

13. $2x+y+1=0$, $(\frac{1}{2}, -2)$ এবং $2y-x-8=0$, $(8, 8)$

14. $al^2=mn$ 15. $(4, 2), (9, 3)$

16. 12 18. $a=3$ 19. 6 20. $(am^2, -2am)$

21. $x+y=3a$, $x-y=3a$ 22. (a) $2x-y+18=0$ (b) $x+2y+9=0$

23. $(2a, \pm 2\sqrt{3}a)$ 24. $2x+3y+36=0$ 25. $y=\pm(x+2a)$

26. $(3a, 2\sqrt{3}a)$

27. $x-2y+8=0$, $(8, 8)$; $2x+y+1=0$, $(\frac{1}{2}, -2)$ 32. $y=1$

33. $y=3x-7$ 34. $4x+3y+1=0$ 37. $8y^2=5x+24y+10$

Exercise 23

1. (i) $\frac{\sqrt7}{4}$; $(\pm\sqrt7, 0)$, $\frac{9}{2}$; (ii) $\frac{1}{2}$, $(\pm1, 0)$, 3; (iii) $\frac{3}{5}$, $(0, \pm3)$, $6\frac{2}{5}$

   (iv) $\frac{1}{\sqrt3}$, $\left(\pm\frac{2}{\sqrt3}, 0\right)$, $\frac{8}{3}$; (v) $\frac{1}{\sqrt3}$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt6}, 0\right)$, $\frac{2\sqrt2}{3}$

2. (a) $\left(\pm\frac{\sqrt3}{2}, 0\right)$, $x \pm 2\sqrt3 = 0$;

   (b) $\left(1 \pm \frac{\sqrt5}{12}, 2\right)$, $x - 1 \pm \frac{3\sqrt5}{20} = 0$

3. পরাক্ষ $= 8$, উপাক্ষ $= 4\sqrt3$, $e = \frac{1}{2}$, নাভিদ্বয় $(-2, 0)$, $(2, 0)$

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 5. $\frac{10}{3}$; $\frac{2}{3}$; $(0, 5)$, $(0, 1)$

6. $(3, 2)$; $\frac{\sqrt5}{3}$; $(3-\sqrt5, 0)$, $(3+\sqrt5, 0)$;

   $x = 3 - \frac{9}{\sqrt5}$, $x = 3 + \frac{9}{\sqrt5}$

7. (i) $9x^2 + 16y^2 = 144$ (ii) $x^2 + 2y^2 = 9$;

   (iii) $16x^2 + 24y^2 = 81$. (iv) $2x^2 + 3y^2 = 35$

8. (i) $14x^2 + 11y^2 - 4xy - 58x - 26y + 74 = 0$

   (ii) $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

9. $3x^2 + 5y^2 = 32$ 10. পরাক্ষ $= 30$ ই., উপাক্ষ $= 24$ ই.

11. (i) $(0, 3)$ and $(3, 0)$ (ii) $(-1, 3)$ and $(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$

12. $(-\frac{16}{5}, \frac{9}{5})$ 13. $\left(-\frac{2\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{14}\right)$

14. $x + 3y = 5$; $9x - 3y = 5$

15. $25x + 6y = 137$; $6x - 25y + 20 = 0$ 16. $\pm\sqrt7 x \pm 4y = 16$

17. ±1, $(-1, 2)$, $(1, 2)$ 18. $y = 3x \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{155}{3}}$

19. $x - 3y + 2 = 0$, $x - 3y = 2$; $(-1, \frac{1}{3})$; $(1, -\frac{1}{3})$ 20. $\frac{1}{\sqrt2}$

21. $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$, স্থানাঙ্ক $(\pm 1, 0)$ 22. $\frac{1}{2}$, $(\pm 2, 0)$

23. $3x^2+5y^2=32$, $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 24. $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$, $\sqrt{\frac{2}{5}}$

25. $5x^2+5y^2-76x-88y-2xy+506=0$

26. $\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1$ 27. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$, $\frac{2}{7}\sqrt{6}$, $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$

28. $x+10y=0$ 29. $5x=4y$ 30. $9x=20y$

33. $8x-9y=25$ 34. এরূপ একজোড়া অনুবন্ধী ব্যাস হইতে পারে না

37. $9x-10y=19$ 38. $72x+15y=149$

39. (i) $4x^2+5y^2-4x-5y=0$ (ii) $4x^2+5y^2-16x+25y=0$

42. $x-3y=0$, $2x+y=0$ এবং $2x-y=0$, $x+3y=0$.

Exercise 24

1. (i) $9x^2-16y^2=35$ (ii) $25x^2-144y^2=900$

(iii) $65x^2-36y^2=441$ (iv) $x^2-y^2=32$

2. (a) $\frac{\sqrt{13}}{3}$; $2\frac{2}{3}$; $(\pm\sqrt{13}, 0)$ 2. (b) $e=\frac{13}{12}$; $(13, 0)$, $(-13, 0)$

3. (i) $(\pm 1, 0)$. $x\pm\frac{1}{4}=0$, 2

(ii) $\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{2}-3, 2\right)$, $x\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+3=0$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$

4. $(5, \pm\frac{20}{3})$ 5. $(3, 1)$; $(-\frac{57}{16}, -\frac{13}{8})$

6. (a, b), $\left\{\frac{a(a+3b)}{b-a}, \frac{b(b+3a)}{a-b}\right\}$ 7. $(-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3})$

8. $24y-30x=\sqrt{161}$, $24y-30x+\sqrt{161}=0$ 11. $9y=32x$

12. $4x^2+31y^2+36xy+8x+66y-41=0$

13. $144x^2-25y^2=900$ 14. (i) $3x\pm 2y=0$ (ii) $ay\pm bx=0$.

ELECTIVE MATHEMATICS

FIRST PAPER

Group A—Algebra [60 Marks]

[*Answer any* **four** *questions. All questions carry equal marks.*]

1. (*a*) If $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$,

find the value of $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$. [Ans. $\frac{15}{13}$]

(*b*) Simplify : $\left[\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[9]{8}}\times\sqrt[12]{16^{-1}}\right]^{\frac{1}{2}}$. [Ans. 1]

(*c*) Find the square root of $28-6\sqrt{3}$.

[Ans. $\pm(3\sqrt{3}-1)$]

2. Solve the equations :

(*a*) $\left.\begin{array}{r}2x^2+3xy+y^2=15\\ 5x+2y=12\end{array}\right\}$.

[Ans. $x=2$, $y=1$; $x=14$, $y=-29$]

(*b*) $\left.\begin{array}{r}3x+4y=5xy\\ 2y+3z=2yz\\ 5z+2x=6zx\end{array}\right\}$.

[Ans. $x=y=z=0$; $x=1$, $y=3$, $z=2$]

3. (*a*) A class consists of a number of boys whose ages are in Arithmetical Progression, the common difference being 3 months. If the youngest boy is just seven years old and the sum of the ages of the boys is 153 years, find the number of boys in the class. [Ans. 17]

(*b*) If S_1, S_2, S_3, denote respectively the sum of the first n terms, first $2n$ terms and first $3n$ terms of a series in Geometrical Progression, prove that $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$.

4. (*a*) Find the cube roots of unity. If ω be an imaginary cube root of unity, prove that $1+\omega+\omega^2=0$.

[Ans. 1, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$]

উত্তরমালা

বীজগণিত

Exercise 51

1. $a=2$ 2. $b^2=ac$ 3. $ab=6$ 4. $ad+bc=0$
5. $a^3+a^2b+b^3=0$ 6. $(a^2-bc)^2=(b^2-ca)(c^2-ab)$
7. $(np-lr)^2=(mr-nq)(lq-mp)$ 8. $a^2(1+2b)^2+(a^2+b)(a^2-2b^2)=0$
9. $a^2-b^2=4$ 10. $pq=1$ 11. $10pq=3$ 12. $b^2-a=2$
13. $p^2-q^2=2$ 14. $m^2-n^2=1$ 15. $3a=2b$ 16. $ad+bc=0$
17. $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ 18. $a^2+b^2=p^2+q^2$
19. $a^2+ab+b^2=0$ 20. $ab=c^2$ 21. $a^4+3b^4=4ac^3$
22. $p^4+3q^4=4pr^3$ 23. $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
24. $ab+ac+bc+1=0$ 25. $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=abcd$
26. $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$ 27. $a^2+b^2+c^2+1=0$ 28. $a=b$
29. $a^2+b^2=m^2+n^2$ 30. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

Exercise 52

1. 21 2. -80 3. 37 4. -42 5. $\frac{10}{3}-n$
6. $a+(n-4)b$ 7. 11-তম পদ 8. 10-তম, r-তম এবং $(n+2)$-তম পদ
9. 10 10. না 11. হাঁ 12. 7 13. 1
14. 5 15. -7 ; 2 16. 34 17. 0 18. 7, 5, 3,⋯
19. 1, 3, 5, ⋯ 20. $\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}$, $\frac{c-d}{p-q}$ 22. 0

Exercise 53

1. 5 2. 1 3. $\frac{1}{2}(a+b)$ 4. a 5. x^2+y^2
6. 8, 13, 18, 23 7. 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36
8. $-2\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$, 2, $3\frac{1}{2}$, 5, $6\frac{1}{2}$, 8, $9\frac{1}{2}$, 11 9. 13 10. 11

Exercise 54

1. 100 2. 369 3. -200 4. $n(2n-1)$
5. $\frac{3}{2}n(n-5)$ 6. $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$ 7. $\frac{1}{2}n(n+1)$
8. $\frac{1}{2}(3n-1)$ 9. [illegible]

10. $(n+1)\{x^2+y^2-(n-2)xy\}$ 11. 3927
12. 3380 13. 900 14. 19096 15. 247 16. 1320
17. 1700 18. $(2n)^2$ 19. 18117 20. 18252
21. -15 ; -60 22. -225

Exercise 55

1. 8 2. 39 3. 3 4. 3 5. 11 6. 6 7. 19
8. 5 ; 11 9. 4 ; 9 10. 4 ; 9 11. পদসংখ্যা 10 হইলে শেষপদ 3 এবং পদসংখ্যা 12 হইলে শেষপদ -1 12. 247 13. 675
14. 345 15. $-(p+q)$ 16. 0

Exercise 56

1. 1 ; 2 2. 2, 12, 22, ⋯ ; $2(5r-4)$ 5. n^2 7. 2, 6, 10 ; 10, 6, 2
8. 5, 8, 11 ; 11, 8, 5 9. 8, 10, 12 ; 12, 10, 8
10. 3, 5, 7, 9 ; 9, 7, 5, 3 11. 2, 5, 8, 11, 14 ; 14, 11, 8, 5, 2
18. 11 ; 21 19. 17 : 19 32. 10 মাস 33. 9 দিন
34. ·50500 গজ 35. 5 বা 12

Exercise 57

1. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 2. $\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$ 3. $n(n-2)$ 4. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
5. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 6. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 7. $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$; 3145
8. $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$; 7462 9. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
10. $\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)$ 11. $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$ 12. $\frac{1}{6}n(4n^2+17n+21)$
13. $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$ 14. $\frac{n}{n+1}$ 15. $\frac{n}{2n+1}$ 16. $\frac{n}{3n+1}$
17. n যুগ্ম হইলে $-\frac{1}{2}n$, বিযুগ্ম হইলে $\frac{1}{2}(n+1)$
18. n যুগ্ম হইলে $-\frac{1}{2}n(n+1)$, বিযুগ্ম হইলে $\frac{1}{2}n(n+1)$
19. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 20. $\frac{1}{6}n(2n^2+3n+7)$ 21. $2n+1$

Exercise 58

1. 162 2. -32 3. $\frac{243}{32}$ 4. $-8\sqrt{2}$ 5. $(-2)^{5-p}$
6. [illegible] 7. $\frac{1}{27}$ 8. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 9. -64 10. 3 ; 2

11. $\frac{1}{128}$ 12. 1, 2, 4, 8, 16, ⋯ 13. $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, ⋯ বা $\frac{2}{3}$, −2, 6, −18, 54, ⋯ 14. অষ্টম পদ 15. না 16. 162

25. $(mn)^{\frac{1}{2}}$; $m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}$ 26. $\left(\frac{c^{n-q}}{d^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

Exercise 59

1. ± 9 2. ± 36 3. $\pm\frac{5}{18}$ 4. $\pm\sqrt{ab}$

5. 15, 45 6. $\frac{1}{3}$, 1, 3 ; $-\frac{1}{3}$, 1, -3

7. $5\frac{1}{3}$, 8, 12, 18, 27 ; $-5\frac{1}{3}$, 8, -12, 18, -27

Exercise 60

1. 255 2. $3^{10}-1$ 3. -255 4. $1\frac{11}{32}$ 5. $\frac{1}{2}(3^n-1)$

6. $-\frac{4}{21}\{1-(-\frac{3}{4})^r\}$ 7. $\frac{25}{24}\{1-(-\frac{3}{5})^n\}$ 8. $\frac{1}{6}-\frac{2}{3.10^n}$

9. $\frac{3\sqrt{2}+4}{2}\{1-(\sqrt{2}-1)^{n+1}\}$ 10. 381 11. -364

12. $\frac{25}{6}\{1-(\frac{3}{5})^{12}\}$ 13. $2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 14. $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

15. $\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{x(1-x^n)}{1-x}$ 16. $3\frac{679}{1024}$ 17. $\frac{3^{28}}{2}(3^8-1)$

18. $16\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$ 19. $\frac{5}{3}(2^{25}-1)$ 20. $\frac{81}{4}\{1-(-\frac{1}{3})^n\}$ 21. 1092

22. $2^{n+1}+n(n+1)-2$ 23. $\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$ 24. 9 25. 8

26. 738861 টাকা

Exercise 61

1. $\frac{1}{9}\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\}$ 2. $\frac{5}{9}\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\}$ 3. $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

4. $\frac{7}{9}\left\{n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$ 5. $2(2^n-1)-n$ 6. $4(2^n-1)-3n$

7. $2\left(n-1+\frac{1}{2^n}\right)$ 8. $\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$ 9. $n.2^n$

10. $n.2^{n+2}-2^{n+1}+2$ 12. 2, 6, 18 ; 18, 6, 2 13. 1, 4, 16 ; 16,4,1

14. 1,3,9 ; 9,3,1 15. 2,4,8 ; 8,4,2 16. 9,6,4 17. 2,5,8 ; 26,5,−16

18. 4, 8, 16 ; 16, 8, 4 21. 27, 3 ; 3, 27 22. 72,8 ; 8,72

35. 25 : 1

Exercise 62

1. $5x=3y$ 2. $xy=15$ 3. 6 4. $\frac{ab}{c}$ 5. $5\frac{1}{3}$ 6. $\frac{3ab}{c}$
7. 6 8-9. $lmn=1$, যেখানে l, m ও n ভেদের ধ্রুবক 10. $x^2-xy+6=0$
11. $x=3y^2-2y+1$ 12. $x=\frac{2}{15}\left(11z+\frac{1}{z}\right)$

Exercise 63

1. 117 ব. ফু. 2. 63 টাকা 3. $5\frac{2}{3}$ দিন 4. 90 টাকা 5. 29 ফুট
6. 6 ইঞ্চি 8. 32 ইঞ্চি 9. $3\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড 10. 3 ইঞ্চি 11. 144 ফুট
12. 4 13. $1\frac{5}{8}$ ফুট 14. ঘণ্টায় 10 মাইল 15. 486 টাকা 16. 112
17. 124 18. ঘণ্টায় 20 মাইল ; 360 টাকা

Exercise 64

1. (*i*) $1\frac{1}{2}$ (*ii*) 4 (*iii*) 4 (*iv*) -6 (*v*) $-\frac{4}{5}$ (*vi*) 6 2. 3
3. 2 8. -1 12. $\frac{n}{1-n}$ 13. $\pm\frac{1}{2}$ 19. 1

Exercise 65

1. $\bar{1}$·07918 2. 1·25527 3. 1·50515 4. 1·55630
5. 1·65321 6. 1·79934 7. ·24988 8. 1·52288
9. ·40424 10. ·15297 11. 1·58496

Exercise 66

1. $x=$·630··· 2. $x=$1·593··· 3. $-$3·150··· 4. $x=$1·164···
5. $x=\frac{5\log b-4\log a}{3\log a-4\log b}$ 6. $x=\frac{\cdot 30103}{(\log a+\log b)}, \frac{\cdot 30103}{(\log a-\log b)}$
7. $x=$1·769··· 8. $x=$·029··· 9. $x=$2·709···, $y=$1·709···
10. $x=$·41 (আসন্ন), $y=$5·66 (আসন্ন)
11. $\log x=\frac{1}{5}(a+3b)$, $\log y=\frac{1}{5}(a-2b)$

Exercise 67

1. ·69897 2. ·95424 3. 1·38021 4. 1·93952
5. $\bar{1}$·77815 6. $\bar{1}$·36173 7. $\bar{2}$·75587 8. $\bar{3}$·91381

9.	2·08991	10.	·39094	11.	$\bar{1}$·54033	12.	$\bar{2}$·76193
13.	3·09133	14.	1·37015	15.	$\bar{1}$·67742	16.	$\bar{3}$·92299
17.	2·38696	18.	·66771	19.	$\bar{2}$·09151	20.	$\bar{4}$·83846
21.	20·893	22.	295·12	23.	450·82	24.	8433·3
25.	13·916	26.	274·54	27.	·14717	28.	·0068665

Exercise 68

1.	·088874	2.	·24929	3.	·83559	4.	1·8919
5.	·0010989	6.	6334·4	7.	·054624	8.	32·579
9.	·0016099	10.	·025147	11.	·85907	12.	2·2740
13.	·59834	14.	·56495	15.	9	16.	14-তম অঙ্ক
17.	4030 টাকা	18.	205·8 ব. ফু.	19.	12030 টাকা	20.	91214

21. 14·2 বৎ. (প্রায়) 22. 15·6 বৎ. (প্রায়) 23. 14·3 বৎ. (প্রায়)

Exercise 69

1. (*i*) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (*ii*) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ (*iii*) $2-\sqrt{3}$

(*iv*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)$ (*v*) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ (*vi*) $3^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{2})$

2. (*i*) $2+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ (*ii*) $\sqrt{5}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

3. (*i*) $\sqrt{a}+\sqrt{b+c}$ (*ii*) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ (*iii*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(*iv*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1})$ (*v*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2a+b}+\sqrt{b})$

(*vi*) $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$ (*vii*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

(*viii*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})$ (*ix*) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-x})$

4. (*i*) $1+\sqrt{2}$ (*ii*) $2-\sqrt{3}$ 5. (*i*) $3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1$

(*ii*) $2^{\frac{3}{2}}+2.3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}$ (*iii*) $x^{\frac{9}{4}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y+y^{\frac{3}{2}}$

(*iv*) $x^{\frac{12}{5}}-x^{\frac{9}{5}}y^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{6}{5}}+y^{\frac{8}{5}}$

(*v*) $3^{\frac{5}{3}}+9.2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{3}{3}}.2^{\frac{4}{3}}+12+3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{8}{3}}+2^{\frac{10}{3}}$ (*vi*) $2^{\frac{1}{3}}-1$

(*vii*) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$

6. (i) $\dfrac{1+3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{2}{3}}}{2}$ (ii) $\dfrac{17+8.3^{\frac{2}{3}}+4.3^{\frac{4}{3}}}{-1}$ (iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}+1}{4}$

(iv) $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$ 7. (i) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx=0$

(ii) $(x+y+z)^3=27xyz$

Exercise 70

1. (i) $13\sqrt{-1}$ (ii) $-3\sqrt{-1}$ (iii) $-24\sqrt{3}$
   (iv) $-48\sqrt{15}\sqrt{-1}$ (v) 4 (vi) $-\frac{1}{2}$
2. (i) i (ii) -1 (iii) $-i$ (iv) 1 (v) $-i$ (vi) -1
   (vii) i (viii) 1

Exercise 71

1. (i) $\dfrac{1-\sqrt{-2}}{3}$ (ii) $\dfrac{1+5\sqrt{-5}}{14}$ (iii) $\dfrac{34}{13}i$
2. (i) $-5+10i$ (ii) $8+6i$ (iii) $0+i$
   (iv) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ (v) $7+5i$ (vi) $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
   (vii) $0-\dfrac{4ab}{a^2+b^2}i$ 3. (i) $\pm(3+2i)$ (ii) $\pm(4-3i)$
   (iii) $\pm(5+3i)$ (iv) $\pm(\sqrt{2}+\sqrt{-1})$ (v) $\pm(2+\sqrt{-5})$
   (vi) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$ (vii) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(5-i)$ (viii) $\pm(1+i)$
   (ix) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (x) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ (xi) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$
   (xii) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x})$ (xiii) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3x+1}+i\sqrt{x-3})$
   (xiv) $\pm\frac{1}{2}(3+i)$ 4. $\pm\left(a+\dfrac{1}{a}+i\right)$
6. (i) $\pm 2, \pm 2i$; (ii) $\pm(2+i)$ 7. (i) $\sqrt{2}$ (ii) 65
   (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 9. (i) $\dfrac{12}{25}$ (ii) 0 19. (i) $(a+ib)(a-ib)$
   (ii) $(a-\omega b)(a-\omega^2 b)$ (iii) $(a+b)(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$

21. $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$

Exercise 72

1. $x=1, 3$ $y=3, 1$	2. $x=4, -2$ $y=2, -4$	3. $x=4$ $y=1$
4. $x=5$ $y=3$	5. $x=-4, \frac{16}{5}$ $y=3, -\frac{2}{5}$	6. $x=5, \frac{17}{5}$ $y=4, \frac{8}{5}$
7. $x=\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ $y=\frac{4}{5}, \frac{4}{5}$	8. $x=\frac{b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$ $y=\frac{a\mp\sqrt{a^2+ab+b^2}}{a+b}$	9. $x=2, 3$ $y=3, 2$
10. $x=5, -3$ $y=3, -5$	11. $x=1\pm\sqrt{3}$ $y=1\mp\sqrt{3}$	12. $x=3, -\frac{5}{2}$ $y=2, -\frac{7}{2}$
13. $x=2, -2$ $y=3, -3$	14. $x=1, \frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	15. $x=4, -3$ $y=3, -4$
16. $x=1, 2$ $y=2, 1$	17. $x=1, -\frac{20}{13}$ $y=2, \frac{37}{13}$	18. $x=0, 2a$ $y=0, 2b$
19. $x=3, 6$ $y=6, 3$	20. $x=\frac{1}{3}, \frac{5}{2}$ $y=\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$	21. $x=6, 4$ $y=10, 15$
22. $x=a, \frac{1}{2}(a+b)$ $y=b, \frac{1}{2}(a+b)$	23. $x=1, 1$ $y=3, 3$	24. $x=1, 2$ $y=2, 1$
25. $x=6, \frac{4}{5}$ $y=4, -\frac{6}{5}$	26. $x=1, \frac{1}{2}$ $y=2, 1$	27. $x=2, -4$ $y=3, -3$
28. $x=2, \frac{3}{2}$ $y=3, 4$	29. $x=3, -1$ $y=-3, 1$	30. $x=\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ $y=5, 20$
31. $x=3, 6$ $y=6, 3$	32. $x=1, 9$ $y=9, 1$	33. $x=2$ $y=3$
34. $x=2, -2$ $y=5, -5$	35. $x=\frac{1}{2}, -1$ $y=1, -\frac{1}{2}$	36. $x=1, 2$ $y=2, 1$
37. $x=8, 4$ $y=4, 8$	38. $x=2, 1$ $y=1, 2$	
39. $x=\frac{3}{2}+\sqrt{2}, \frac{3}{2}-\sqrt{2}$ $y=\frac{3}{2}-\sqrt{2}, \frac{3}{2}+\sqrt{2}$		40. $x=8, -1$ $y=1, -8$

41. $x=1, 27$
$y=27, 1$

42. $x=4, 1$
$y=1, 4$

43. $x=9, 4$
$y=4, 9$

44. $x=8, 1$
$y=1, 8$

45. $x=8, -1$
$y=1, -8$

46. $x=2, -12$
$y=0, -\frac{28}{3}$

47. $x=2, 1$
$y=1, \frac{1}{2}$

48. $x=1, 2$
$y=-1, -2$

49. $x=2, -\frac{1}{2}$
$y=1, -\frac{1}{4}$

50. $x=2, 2, -2, -2$
$y=2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

51. $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}, \quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Exercise 1

1. (i) 5 (ii) 10 (iii) 13 (iv) 25 (v) $\sqrt{2(l^2+m^2)}$

2. (i) 5 (ii) 13 (iii) 17 (iv) $\sqrt{a^2+b^2}$, (v) $\sqrt{2}(a-b)$
(vi) $2\sqrt{b^2+d^2}$ (vii) $2a \sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 3. 4 বা -2.

4. (5, 9) বা (5, -3) 9. (i) (4, 4) (ii) (2, 2) (iii) (-5, -6)

10. (4, 3) 11. (2, 5) 12. $\sqrt{41}$, $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ 13. (7, 8)

14. (-3, 11) 15. 2 : 3 16. 3 : 2 17. 2 : 1 18. 7 : 3

21. $2x-4y=3$ 22. (1, 2) 24. (5, 7) ; 5 25. (i) 5
(ii) $32\frac{1}{2}$ (iii) $23\frac{1}{2}$ (iv) ab (v) $\frac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b)$
(vi) $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 26. 3 27. 1 32. (3, 4)

33. $3\sqrt{2}$, 3, 3 34. (11, 6)

Exercise 2

1. $y=a$ 2. $2y=3x$ 3. (i) $y=x$ (ii) $3x-7y=2$

4. (i) $-\frac{3}{5}$ (ii) $-\frac{4}{3}$ 5. $y=\sqrt{3}x+2$ 6. $x-y=3$

7. $y=\sqrt{3}x-5$ 8. $x+y=3$ 9. $2x-3y=12$

10. $x-y+1=0$ 11. $\sqrt{3}x+y+5-2\sqrt{3}=0$

12. $2x-3y-6=0$ 13. (i) $2x-y=0$ (ii) $x-y+1=0$
(iii) $4x+3y-1=0$ (iv) $ax+by=ab$

14. $3x+y-5=0$, $4x-3y+2=0$, $x-4y-19=0$

16. $x-4y=8$ 17. $3x-2y=7$, $3x+2y=11$ 18. $x+y=3$

19. (i) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (ii) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}+1=0$ (iii) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+1=0$ (iv) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

20. (i) $x+y=7$ (ii) $x-y+1=0$ 21. (i) $x+y+1=0$
(ii) $x-y-5=0$ 22. $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1$ 23. $\sqrt{3}x+y=10$

24. $x-y+8\sqrt{2}=0$

Exercise 3

1. $y=-\frac{1}{2}x-2$ 2. $y=\frac{2}{3}x-2$; $\tan^{-1}\frac{2}{3}$; (0, -2)

3. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; (2, 0), (0, 3) 4. $\frac{x}{-\frac{3}{8}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$; $(-\frac{3}{8}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$

5. $\frac{x}{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{-\frac{3}{8}} = 1$; $(-\frac{3}{2}, 0), (0, -\frac{3}{8})$

6. $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 3 = 0$ 7. $x \cos 135^\circ + y \sin 135^\circ - 8 = 0$

8. $x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ - 5 = 0$; 5 ; 120°

Exercise 4

1. $\tan^{-1} \frac{7}{4}$ 2. 90° 3. 45° 4. স্থূলকোণটি 135°, সূক্ষ্মকোণটি 45°

5. 30° 6. স্থূলকোণটি 120°, সূক্ষ্মকোণটি 60° 7. $x + 2y + 1 = 0$

8. $4x - 3y + 3 = 0$ 9. $3x + 4y = 25$ 10. $6x - 5y = 13$

11. $y = x \tan \alpha$ 12. $3x - y + 4 = 0$ 13. $(1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$

14. $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$ 17. $m = 2$ 22. $3x + 7y = 0$

23. $x = y$ 24. $3x - y = 7$ 25. $2x + y = 5$ 26. $x + 3y = 1$

27. $119x + 102y = 125$ 28. $9x + 9y = 40$

Exercise 5

3. 2 4. 1 5. 8 6. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ 7. 3 8. 1

9. $2x + 3y + 6 = 0$ 10. $3x - 4y - 5 = 0$ 11. (0, 3) ; 5

12. 5 15. $\frac{19}{\sqrt{10}}$ 16. 1 17. $3/\sqrt{41}$

18. $8x - y + 1 = 0$, $7x + 56y + 9 = 0$ 19. $x - y \mp 2 = 0$, $7x + y - 10 = 0$

20. $2x + y - 3 = 0$, $3x - y - 2 = 0$, $x - y = 0$; (1, 1)

পরিমিতি

Exercise 1

1. 216 ঘ. ফু.   2. $4\frac{3}{8}$ ঘ. গ.   3. 4 ঘ. গ. 17 ঘ. ফু.
4. 30 ঘ. ফু. 1152 ঘ. ই.   5. 10 ফুট   6. 6 ফুট
7. 3072   8. 27072   9. 960 ঘ. ফু.
10. 17000 পা.   12. 18 ফুট   13. 1280 মণ
14. 13 ফুট   17. $12\sqrt{3}$ ইঞ্চি   18. 35 ফুট
19. $\frac{81}{8}\sqrt{3}$ ঘ. ফু.   20. $\frac{1}{12400}$ ই.   21. 48
22. $1\frac{1}{3}$ ঘ. ফু.   23. 70 ফুট   24. 15 ফুট
25. 48 ফুট   26. 3 মাইল   27. 1704 ব. ই.   28. 1057 ঘ. ই.
29. 50 পাউণ্ড   30. 7′6″, 4′6″, 3′   31. 16′, 8′, 4′
32. 1 ফুট   33. 3 ফু., 2 ফু.   34. $17\frac{1}{2}$ ফু., 13 ফু.   35. 16 ফু., 8 ফু.

Exercise 2

1. 5 ঘ. ফু.   2. 39 ঘ. ফু. 648 ঘ. ই.   3. 70 ঘ. ফু.
4. 14 ঘ. গ. 1 ঘ. ফু. 288 ঘ. ই.   5. 1 ফু. 4 ই.
6. 4 ফু. $1\frac{1}{3}$ ই.   7. 3 গ. 4 ই.   8. 5 ব. ফু. 48 ব. ই.
9. 1 ব. গ. 1 ব. ফু. 72 ব. ই.   10. 450 ঘ. ই.   11. 150 ঘ. ফু.
12. 144 ঘ. ই.   13. $450\sqrt{3}$ ঘ. ই.   14. 900 ঘ. ই.
15. 8 ফুট   16. 6 ফুট   17. $2\sqrt{3}$ ফুট   18. 132 ঘ. ফু.
19. 89 ঘ. ফু. 1440 ঘ. ই.   20. 72 ঘ. ফু. 324 ঘ. ই.
21. 5 ঘ. গ. 23 ঘ. ফু. 1404 ঘ. ই.   22. $2\frac{1}{3}$ ই.   23. 5 ফু. 3 ই.
24. 6 ফু. 3 ই.   25. 4 ঘ. ফু. 1404 ঘ. ই.   26. 396 ঘ. ফু.
27. 4000 ঘ. ফু.   28. 16টি   29. 110 টাকা   30. 3584
31. 18327 ফু. $3\frac{8}{11}$ ই.   32. 6 ইঞ্চি   33. 8 ফুট
34. 66825 পাউণ্ড   35. 7524 পাউণ্ড   36. 2772 টাকা
37. 264 পাউণ্ড   38. $\frac{7}{16}$ ইঞ্চি

Exercise 3

1. 462 ঘ. ই.   2. 1 ঘ. ফু. 472 ঘ. ই.   3. 396 ঘ. ফু.
4. 14 ঘ. গ. 7 ঘ. ফু.   5. 18 ফুট   6. 22 ফু. 6 ই.
7. 8 গ. 9 ই.   8. 4 ব. ফু.   9. 7 ব. ফু.
10. 1 ব. গ. 1 ব. ফু. 36 ব. ই.   11. 7 ইঞ্চি   12. 9 ইঞ্চি

13. 1 ফু. 2 ই. 14. $1357\frac{5}{7}$ ঘ. ই. 15. $314\frac{2}{7}$ ঘ. ই.
16. 1 ফু. 9 ই., 2 ফু. 11 ই. 17. 1078 ঘ. ই.
18. 1 ঘ. ফু. 1506 ঘ. ই., $808\frac{1}{2}$ পা. 19. $241\frac{13}{33}$ ঘ. ই.
20. $290\frac{10}{21}$ ঘ. ই. 21. $339\frac{3}{7}$ ঘ. ই. 22. $718\frac{2}{3}$ ঘ. ই.
23. 14 ফুট, 15 ফুট 24. 900 ঘ. ফু. 25. 1792 ঘ. ফু.
26. 400 ঘ. ফু. 27. $96\sqrt{2}$ ঘ. ই. 28. $288\sqrt{2}$ ঘ. ফু.
29. 4 সেমি. ; 144 ঘন সেমি. 30. $4\sqrt{3}$ ফুট।

Exercise 4

1. 36 ব. ফু. 84 ব. ই. 2. 29 ব. গ. 3 ব. ফু. 3. 37 ব. ফু. 72 ব. ই.
4. 18 ব. গ. 3 ব. ফু. 54 ব. ই. 5. 16 ব. গ. 6 ব. ফু.
6. 180 টাকা 7. 1000 ঘ. ফু. 9. $488\frac{8}{11}$
10. 45 ব. ফু. 76 ব. ই. 11. 108 টাকা 12. 78 টাকা
13. 6 ফুট 14. 864 ব. ফু. 15. 792 ব. ই.
16. 1128 ব. ফু. 17. 4980 ব. ফু. 18. 10 ইঞ্চি

Exercise 5

1. 6 ব. ফু. 2. 33 ব. ফু. 3. 282 ব. ফু. 48 ব. ই.
4. 30 ব. ফু. 80 ব. ই. 5. 53 ব. ফু. 123 ব. ই. 6. 8 ব. গ. 5 ব. ফু.
7. 7 ইঞ্চি 8. 7 ইঞ্চি 9. 9 ইঞ্চি
10. 1 ব. ফু. 10 ব. ই. 11. 15 ব. ফু. 128 ব. ই. 12. 10 ইঞ্চি
13. 1 ফু. 2 ই. 14. 1 ফু. 2 ই., 1 ফু. 9 ই. 15. 2 টা. 1 আ.
16. 1 : 2 17. 1 : 1 18. 4

Exercise 6

1. 1 ব. ফু. 72 ব. ই. 2. 4 ব. ফু. 39 ব. ই. 3. 18 ব. ফু. 114 ব. ই.
4. 75 ব. ফু. 90 ব. ই. 5. 3 ব. ফু. 118 ব. ই. 6. 16 ব. ফু. 6 ব. ই.
7. 28 ব. ফু. 38 ব. ই. 8. 61 ব. ফু. 16 ব. ই. 9. 13 ব. ফু. 42 ব. ই.
10. 23 ব. ফু. 54 ব. ই. 11. 27 ব. ফু. 72 ব. ই. 12. 19 ব. ফু. 124 ব. ই.
13. 4 ব. ফু. 128 ব. ই. 14. 22 ব. ফু. 132 ব. ই. 15. 49 ব. ফু. 72 ব. ই.
16. 14 ইঞ্চি 17. 1 ফু. 2 ই. 18. 24 ইঞ্চি
19. 12 ইঞ্চি 20. 6 ইঞ্চি, 10 ইঞ্চি 21. $36\sqrt{3}$ ব. ফু.
22. $256(1+\sqrt{3})$ ব. ফু. 23. $192\sqrt{2}$ ব. ফু.
24. 864 ব. ফু. 25. $162\sqrt{7}$ ব. ফু.

ত্রিকোণমিতি

Exercise 1

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $-\sqrt{3}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 5. -2 6. $-\sqrt{2}$ 7. $-\frac{1}{2}$

8. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 9. -1 10. 40° 11. 80° 12. $\frac{3}{4}\pi$ 13. $-\cos 30^\circ$

14. $\cot 30^\circ$ 15. $-\sec 20^\circ$ 18. 0 19. 1 22. 2 23. 1

24. 1 25. 1 26. $\cos^4\theta, \frac{1}{4}$ 28. $\frac{1}{3}$ 29. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 30. $-\frac{3}{5}$

31. $-\frac{3}{4}$ 32. $-\frac{5}{13}$ 33. $\pm\frac{3}{5}$ 34. $\pm\sqrt{3}$

35. $\frac{12}{35}$ 36. $30^\circ, 150^\circ, -210^\circ, -330^\circ$; $120^\circ, 300^\circ, -60^\circ, -240^\circ$

37. (*i*) $60^\circ, 300^\circ$ (*ii*) $90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ (*iii*) $60^\circ, 300^\circ$
(*iv*) $30^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ (*v*) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$

38. -1

Exercise 2

1. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $2-\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 3. $\frac{63}{65}$ 5. $-\frac{36}{65}$

26. $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

27. $\sin A\cos B\cos C - \sin B\cos C\cos A + \sin C\cos A\cos B + \sin A\sin B\sin C$

28. $\frac{\cot A\cot B\cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot B\cot C + \cot C\cot A + \cot A\cot B - 1}$

Exercise 3

1. $\sin 5\theta + \sin\theta$ 2. $\sin 6\theta + \sin 2\theta$ 3. $\frac{1}{2}(\cos 10\theta + \cos 2\theta)$

4. $\frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)$ 5. $2\sin 25^\circ\cos 5^\circ$ 6. $-2\cos 6\theta\sin\theta$

7. $2\cos 4\alpha\cos\alpha$ 8. $-2\sin A\sin B$ 9. 1

10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

38. $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma)$

39. $4\cos 4\alpha\cos 5\alpha\cos 6\alpha$

Exercise 4

1. (*i*) $\frac{24}{25}$ (*ii*) $\frac{120}{169}$ (*iii*) $\frac{15}{17}$ 2. (*i*) $\frac{1}{3}$ (*ii*) $\frac{1}{3}$ (*iii*) $\frac{9}{41}$
3. (*i*) $2, \frac{1}{2}$ (*ii*) $\pm\frac{1}{3}$ 4. (*i*) $\frac{33}{27}$ (*ii*) $-\frac{22}{27}$ 39. y

Exercise 5

1. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 2. $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ বা, $-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 3. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 5. $\sqrt{2}-1$ 6. (*i*) $\sqrt{\frac{3}{2}}$, (*ii*) $\frac{1}{2}$
11. $\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}$ 12. $\frac{17}{13\sqrt{2}}$ 37. $-, +$ 38. $-, +$

শুদ্ধিপত্র

Algebra : Exercise 53, Q. 9এর Ans. 11 এবং Q. 10এর Ans. 13.

Ex. 54, Q. 5এর জন্য '$-6, -3, 0, 3, 6 \cdots$ to n terms' ধর।

Ex. 55, Q. 10এর Ans. 3, 10 ; -1, 12 এবং Q. 11এর Ans. 4, 9.

Ex. 57, Q. 3এ $2n-1$ কে $2n-3$ ধর।

Ex. 61, Q. 24 (*ii*) কে '$a^2-b^2+c^2$, $\left(a^4+b^4+c^4\right)^{\frac{1}{2}}$, $a^2+b^2+c^2$ are in G. P.' ধর।

Ex. 63, Q. 15এ 221 কে 421 ধর।

Ex. 66, Q. 6এ $-b^{-x}$ কে $+b^{-x}$ ধর।

Ex. 70, Q. 1(*v*)এ $\sqrt{2}$ কে 2 ধর।

Co-ordinate Geometry : Ex. 1, Q. 6এ শীর্ষত্রয়কে (5, 6), (1, 2), (9, 2) ধর।

Ex. 4, Q. 15এ $+1$ কে -1 ধর।

Ex. 5, Q. 20এ $-3y$ কে $+3y$ ধর।

Mensuration : Ex. 1, Q. 8এ wallটিকে 6 ft. high and 9 in. thick ধর এবং Q. 26এ 100 কে 110 ধর।

Ex. 3, Q. 19এ 1 ft. 2 in. কে 6 in. এবং 1 ft. 6 in. কে 8 in. ধর।

Ex. 4, Q. 9এ base কে surface ধর।

Ex. 6, Q. 25এ 8 কে 18 ধর।

Trigonometry : Ex. 1, Q. 38এ 'show that' এর জন্য 'find the value of' ধর।

Ex. 2, Q. 19এ $\cos(120^\circ + A)$এর পর + ধর।

Ex. 3, Q. 42এ $\cot \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{8}{9}$ ধর এবং Q. 44এ $\tan A + \tan B$ কে $\tan A \tan B$ ধর।

Ex. 5, Q. 20এ $\tan^2(90^\circ + \frac{1}{2}\theta)$ কে $\tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)$ ধর।

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703						42	85	127	170	212	254	297	339	381
						02119	02531	02938	03342	03743	40	81	121	162	202	242	283	323	364
11	04139	04532	04922	05308	05690						37	77	116	154	193	232	270	309	348
						06070	06446	06819	07188	07555	37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	08991	09342						36	71	106	142	177	213	248	284	319
						09691	10037	10380	10721	11059	34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710						33	66	98	131	164	197	229	262	295
						13033	13354	13672	13988	14301	32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836						30	61	91	122	152	183	213	244	274
						16137	16435	16732	17026	17319	29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752						28	57	85	114	142	171	199	228	256
						19033	19312	19590	19866	20140	28	55	83	110	138	165	193	221	248
16	20412	20683	20951	21219	21484						27	53	80	107	134	160	187	214	240
						21748	22011	22272	22531	22789	26	52	78	104	130	156	182	208	233
17	23045	23300	23553	23805	24055						26	50	76	101	126	151	176	201	227
						24304	24551	24797	25042	25285	25	49	73	98	122	147	171	196	220
18	25527	25768	26007	26245	26482						24	48	71	95	119	143	167	190	214
						26717	26951	27184	27416	27646	23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27875	28103	28330	28556	28780						23	45	68	90	113	135	158	180	203
						29003	29226	29447	29667	29885	22	44	66	88	110	132	154	176	198
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	41	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	76927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	50	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	63	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	44	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	58	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	36	43	50	57	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	41	48	55	62
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	20	27	34	41	48	54	61
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	38	45	51	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	12	19	25	31	37	43	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	19	25	31	37	43	50	56
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	31	37	43	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	17	23	29	35	41	46	52

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
·26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
·27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
·28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
·29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
·30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
·31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
·32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
·33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
·34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
·35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
·36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
·37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
·38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
·39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
·40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
·41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
·42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
·43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
·44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
·45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
·46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
·47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
·48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
·49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	41	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205